

Luca Granieri

Ottimo in Matematica

Studi Progressivi per (Quasi) Tutti

Alla mia famiglia

Indice

Prefazione	iii
1 Sul Problema della Gittata Ottimale 1	1
1.1 Moto parabolico e gittata	3
1.2 La gittata ottimale.	14
2 La Principessa Didone e il Buco Ottimale	21
2.1 Il Problema del Buco Ottimale	34
2.2 Uno studio esplicito	39
3 Sul Problema della Gittata Ottimale 2	43
3.1 Gittata e problema inverso	43
3.2 Determinare l'angolo di tiro	44
3.3 Luogo dei punti di massima altezza.	50
3.4 Resistenza del mezzo	51
3.5 Ulteriori proprietà	53
3.6 Punti fissi	54
3.7 Gittata ottimale	56
4 Problemi a Dominio Variabile e Applicazioni	61
4.1 Equilibrio per l'energia di volume (area)	63
4.2 Alcune applicazioni	65
4.2.1 Due casi concreti	67
4.2.2 Produzione industriale di piastre	67
4.2.3 Sulla relazione Stock-Reclutamento	68
4.3 Note per i lettori più esigenti	70
5 Ragioni di continuità	75
5.1 Il Teorema di Weierstrass	82

6	Sul problema isoperimetrico	85
6.1	Convessità	85
6.2	Approssimazione con poligoni	86
6.3	Poligoni isoperimetrici	87
6.4	Disuguaglianza isoperimetrica	92
	Bibliografia	93

Prefazione

E poiché la costruzione dell'universo è perfetta ed è opera di un Creatore di immensa saggezza, nulla in esso ha luogo in cui non compaia qualche legge di massimo o minimo.

L. Eulero

La natura non fa nulla di inutile.

Aristotele

Una delle ragioni per cui gli attuali corsi scolastici di matematica non funzionano è che vi sono insegnanti poco esperti. È un errore pensare che non sia necessaria una specializzazione in matematica avanzata, per insegnare nelle elementari o nella scuola secondaria. . . Per essere un buon insegnante, credo sia necessaria una specializzazione che vada ben oltre la semplice laurea.

M. F. Atiyah

Quando ero studente universitario ci si poteva imbattere in corsi dal titolo: *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*. Non ho mai seguito questi corsi, ma immagino che il loro obiettivo fosse anche quello di mostrare che ciò che usualmente riteniamo elementare, alla fine, possa risultare molto meno elementare di quanto ci si aspetti ([25, 22]). Questo libro, invece, potrebbe essere considerato di tendenza opposta, cercando di presentare alcune matematiche *superiori* da un punto di vista *elementare*. In linea generale, si tratta di una scelta di temi che abbracciano in parte anche argomenti di attuale ricerca scientifica, ma esposti in alcuni dei loro tratti più *elementari*, in modo da essere accessibili ad un (si spera) ampio pubblico. I temi proposti sono discussi anche presentando parecchi dettagli, così da costituire dei veri e propri *studi* matematici con i quali cimentarsi progressivamente.

Gauss (1777-1855), il *principe dei matematici*, sosteneva che la matematica è la *regina* delle scienze. Purtroppo, si tratta però di una regina poco amata, e soprattutto poco compresa. Certo, il cittadino medio può anche pensare che il matematico passi il suo tempo a fare divisioni e moltiplicazioni, magari a

cento o più cifre. Del resto, questo è quello che accade puntualmente quando ci si trova a cena e bisogna dividere il conto tra i commensali, oppure nelle riunioni di condominio. *Tu che sei un matematico: quanto dobbiamo pagare a testa?* Ma il guaio è che spesso anche chi termina gli studi ad esempio di un liceo scientifico, o anche di una facoltà universitaria scientifica (a volte anche dal corso di laurea in matematica), nella migliore delle ipotesi, abbia soltanto una vaga idea di cosa effettivamente la matematica sia e di cosa effettivamente i matematici si occupino.

