Abstract

[Riassunto.]Si propongono alcune considerazioni sulla dimostrazione e sulle applicazioni del Teorema di Gauss, in particolar modo su aspetti correlati alle strutture matematiche coinvolte.

Abstract

We discuss some mathematical tools connected with Gauss Theorem and its applications.

Sul Teorema di Gauss

Luca Granieri

September 24, 2023

Il Teorema di Gauss è un caposaldo dell'elettromagnetismo e in genere viene già discusso e utilizzato nella didattica negli ultimi anni di scuola superiore e nei primi di università. Tuttavia, la struttura matematica comune consentirebbe di introdurlo anche nel trattare la gravitazione, cosa che tradizionalmente avviene generalmente molto prima. L'interazione gravitazionale dipendente dall'inverso del quadrato della distanza è valida infatti per due masse puntiformi. Ma nell'universo sono presenti molto più di due masse. Come la mettiamo? Quando le masse sono più di due si è soliti ricorrere al cosiddetto **Principio di sovrapposizione** (che in fondo costituisce un altro assioma della teoria) per il quale se abbiamo un sistema composto dalle masse m_i allora la forza agente su una massa M è data da

$$GM \sum_i \frac{m_i}{r_i^3} \vec{r_i}$$

dove $\vec{r_i}$ è il vettore distanza della massa m_i da M. In altre parole, la risultante delle forze è la forza ottenuta sommando le interazioni gravitazionali tra m_i ed M una alla volta, come se le altre masse non esistessero. Ma soltanto la considerazione dell'attrazione gravitazionale tra Luna e Terra richiede già una complicazione ulteriore. Come trattare una distribuzione continua costituita da molto più di infinite particelle? La proposta di Newton, che costituisce uno degli assunti base della cosiddetta *meccanica dei continui*, è in definitiva quella di *sostituire le somme con integrali*. Gli strumenti matematici necessari per gestire queste situazioni sono allora fondamentali e proprio per questi scopi *costruiti* da Newton stesso. In questo frangente è il Teorema di Gauss, basato sul cosiddetto *Teorema della Divergenza*, a giocare un ruolo fondamentale. In dimensione maggiore di uno si tratta di una generalizzazione del Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_a^b f'(x)\ dx = f(b) - f(a) \tag{1}$$

per cui l'integrale in una dimensione su un intervallo $[a, b]$ si può valutare da quanto accade sul bordo del dominio, ovvero sugli estremi dell'intervallo stesso. In più dimensioni, ad esempio nello spazio tridimensionale, avremo al primo membro della (1) un integrale su un volume V, mentre la derivata prima va sostituita con l'operatore differenziale *divergenza* di un campo vettoriale $\vec{E}$ che contempla le derivate del campo in tutte e tre le dimensioni spaziali. Al secondo membro della (1) comparirà invece un integrale sulla superficie S che racchiude il volume V, corrispondente al cosiddetto *flusso uscente* del campo $\vec{E}$ attraverso la superficie chiusa S. Il Teorema della divergenza assume allora le sembianze seguenti

$$\int_V div(\vec{E})\ dv = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n}\ ds \tag{2}$$

dove $\vec{n}$ rappresenta il vettore normale uscente alla superficie S. La dimostrazione di questo risultato richiede una dose più massiccia di analisi matematica rispetto a quanto possiamo assumere in questa sede. Ci limitiamo a qualche considerazione che può senz'altro essere utile anche negli studi scolastici dove, magari senza evidenziarlo espressamente, tale risultato è comunque utilizzato. Osserviamo che in termini di flusso il secondo membro della (1) è esattamente il flusso uscente dal segmento $[a, b]$ del campo vettoriale $\vec{E} = f(x)\vec{e}_x$ con $\vec{e_x}$ il versore dell'asse delle ascisse. Passando a più dimensioni spaziali, per vettori in più variabili la derivata si generalizza con il cosiddetto vettore gradiente. Se $\vec{E}(x_1, x_2, x_3)$ dipende da tre variabili spaziali, allora ogni singola componente ha diritto a tre diverse derivate, quelle che si ottengono considerando le altre variabili come fissate, dando luogo alle cosiddette *derivate parziali*