Sicuramente, un grosso problema è il fatto che l'insegnamento (apprendimento) della matematica, a tutti i livelli, è ostacolato da molti fattori, e l'immagine della disciplina che ne risulta diventa sempre più distorta, specialmente nei corsi di base. Così, i libri di testo sono fatti apposta per non essere letti e sono spesso utilizzati per la gran parte come eserciziari. Già, nello specifico della matematica, mi pare che la tendenza generale sia quella di una certa semplificazione degli insegnamenti che spesso si traduce nel privilegiare, a volte esclusivamente, gli aspetti tecnico-computazionali. In questo modo i Teoremi, per non parlare delle dimostrazioni, diventano una merce sempre più rara. In particolare, questa tendenza sembra essere sempre più imperante anche e soprattutto nelle scuole secondarie superiori.

Anche le prove di valutazione, scritte o orali che siano, sembrano ridursi sempre di più alla richiesta di mere procedure di calcolo. Pertanto, ciò che conta veramente è *saper fare* gli esercizi, magari anche imparando le tecniche risolutive di una certa tipologia di esercizi senza neanche sapere come si chiamino gli oggetti coinvolti, per non parlare della loro definizione o delle principali proprietà.

L'aspetto più grave di questa situazione è la sempre più ridotta presenza di occasioni per familiarizzare con la natura del pensiero matematico, con i suoi problemi e le sue applicazioni. In altre parole, ci si trova a fare qualcosa senza capire cosa si faccia e perché, e conseguentemente senza poterne trarre alcun piacere, se non quello di una *buona valutazione*.

È come se, iscrivendosi ad un corso di musica, vengano proposti anni interi di solo solfeggio, senza mai la possibilità di suonare uno strumento o di cantare. Sarebbe certamente una noia mortale che lascerebbe il corso privo di iscritti. Allo stesso modo, l'applicazione meccanica di formule e procedure non fa che allontanare molti giovani dallo studio della matematica.

Ancor più grave è che tutto questo danneggia proprio gli studenti *più bravi* che magari abbandonano la matematica perché appare loro *arida e inutile*, disperdendo così eventuali eccellenze.

Questo libro si propone allora come un tentativo di presentare delle *letture matematiche* che possano essere affrontate se vogliamo come uno studio per violino o chitarra. Si tratta dunque di letture impegnative, organizzate partendo da elementi di base, ma capaci (si spera) di intrattenere e stimolare

l'interesse del lettore, fino ad arrivare a vere e proprie *composizioni*, tratte per lo più dall'esperienza scientifica e didattica dell'autore. Fuori dalla metafora musicale, si tratta di un'opera di divulgazione che, partendo dalla rielaborazione di elementi di base, di norma presenti nel bagaglio almeno degli studenti delle scuole medie superiori e dei primi anni di università, affronta alcuni problemi specifici mostrando alcuni aspetti della matematica mentre opera, e proponendo poi alcune sortite anche su temi più avanzati di attuale interesse di ricerca scientifica.

Un matematico francese, forse Lagrange, diceva che si possiede la conoscenza *perfetta* di una teoria matematica quando si è in grado di farla comprendere, almeno nei suoi aspetti essenziali, al primo passante che si incontra uscendo di casa. Questo è forse un aspetto ideale, al quale senz'altro ci si avvicina quando si conosce la teoria tanto a fondo da poterne parlare come qualcosa di proprio. Non si tratta comunque soltanto di un problema di semplificazione, ma anche di una corretta comunicazione della scienza e della matematica in particolare. Nei fatti, spesso per il cittadino medio la matematica consiste per lo più in una collezione di tecniche e formule da applicare all'occorrenza. E quando si parla di cultura, anche scientifica, quasi mai si pensa alla matematica. Una volta mi trovavo ad insegnare in un liceo e notavo come, specialmente per gli studenti degli ultimi anni, si offrissero molte iniziative culturali come seminari, incontri con scrittori, ecc. Allora proposi ai colleghi: *Perché non facciamo un seminario di matematica?* Una collega, giovane insegnante di matematica tra l'altro, mi rispose meravigliata: *Ma di matematica, di cosa mai si può parlare?* Rimasi molto sconcertato da una tale risposta e soprattutto dalla scoperta che, purtroppo, un tale atteggiamento non è un caso isolato, anche tra gli insegnanti di materie scientifiche. In questa problematica, una componente importante è l'idea che della scienza hanno i docenti, e sugli scopi che il loro insegnamento dovrebbe perseguire. Se le dimostrazioni diventano merce sempre più rara, e si scelgono i testi soltanto perché contengono più di mille esercizi, è chiaro come diventi difficile apprezzare il contenuto culturale della matematica e il fascino di questa disciplina. Pertanto, in primo luogo, questo libro è rivolto agli insegnanti di materie scientifiche (e non). Scrivendolo ho impiegato ogni sforzo nell'intento di offrire la possibilità di apprezzare la matematica come scienza viva (e vegeta direi), e in connessione con le altre scienze. Inoltre, molte parti del libro possono essere adattate per lezioni in aula e/o proposte agli studenti più interessati per approfondimenti, tesine e così via.

Un'altra categoria di lettori a cui ho pensato molto durante la stesura del libro sono gli studenti, specialmente quelli delle scuole superiori, quelli universitari e post-universitari. È vero, la matematica è difficile, spesso terribilmente difficile. Non possiamo onestamente ignorare questo fatto. Ma appianare queste difficoltà riducendo al lumicino, se non eliminando del tutto, argomen-

tazioni, deduzioni e dimostrazioni è a mio avviso dannoso, e in qualche modo fraudolento. Intanto, non è poi così chiaro se questo modo di fare semplifichi l'apprendimento degli studenti. In ogni caso, giovani anche capaci possono ritenere, giustamente in questa prospettiva, la matematica una disciplina sterile orientandosi così verso altri studi. In questo modo, sono in qualche misura compromesse anche le scelte *vocazionali*, come la scelta di un corso di laurea o la continuazione di percorsi di studio dopo l'università. E il fatto è che a subire il danno maggiore sono proprio gli studenti più bravi. Inoltre, in questo modo si va pure perdendo il famoso *valore formativo* dei corsi di matematica che, come generalmente si riteneva, diventavano come scuole di pensiero in cui acquisire e affinare capacità importanti per ogni tipo di professione. Ma se ciò che si propone è tutto fuor che matematica, allora è giustificabile il parere di chi vuole costantemente ridurre lo spazio e l'importanza di questa disciplina nei percorsi scolastici e universitari. Spero che la mia impressione sia sbagliata, ma mi pare che la matematica stia diventando sempre più una materia secondaria, anche dove il suo ruolo dovrebbe essere centrale, come ad esempio nei licei scientifici o nelle facoltà di ingegneria. Dunque, lo scopo principale del libro è allora quello di raccontare alcuni aspetti importanti della matematica, anche se questi richiedono impegno e pazienza. Il libro potrebbe dunque essere utile agli studenti che volessero mettere alla prova (o far emergere) la propria inclinazione alla matematica. La proposta di problemi interessanti e tuttora attuali, senza scoraggiare il lettore con troppe difficoltà tecniche, attraverso gradini progressivi che possono essere superati con impegno ma con gratificazione immediata, può essere un utile strumento per coltivare la propria vocazione matematica. In ogni caso, tutti coloro che siano interessati al pensiero scientifico potranno trovare nel libro, sebbene come più volte detto richieda una lettura impegnativa e paziente, una presentazione di alcuni aspetti della matematica e delle sue relazioni con le altre scienze, nonché una introduzione ad alcuni temi attuali della ricerca scientifica.