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial E_1}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial E_1}{\partial x_3}$$

dove ad esempio la prima derivata si ottiene derivando la funzione E_1 rispetto alla variabile x_1 e pensando le altre due variabili come fissate. Il gradiente è la matrice che contiene tutte le derivate parziali, in questo caso specifico una matrice 3×3. Tale matrice è anche detta *matrice jacobiana.* A questo punto, l'operatore di divergenza si ottiene sommando le derivate avente indici uguali (la cosiddetta *traccia* della matrice), ovvero, per definizione

$$div(\vec{E}) = \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3}.$$

I campi vettoriali che hanno divergenza nulla giocano un ruolo particolare giacché per essi, a causa del Teorema di Gauss, il flusso uscente da una superficie chiusa è sempre nullo. Tali campi si dicono *solenoidali.* Un esempio fondamentale è costituito dal campo magnetico $\vec{B}$. Una delle leggi di Maxwell dell'elettromagnetismo stabilisce per l'appunto che il flusso uscente del campo magnetico da una superficie chiusa è sempre nullo. Ora, il campo gravitazionale, e similmente quello elettrostatico sostituendo le masse m con le cariche q e la costante gravitazionale G con la costante K di Coulomb, generato da una massa M ha la forma $\vec{E}_g = \frac{GM}{r^3}\vec{r}$ con $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ il vettore che rappresenta la distanza dalla sorgente puntiforme M del campo. Osserviamo che tale campo ha nella sorgente stessa una singolarità, giacché la funzione che lo definisce è ivi divergente. In tutti gli altri punti è possibile calcolare le derivate

$$\frac{\partial \left(E_g\right)_i}{\partial x_i} = -\frac{3GM}{r^5}x_i^2 + \frac{GM}{r^3} \Rightarrow$$

$$div(\vec{E}_g) = -\frac{3GM}{r^5}\sum_{i=1}^{3} x_i^2 + 3\frac{GM}{r^3} = -\frac{3GM}{r^5}r^2 + 3\frac{GM}{r^3} = 0.$$

Pertanto, a causa del Teorema di Gauss, possiamo dire che il flusso uscente è sempre nullo nello spazio vuoto, ovvero per quelle superfici che non racchiudono masse. Dunque, il campo gravitazionale, e per la stessa ragione il campo elettrico, sono solenoidali nel vuoto. Questa osservazione, per quanto immediata, porta con sé delle conseguenze estremamente importanti. In effetti, il calcolo di un integrale di superficie può essere molto complicato e spesso impossibile da districare esplicitamente. Tuttavia, il fatto che il flusso sia sempre nullo nel vuoto ci permette di dire che, quand'anche una superficie S contenesse delle masse, o delle cariche, il calcolo del flusso in realtà **non dipende** dalla particolare scelta della superficie ma soltanto dalla massa, o carica, che essa contiene. In altre parole saremo liberi di scegliere

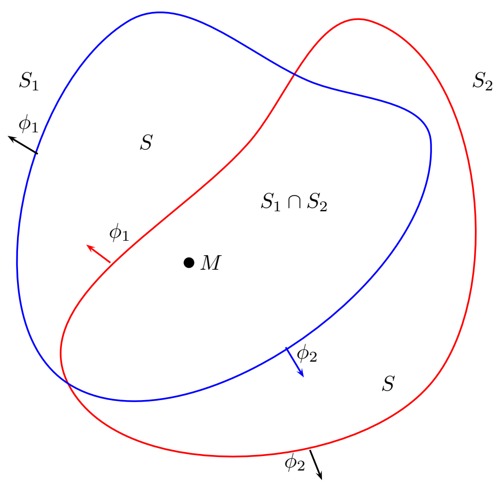

Figure 1: Il flusso uscente da S è nullo e pertanto $\phi_{S_1} = \phi_{S_2}$

la superficie che più ci piace e che renda il calcolo il più agevole possibile. Al fine di giustificare questa aspettativa, consideriamo una massa puntiforme M e due diverse superfici chiuse S_1, S_2 che la racchiudano, come in figura 1. Nel sovrapporsi, le due superfici individuano delle porzioni di spazio che non contengono la massa M e che quindi racchiudono dello spazio vuoto. Detta S tale superficie, giacché in tale porzione di spazio vuoto la divergenza del campo è nulla, il flusso uscente ϕ_S è nullo essendo