Il primo capitolo del libro è dedicato al problema della gittata ottimale. Le idee fondamentali del capitolo sono tratte da [28]. Si tratta di un argomento classico che è presente in quasi tutti i testi di fisica elementare. In effetti, un anno mi trovavo proprio ad insegnare fisica e a spiegare come, per lanciare una palla di cannone il più lontano possibile, occorra formare un angolo di 45° tra la direzione di sparo e il suolo. Tutti i testi che potetti consultare contenevano, quando le contenevano, dimostrazioni di questo fatto che perlomeno utilizzano elementi di goniometria o di calcolo differenziale. Ma i miei studenti non avevano ancora a disposizione questi strumenti. Decisi così di pensare ad una dimostrazione che fosse alla loro portata. Ora, quando il colpo è sparato dal livello del suolo, si produce un problema molto simmetrico. In questo caso, non è difficile trovare una dimostrazione basata su una disuguaglianza tra media geometrica e media quadratica, ricavabile con un po' di algebra elementare.

Questo successo mi incoraggiò a cercare una analoga dimostrazione nel caso di un proiettile sparato da una altezza qualsiasi. In tal caso, il problema che ne consegue è considerevolmente più complicato. In effetti, le dimostrazioni basate sul calcolo differenziale non sono affatto semplici, e possono creare qualche difficoltà anche allo studente universitario. Allora, una dimostrazione elementare sarebbe stata veramente graziosa. Devo confessare che dovetti pensare parecchio al problema prima di scovare una disuguaglianza un po' più sofisticata, la cosiddetta disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, ben nota a tutti i laureati in matematica (almeno così dovrebbe essere), che comunque, almeno per l'applicazione al problema della gittata, ammette ancora una dimostrazione del tutto elementare. Si noterà che, forse, il capitolo è più lungo del necessario, giacché contiene molto materiale che potrebbe apparire come pura divagazione. In effetti, si tratta di deliberate divagazioni, certamente discutibili, ma importanti secondo me per diverse ragioni. Esse non hanno nessuna pretesa di precisione o completezza storica, filosofica o epistemologica, ma hanno soltanto lo scopo di illustrare come si possano introdurre tante tematiche importanti da molti punti di vista, anche partendo dalla matematica ritenuta più elementare; così, tanto per sfatare la convinzione che fare matematica consista nello spiattellare risultati ed esercizi uno dietro l'altro. Comunque, i rimanenti capitoli sono più sobri da questo punto di vista.

Naturalmente, lo scopo ultimo è quello di far emergere l'importanza e la necessità di una cultura scientifica in generale, e matematica in particolare. Un dialogo con le altre scienze e le altre discipline è auspicabile, e dovrebbe essere perseguito specialmente a scuola. Certo serve tempo, ma non è assolutamente tempo perso. Soprattutto se si desidera promuovere una concreta cultura scientifica. In effetti, ogni corso scolastico o universitario contiene idee grandiose che hanno richiesto secoli e le migliori menti per essere stabilite, incidendo profondamente sul pensiero e sulla storia dell'umanità. Passarle sotto silenzio o presentarle, quando va bene, come *cosette da poco* perché c'è un lungo programma da completare o tanti esercizi da discutere, non è un bene. Del resto, già Platone si lamentava che ai suoi tempi i giovani ignorassero l'esistenza e il significato di quantità irrazionali. Oggi, purtroppo, la situazione non è molto diversa.

Nel capitolo 3, sulla base di [20], si prosegue l'analisi del problema della gittata, presentando alcune interessanti proprietà meno note al grande pubblico e aprendosi verso scenari più vasti. In particolare, sono proposte alcune considerazioni sul caso in cui si consideri la resistenza del mezzo in cui il proiettile si muove. Per tale discussione si richiede almeno una minima conoscenza del calcolo differenziale.

Il capitolo 2 è essenzialmente di tipo geometrico e discute il classico problema isoperimetrico. Si tratta di trovare, tra tutte le figure geometriche aventi lo stesso fissato perimetro, quella che racchiuda l'area massima possibile. È un

problema dalla lunghissima e interessante storia e, per molti versi, ancora in fase di svolgimento. In particolare, viene proposta una applicazione a quello che potremmo chiamare *problema del buco ottimale*. Si tratta, ad esempio, di ricavare una finestra di volume fissato in una parete. Ora, facendo un buco alla parete questa in generale si indebolisce. Allora, la questione è scegliere la geometria del buco in modo che la parete si indebolisca il meno possibile. La trattazione impostata richiede strumenti già alla portata degli studenti di scuola superiore.

Il capitolo 4 infine inquadra le problematiche del capitolo 2 in una teoria un po' più generale. Si tratta di problemi a dominio variabile in cui si cerca di capire come vadano le cose quando a cambiare è la geometria del dominio in considerazione. Viene proposto un modello semplificato, trattabile con gli strumenti dell'Analisi Matematica normalmente disponibili agli studenti degli ultimi anni di scuola superiore e dei primi anni di università, introducendo alcuni elementi del cosiddetto *Calcolo delle Variazioni*. Anche se estremamente semplificato, il modello consente di discutere alcuni problemi interessanti, anche dal punto di vista delle applicazioni.

Il capitolo 5 è invece una specie di appendice. Per completezza, si presentano alcuni aspetti dati per scontati nei capitoli precedenti. In particolare si discutono alcune conseguenze della nozione di *continuità*.

Il capitolo 6 infine presenta una dimostrazione della proprietà isoperimetrica del cerchio.

Come si è detto, l'organizzazione dei contenuti di questo libro è improntata ad un ordine di crescente difficoltà, specialmente rispetto agli strumenti matematici impiegati. Tuttavia, se permettete ancora l'uso di una metafora musicale, ci sono almeno due *leitmotiv* che percorrono le pagine di questo libro. Il primo è il concetto di *modello matematico*. Gli esempi raccolti in questo libro dovrebbero infatti consentire perlomeno di introdurre alcune problematiche (spesso evitate da libri di testo e insegnanti) connesse alla *matematizzazione della realtà*. Per una discussione sistematica di questo tema rimandiamo il lettore per esempio a [9, 40] e all'interessante progetto *Matematica e realtà* (www.matematicaerealta.it).

Il secondo *leitmotiv* è costituito dalla discussione di problemi di minimizzazione o massimizzazione. Uno dei settori della matematica che tratta sistematicamente problemi di minimo o massimo è noto come *Calcolo delle Variazioni*. Moralmente, si tratta di trovare la maniera migliore per fare una certa cosa. Naturalmente, in generale, bisogna scegliere tra moltissime alternative o *variazioni*. Quindi, in senso lato, tali *variazioni* vanno in qualche modo *calcolate* per poterne scegliere una, se esiste, migliore di tutte le altre. Principi di massimo o di minimo, o in breve principi *variazionali*, pervadono tutte le scienze, sia pure che applicate, e si sono rivelati molto importanti e fecondi. Molte leggi fisiche fondamentali ad esempio hanno proprio un carattere variazionale.

Basterà ricordare ad esempio il principio di Fermat, per il quale un raggio di luce che si muove tra due punti *sceglie* un percorso, tra tutti quelli possibili, che minimizzi il tempo di viaggio. O ancora il principio di Dirichelet, per il quale le configurazioni di equilibrio stabile di un sistema meccanico soggetto a forze conservative sono quelle che minimizzano l'energia potenziale. Principi di questo tipo possono essere, in un certo senso, considerati come leggi di natura. Un tale approccio si fonda sull'idea che la natura sia in qualche modo *economa*. In altre parole, se la natura deve fare qualcosa, non lo farà certo in un modo qualsiasi, ma cercherà di farlo in un modo che sia *ottimale* rispetto a qualche criterio. D'altra parte, anche questioni pratiche possono condurre a problemi di ottimizzazione. Ad esempio, potremmo essere interessati a trasportare delle merci in modo da minimizzare i costi di trasporto ([31]), o ad organizzare una produzione in modo da guadagnare il massimo possibile e così via. Per una introduzione ad alcune di queste tematiche si veda anche [3, 11, 19, 39, 56]. Pertanto, da questo punto di vista, questo libro potrebbe anche essere considerato come una introduzione ad alcune idee del Calcolo delle Variazioni e ad alcuni temi di questo meraviglioso settore della matematica.