$$\phi_S := \int_S \vec{E}_g \cdot \vec{n}\ ds = \int_V div(\vec{E}_g)\ dv = 0.$$

Ma nel calcolare tale flusso, quello uscente dalle zone S che non contengono sorgenti del campo al loro interno è nullo in ogni zona. In riferimento alla figura 1, il flusso uscente dalla superficie rossa di $S_1 \cap S_2$, chiamiamolo ϕ_1, coincide con quello nero uscente dalla parte di S in comune con S_1. Similmente, nell'altra zona di S il flusso uscente (blu e nero), diciamo ϕ_2, coincidono tra loro. Pertanto, il flusso uscente da S_1 vale $\phi_1 + \phi_2$, mentre quello uscente da S_2 vale anch'esso $\phi_1 + \phi_2$. In definitiva, i flussi uscenti da S_1 e S_2 coincidono. Pertanto, il flusso uscente dalla superficie che contiene la sorgente M resta invariato, indipendentemente dalla scelta della superficie S che contiene M. Da un punto di vista geometrico più generale, si può osservare che l'indipendenza del flusso dalla geometria delle superficie è collegata all'invarianza per omotopia degli integrali di campi solenoidali e pertanto ciò che conta è unicamente la presenza di masse internamente o esternamente alla superficie stessa.

Se allora vogliamo calcolare effettivamente il flusso uscente da una superficie S contenente una massa puntiforme M, possiamo farci furbi e scegliere una superficie che ci permetta di farlo senza troppi patemi d'animo. Ad esempio, se scegliamo per S una superficie sferica di raggio r concentrica ad una sorgente puntiforme M , allora il vettore normale $\vec{n}$ alla superficie è sempre parallelo al campo $\vec{E}_g$ che in tal caso specifico può anche essere scritto nella forma $\vec{E}_g = \frac{GM}{r^2}\vec{n}$ in tutti i punti della superficie. Con questa scelta non occorre nemmeno conoscere i dettagli dell'integrazione se non la sua interpretazione geometrica come *somma di aree/volumi*. Nel nostro caso

$$\phi_S = \int_S \vec{E}_g \cdot \vec{n}\ ds = \int_S \frac{GM}{r^2}\vec{n}\cdot\vec{n}\ ds = \frac{GM}{r^2}\int_S |\vec{n}|^2\ ds = \frac{GM}{r^2}\int_S 1\ ds =$$

$$\frac{GM}{r^2}S(sfera) = \frac{GM}{r^2}4\pi r^2 = GM4\pi := \frac{M}{g_0}$$

giacché le costanti si portano fuori dal segno di integrale, $\vec{n}\cdot\vec{n} = |\vec{n}| = 1$ trattandosi di un versore e tenuto conto che l'integrale dell'unità corrisponde alla misura totale del dominio di integrazione, ovvero alla superficie della sfera in questo caso specifico. Nell'ultima uguaglianza abbiamo introdotto l'ulteriore costante $g_0 := \frac{1}{4\pi G}$ per snellire le notazioni in modo da scrivere

$$\phi_S = \frac{M}{g_0} \tag{3}$$

da cui segue che il flusso uscente da S dipende unicamente dalla massa M ivi contenuta. Osserviamo esplicitamente che l'indipendenza dal raggio della sfera si può anche ottenere considerando la *forma infinitesima di volume* $ds = r^2 d\omega$ dove ω rappresenta la coordinata relativa all'angolo solido.

Solitamente ci si riferisce alla notevole relazione (3) come **Teorema di Gauss**. Tale formula, che con quanto sopra abbiamo dimostrato per il campo generato da una singola sorgente puntiforme, ha in effetti una validità universale ed è valida per qualunque distribuzione di massa. Dalle proprietà di linearità dell'integrale si verifica agevolmente la formula per *sovrapposizione* per una somma finita di sorgenti. Se abbiamo delle masse M_i ed una superficie S, denotando con E_g il campo risultante dei campi $(E_g)_i$ dovuti alla singola massa M_i

$$\phi_S^{(E_g)} = \sum_i \phi_S^{(E_g)_i} = \sum_i \frac{M_i^{INT}}{g_0} = \frac{M^{INT}}{g_0}.$$

E cosa succede per una distribuzione continua di massa come per il campo generato da una sfera come, diciamo, la Terra? Abbiamo già accennato al fatto che la sommatoria deve essere sostituita da un integrale. Il calcolo del flusso assume allora una forma come la seguente

$$\int_S \left(\int_M \vec{E}_g(r)\ dm\right)\cdot\vec{n}\ ds$$

dove $\vec{E}_g(r)$ è il campo elementare (per unità di massa) generato dalla *massa elementare dm* nella posizione r rispetto ad un fissato sistema di riferimento, ad esempio rispetto al centro del pianeta. Si tratta di quello che i matematici chiamano *integrale doppio*, o meglio *integrale rispetto ad una misura prodotto*. Il calcolo presentato per una distribuzione discreta di masse corrisponderebbe in questo caso a *scambiare* tra loro l'ordine di esecuzione di questi due integrali. Sotto certe ipotesi (Teoremi di Fubini-Tonelli ecc.) questo passaggio è in effetti lecito. Scambiando l'ordine di integrazione si ottiene

$$\int_S \left(\int_M \vec{E}_g(r)\ dm\right)\cdot\vec{n}\ ds = \int_M \left(\int_S \vec{E}_g(r)\cdot\vec{n}\ ds\right) dm =$$

$$\int_M \frac{\delta_m}{g_0}\ dm = \frac{M^{INT}}{g_0}$$

dove δ_m rappresenta la funzione che vale 1 se la massa è interna ad S e vale 0 altrimenti. M^{INT} rappresenta pertanto la massa totale racchiusa dalla superficie S. Siamo così pervenuti al Teorema di Gauss

Teorema 1 (di Gauss)**.** *Data una distribuzione di massa (risp. carica) qualunque, il flusso del campo gravitazionale (risp. elettrico) uscente da una superficie chiusa S non dipende dalla scelta della superficie ma unicamente dalla massa (risp. carica) contenuta dalla superficie stessa e si ha*

$$\phi_S^{E_g} = \frac{M^{INT}}{g_0} \qquad \left(risp.\ \phi_S^E = \frac{Q^{INT}}{\varepsilon_0} \right).$$

In effetti, la forza elettrostatica tra due cariche q_1, q_2 assume la forma $F = K\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}$ con K la costante di Coulomb, q_1, q_2 le cariche puntiformi e $\vec{r}$ il vettore che congiunge le due cariche. La stessa struttura matematica soggiacente porta allora allo stesso risultato per il calcolo dei flussi a meno della costante $\varepsilon_0 := \frac{1}{4\pi K}$ (costante dielettrica del vuoto) e Q^{INT} a rappresentare la carica totale racchiusa dalla superficie S.

Campo gravitazionale per simmetria sferica

Un pianeta sferico e omogeneo genera un certo campo gravitazionale. Come già accennato, Newton fu in grado di giustificare che ai fini gravitazionali esso si comporta come se tutta la sua massa fosse concentrata nel suo centro. Intanto, data la simmetria sferica, in un punto P dello spazio ci aspettiamo che il campo generato dal pianeta abbia direzione radiale e sia costante sulla sfera concentrica passante per P. Infatti, tutte le masse elementari del pianeta lungo il diametro OP danno un contributo radiale.