L'autore sarà grato a chiunque voglia segnalare errori, imprecisioni o proporre osservazioni e/o critiche all'indirizzo e-mail:

granieriluca@libero.it

L'autore si impegna a mantenere una *errata corrige* ed ulteriori eventuali materiali sulla pagina web personale:

<http://digilander.libero.it/granieri>

Dicembre 2015

Luca Granieri

Bibliografia

[*] I seguenti riferimenti bibliografici riportano i testi che sono stati impiegati nel comporre questo libro e/o si ritengono utili per approfondire i temi trattati. Ovviamente una bibliografia esaustiva non sarebbe possibile né utile e la seguente raccolta di testi riflette unicamente i gusti e le conoscenze dell'autore.

- [1] C. Allegre, *La sconfitta di Platone*, Editori Riuniti, 1998.
- [2] T. Andreescu, O. Mushkarov, L. Stoyanov, *Geometric Problems on Maxima and Minima*, Birkhauser, 2006.
- [3] A. Ambrosetti, *Il Fascino della Matematica*, Boringhieri, 2009.
- [4] D. Berlinski, *I Numeri e le Cose*, Rizzoli, 2003.
- [5] E. Bellone, *Galileo*, collana *Le Scienze: I Grandi della Scienza I*, n.1, 1998.
- [6] J. D. Bernal, *Storia della fisica*, Editori Riuniti, 1983.
- [7] Carl B. Boyer, *Storia della Matematica*, Mondadori, 1990.
- [8] A. Brancolini, M. Chimienti, M. Dassisti, L. Granieri, F. Maddalena, *Variational Techniques for Assessing the Technological Signature of Flat Surfaces*, *Optimization and Engineering* **14** (2013) 155-174.
- [9] P. Brandi, A. Salvadori, *Modelli matematici elementari*, Mondadori, 2007.
- [10] L. Colombo, S. Giordano, *Introduzione alla Teoria della Elasticità*, Springer, 2007.
- [11] R. Courant, H. Robbins, *Che Cos'è la Matematica?*, Bollati Boringhieri, 1971.
- [12] Tilak de Alwis, *Projectile Motion with Arbitrary Resistance*, *College Math Journal*: Vol. 26, Num. 5 (1995), Pag. 361-367.

- [13] P. D'Ambrosio, D. De Tommasi, L. Granieri, F. Maddalena, A surface energy approach to the mass reduction problem for elastic bodies, *IMA Journal of Applied Mathematics* 74 (2009), 934-949.
- [14] P. D'Ancona, E. Montefusco, Il dubbio di Didone, *Pubbl. centro Ric. Mat. E. de Giorgi, Scuola Norm. Sup., Pisa* (2004), 59-79.
- [15] K. Devlin, *L'istinto Matematico*, Raffaello Cortina, 2007.
- [16] J. Dieudonné, *L'Arte dei Numeri, Matematica e matematici oggi*, Mondadori, 1989.
- [17] J.L. Fernandez-Chapou, L. Salas-Brito, C.A. Vargas, An elliptic property of parabolic trajectories, disponibile on-line su arXiv:physics.
- [18] R. Fosdick, L. Granieri, F. Maddalena, Reformation Instability in Elastic Solids, *Journal of Elasticity*, 107, No. 2 (2012), 131-150.
- [19] E. Giusti, *La Matematica in Cucina*, Boringhieri, 2004.
- [20] M. Gobbino, L. Granieri, Sul problema della gittata ottimale 2, *Archimede* N. 1 (2010), 21-28.
- [21] M. Gori, On a maximization problem for the convex hull of connected systems of segments, *Journal of Convex Analysis* 14 (2007), 49-68.
- [22] L. Granieri, *Elementi di Matematica, Matematica Elementare pre-Universitaria*, La Dotta, 2013.
- [23] L. Granieri, *Dio c'è e la scienza*, Edizioni La Dotta, 2015.
- [24] L. Granieri, Sulla misura del cerchio, Alice e Bob, *Pristem*, Aprile 2013.
- [25] L. Granieri, Sulla matematica elementare, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate* Vol. 38B N.4, Ottobre 2015.
- [26] L. Granieri, F. Maddalena, On some variational problems involving volume and surface energies, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 146, Issue 2 (2010), 359-374.
- [27] L. Granieri, *Paradossi, Biblioteca dei 500, Ulisse*, Sissa, Trieste, 2004. Disponibile online all'indirizzo: <http://ulisse.sissa.it>
- [28] L. Granieri, Sul problema della gittata ottimale, *Archimede* Num. 3 (2008), Pag. 139-145.