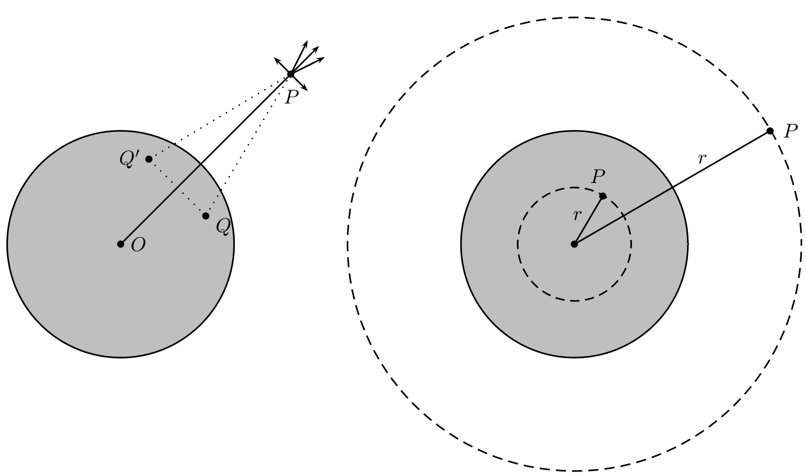

Figure 2: Il campo risultante è radiale. Superfici gaussiane

Considerato una qualunque massa elementare Q su una semisfera, la sua simmetria Q' rispetto ad OP produce dei vettori campo lungo un triangolo isoscele e pertanto le componenti tangenziali risultano uguali ed opposte, lasciando sopravvivere la sola componente radiale. Il campo complessivo E_g è allora diretto radialmente rispetto al centro della distribuzione. Essendo poi il vettore campo dipendente soltanto dalla distanza e dalla massa, tutti i punti di una sfera concentrica passante per P condividono gli stessi parametri e pertanto il campo E_g risulta costante su tale sfera. A questo punto, per determinare esattamente il modulo del campo ricorriamo al Teorema di Gauss scegliendo proprio una sfera S concentrica per P su cui valutare il flusso:

$$\phi_S = \frac{M}{g_0} \Leftrightarrow \int_S \vec{E}_g \cdot \vec{n}\ ds = \frac{M}{g_0} \Leftrightarrow \int_S E_g\ \vec{n} \cdot \vec{n}\ ds = \frac{M}{g_0}$$

$$\Leftrightarrow E 4\pi r^2 = 4\pi G M \Leftrightarrow E = G\frac{M}{r^2}.$$

Il campo prodotto coincide pertanto con quello generato da una massa puntiforme M posta nel centro del pianeta. Ma questi calcoli ci permettono di andare ben oltre. Ad esempio, al contrario delle singole sorgenti puntiformi, il campo potrebbe essere definito anche sulla superficie del pianeta o anche all'interno di esso. Naturalmente, è ancora vero che la singola massa in un punto del pianeta darebbe luogo ad una singolarità, ma per tutte le altre masse elementari il campo è perfettamente definito. Allora, visto che la risultante diventa un integrale, quest'ultimo è perfettamente calcolabile anche se in qualche punto la funzione integranda non è definita, per esempio perché presenta delle singolarità.

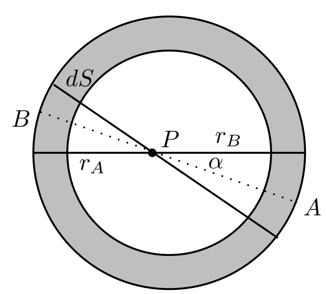

Figure 3: Il campo risultante all'interno di una sfera cava è nullo

Allora, per un punto interno possiamo ripetere pari pari quanto già fatto, con l'avvertenza che il flusso uscente questa volta dipende soltanto dalla massa interna. Detta allora ρ la densità di massa abbiamo

$$\phi_S = 4G\pi M^{INT} = 4G\pi\rho\frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow E_g 4\pi r^2 = 4G\pi\rho\frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow E_g = \frac{4}{3}G\pi r.$$

Pertanto il campo è ben definito anche all'interno del pianeta e varia linearmente con la distanza, essendo pari a zero nel centro e poi crescendo gradualmente fino alla superficie, dopo di che comincia a decrescere secondo l'inverso del quadrato della distanza.