- [29] L. Granieri, A Variational Approach to the Stock-Recruitment Relationship in Fish Population Dynamic, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **34** (2011) 607-619.
- [30] L. Granieri, Cristalli ottimali, *Progetto Alice*, III Vol. 15 n. 45, 2014.
- [31] L. Granieri, Il problema del trasporto ottimale di massa, *Scienze e Ricerche* n. 4, febbraio 2015, pp. 85-88.
- [32] J. Gribbin, *L'Avventura della scienza moderna*, Longanesi, 2004.
- [33] C.W. Groetsch, Barry Cipra, Halley's Comment: Projectiles With Linear Resistance, *Mathematics Magazine* **70**, N. 4 (1997), 273-280.
- [34] C.W. Groetsch, Halley's Gunnery Rule, *College Math Journal*: Vol. 28, Num. 1 (1997), Pag. 47-50.
- [35] C.W. Groetsch, Tartaglia's inverse problem in a resistive medium, *American Mathematical Monthly* **103**, N. 7 (1996), 546-551.
- [36] C.W. Groetsch, *Inverse problems*. AMS, Washington DC, 1999.
- [37] Rober A. Hazen, J. Trefill, *La scienza per tutti*, Longanesi, 1996.
- [38] H. Helman, *Le dispute della scienza*, Raffaello Cortina Editore, 1999.
- [39] S. Hildebrandt and A. Tromba. *Principi di minimo. Forme ottimali in natura*. Edizioni della Normale, Pisa, 2007.
- [40] G. Israel, *La visione matematica della realtà*, Laterza, 1996.
- [41] N. D. Kazarinoff, *Disuguaglianze Geometriche*, Zanichelli, 1972.
- [42] M. Kline, *Storia del Pensiero Matematico*, 2 volumi, Einaudi, 1996.
- [43] S. Lang, *La Bellezza della Matematica*, Boringhieri, 1991.
- [44] Daniel A. Morales, Exact expression for the range and the optimal angle of a projection with linear drag, *Canadian Journal of Physics* **83** (2005), Pag. 67-83.
- [45] E. Newth, *Breve storia della scienza*, Salani Editore, 1998.
- [46] P. Odifreddi, *Divertimento Geometrico*, Bollati Boringhieri, 2003.
- [47] P. Odifreddi, *C'era una volta un paradosso*, Einaudi, 2001.
- [48] P. Odifreddi, *Le menzogne di Ulisse*, Longanesi, 2004.

- [49] Edward W. Packel and David S. Yuen, Projectile Motion with Resistance and the Lambert W Function, *College Mathematics Journal*, Vol. 35, Num. 5 (2004), Pag. 337-350.
- [50] P. Rossi (diretta da), *Storia della Scienza Moderna e Contemporanea*, 6 volumi, Tea, 2000.
- [51] L. Russo, *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli, 2001.
- [52] *Il caos*, *Le Scienze* N. 222, 1987.
- [53] Y. A. Shashkin, *Fixed points*, AMS, *Math. World* N. 2, 1991.
- [54] J. Stillwell, *Mathematics and Its History*, Springer, 2002.
- [55] G. Tagarelli, *Problemi variazionali a dominio variabile e applicazioni*. Tesi di laurea in Matematica, Università di Bari, A.A. 2009-2010.
- [56] V.M. Tikhomirov, *Stories about Maxima and Minima*, AMS, 1990.
- [57] C. M. Wynn, A. W. Wiggins, *Le cinque più grandi idee della scienza*, Zelig, 1998.
- [58] G. Wulff, Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachstums und der Auflösung der Krystallflächen, *Zeitschrift für Krystallographie und Minerologie* **34** (1901), 449-530.