Concludiamo questa breve escursione mostrando che all'interno di una sfera cava il campo è nullo! Risultato che poteva essere dedotto anche direttamente. In effetti, in relazione alla figura 3, la massa dello strato elementare ds della regione A è $m_A = \rho\pi(\tan\alpha\ r_A)^2 ds$ che produce il contributo al campo pari a $E_A = G\frac{m_A}{r_A^2} = G\pi\rho\tan^2\alpha$. Ma per lo strato simmetrico B abbiamo la massa $m_B = \rho\pi(\tan\alpha\ r_B)^2$ che produce il contributo $E_B = -G\frac{m_B}{r_B^2} = -G\pi\rho\tan^2\alpha$. I due contributi si elidono a vicenda e poiché lo stesso accade per tutte le altre regioni della sfera cava il campo risultante è alla fine nullo.

Discreto vs continuo

Questo esempio relativo ad una distribuzione continua sferica è discusso quasi sempre nei libri di testo e nelle attività didattiche. Alcuni aspetti però forse sfuggono altrettanto spesso. Intanto il fatto che è proprio il *modello di meccanica dei continui* a consentire la definizione del campo anche nei punti occupati dalle sorgenti del campo stesso. Cosa che non sarebbe possibile per distribuzioni discrete. Tuttavia, spesso tale modello continuo, in modo esplicito o implicito che sia, è ridotto ad un mero artificio matematico che permette di *fare i calcoli*. In effetti, si argomenta, la materia è *discreta* e il modello continuo non sarebbe altro che un'*approssimazione* di una distribuzione discreta con un numero *grandissimo* di sorgenti. Ma forse si tratta di qualcosa di più. Naturalmente possiamo anche accettare che massa o carica elettrica possano presentarsi come enti discreti in quanto multipli di particelle elementari ma questo non significa necessariamente che la struttura continua debba essere liquidata come *non reale*. In effetti, siamo giustamente inclini a bandire qualsiasi quantità *infinita* dalla fisica e in questa prospettiva dovremmo allora forse considerare il modello continuo come qualcosa di più strutturale nei fondamenti della realtà fisica. In quest'ottica i valori discreti di massa o carica sarebbero piuttosto il risultato di una distribuzione continua sottostante. *Continuo* e *discreto* potrebbero cioè coesistere piuttosto che escludersi l'un l'altro.

1 Sull'integrazione multipla

La giustificazione del Teorema di Gauss ci ha costretto a considerare integrali multipli ponendoci la questione di modificare l'ordine di integrazione. Non soltanto, anche considerare funzioni più *patologiche* del solito come la *delta di Dirac* che meglio andrebbe inquadrata come una *misura concentrata*. Questioni analoghe appaiono in molti altri contesti simili. Si consideri ad esempio il problema di determinare il campo elettrico generato da una piastra piana, indefinitamente estesa, di spessore d. Per ragioni di simmetria del tutto simili a quanto discusso per la sfera, si determina un campo perpendicolare alla piastra. Utilizzando il teorema di Gauss, scegliendo ad esempio un cilindro simmetrico con asse perpendicolare alla piastra, si trova che il campo elettrico cresce linearmente procedendo dal piano di simmetria della piastra fino ad assumere il valore costante $E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}$, dove ρ è la densità di carica di volume della piastra. Capita che gli studenti propongano (ed è un bene che sia così!) dei metodi alternativi. In questo caso immaginando la piastra come una *serie* di fogli piani sovrapposti che producano una sorta di piano finale in cui è concentrata tutta la carica con densità $\sigma = \rho d$. Naturalmente, con questa posizione, il calcolo fatto con l'ausilio del teorema di Gauss ci dice esattamente che nei punti esterni tutto accade come se tutta la carica fosse *concentrata* su un piano con densità $\sigma = \rho d$. Già, ma perché deve essere proprio $\sigma = \rho d$? Questa domanda è molto più sottile di quanto possa apparire a prima vista e pone la delicata questione di come relazionare densità che *vivono* su spazi di dimensione diversa, come ad esempio densità di superficie e di volume. Si possono in qualche modo ottenere una dall'altra? Un ragionamento euristico potrebbe portarci a identificare una superficie S con un piccolo volume di profilo S e spessore infinitesimo dz. Pensando la carica concentrata su S avremmo

$$\sigma S \approx q \approx \rho S dz \to \sigma \approx \rho dz.$$

Mentre ci chiediamo come *concentrare* una densità di volume su una superficie, ci potremmo anche eventualmente porre la questione su come *spalmare* una densità di superficie su di un volume. Visto che ci siamo potremo anche mettere in discussione che il volume di un cilindro circolare retto di raggio r e altezza h sia $V = \pi r^2 h$. Già, perché è valida questa formula? Magari potremo ricordarci del cosiddetto *Principio di Cavalieri* per il quale il volume si ottiene *affettando* il cilindro come se fosse una mortadella e poi sommando, ovvero integrando, tutte le fettine. Ad un esame più attento, questa procedura non è altro che un caso particolare di *Slicing*, una tecnica che si è rivelata fondamentale in tantissime questioni, anche tra le più avanzate, sia nella matematica teorica che applicata. In parole povere esso riguarda in qualche modo la fattorizzazione di misure. L'usuale misura (di Lebesgue) di volume, denotiamola con λ^3, si può ottenere come prodotto della misura 2-dimensionale λ^2 per la misura unidimensionale λ^1, ovvero $\lambda^3 = \lambda^2 \otimes \lambda^1$. Identificando una misura tramite integrazione sulle funzioni continue (a supporto compatto), vale a dire identificandole come *distribuzioni* (si veda [4] per una introduzione elementare e qualche dettaglio in più) la relazione di prodotto conduce alla formula di integrazione

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z) d\lambda^3 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y,z) d\lambda^2 \right) d\lambda^1.$$

Ora, il volume V di $A \subset \mathbb{R}^3$ si ottiene integrando la funzione caratteristica δ_A che vale uno nei punti di A e zero altrove. Si ottiene così la formula di Cavalieri

$$V = \int_{\mathbb{R}^3} \delta_A(x,y,z) d\lambda^3 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \delta_A(x,y,z) d\lambda^2 \right) d\lambda^1 = \int_{\mathbb{R}} S(A_z) dz$$

dove $S(A_z)$ è la superficie della sezione 2-dimensionale di A nella direzione z. La definizione di prodotto tra misure porta con sé la possibilità di scambiare l'ordine di integrazione (Teoremi di Fubini-Tonelli) e quindi considerare slicing in direzioni diverse. La formula di Cavalieri può essere generalizzata in molti contesti, ad esempio per contemplare il caso in cui le sezioni possano essere irregolari. Una grande generalità da questo punto di vista si ottiene sostituendo la superficie della sezione con la misura di Hausdorff 2-dimensionale $\mathcal{H}^2(A_z)$ (che coincide con l'usuale superficie per insiemi regolari). Comunque, nel caso di una densità di carica di volume costante come nella precedente piastra di spessore d, la formula di slicing produce

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x,y,z) d\lambda^3 = \int_0^d \left(\int_{\mathbb{R}^2} \rho \; d\lambda^2 \right) d\lambda^1 = \rho \int_0^d S(A_z) dz$$

con A il volume su cui è concentrata la carica. Se pensiamo ora la carica totale come concentrata su una superficie costante $S = S_z$ abbiamo

$$\sigma S = Q = \rho S d \Rightarrow \sigma = \rho d$$

come avevamo già intuito.

La procedura di costruzione di misure prodotto può venire utile per *spalmare* una densità di superficie σ su tutto un volume, ad esempio nel caso in cui avessimo cariche distribuite sia su superfici che su volumi, in modo da poter utilizzare soltanto l'integrazione di volume. In tal caso potremmo considerare una densità del tipo $\rho = \sigma\delta_S$, cosa che ci costringerebbe comunque a considerare densità non costanti.

Le funzioni densità andrebbero infatti meglio identificate con *misure assolutamente continue.*

Definizione 1 (Assoluta continuità)**.** *Date due misure μ e ν diremo che ν è assolutamente continua rispetto a μ se per ogni insieme misurabile A risulta*

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Ad esempio la misura *gaussiana* $\nu(A) := \int_A e^{-x^2}\ dx$ è assolutamente continua rispetto all'usuale misura 1-dimensionale di Lebesgue λ^1. In effetti l'integrale di una funzione positiva, nel nostro caso anche continua, si annulla solo se l'insieme su cui si integra è già di suo un insieme di misura nulla. Si dice che la funzione integrabile $f(x) = e^{-x^2}$ è la *densità* di ν rispetto a $\mu = \lambda^1$. Anzi, questo è l'unico modo in cui due misure possono essere assolutamente continue.

Teorema 2 (Radon-Nikodym)**.** *Se ν è assolutamente continua rispetto a μ allora esiste un'unica funzione positiva integrabile (rispetto a μ) tale che*

$$\nu(A) = \int_A f(x)\ d\mu(x).$$

Tale funzione si chiama anche derivata di Radon-Nikodym *di ν rispetto a μ e si denota con $f = \frac{d\nu}{d\mu}$.*

Riguardiamo allora la nostra formula di slicing

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x, y, z) d\lambda^3 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, y, z) d\lambda^2 \right) d\lambda^1 = \int_{\mathbb{R}} \sigma_z(\mathbb{R}^2) dz$$

dove abbiamo denotato con σ_z la misura corrispondente all'integrale 2-dimensionale $\int_{\mathbb{R}^2} \rho(x, y, z) d\lambda^2(x, y)$. Potremo allora pensare a queste σ_z come le densità di superficie rispetto agli slicing nella direzione z.

Indicando con $\rho\lambda^3$ la misura assolutamente continua di densità ρ, la formula di integrazione appena scritta esprime nient'altro che una fattorizzazione $\rho\lambda^3 = \sigma_z \otimes dz$. Quest'ultimo risultato è anch'esso valido in grande generalità per misure di volume qualsiasi (con densità *irregolari* o anche per misure non necessariamente assolutamente continue) conducendo al cosiddetto *Teorema di Disintegrazione*, anch'esso fondamentale in numerose questioni sia teoriche che applicate. Se γ è una misura di volume allora si può *decomporre o disintegrare* il volume rispetto alla direzione z, ovvero $\gamma = \sigma_z \otimes dz$ per una famiglia di misure σ_z 2-dimensionali (talvolta dette *misure di Young*).

2 Equazioni di Maxwell e relatività galileiana

Come già osservato in [6], il Teorema di Gauss si presta in modo più immediato rispetto all'approccio differenziale allo studio dell'invarianza delle leggi fisiche. In effetti, le usuali trasformazioni galileiane lasciano invariate le distanze e le accelerazioni. La massa inerziale, valutata per esempio tramite l'applicazione di forze elastiche, resta allora anch'essa invariante per trasformazioni galileiane. Pertanto, forze come quella gravitazionale, dipendenti da distanza e massa, risultano automaticamente invarianti anch'esse. Segue immediatamente l'invarianza delle leggi della meccanica classica rispetto alle trasformazioni galileiane, teorema di Gauss compreso. Il quadro cambia drasticamente nel considerare l'elettromagnetismo. In effetti, le trasformazioni galileiane producono le seguenti leggi di trasformazione per i campi elettrico e magnetico (per snellire la notazione omettiamo in questa sezione il *cappello* delle grandezze vettoriali)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}' &= \mathbb{E} + v \times \mathbb{B} \\ \mathbb{B}' &= \mathbb{B}. \end{aligned} \tag{4}$$

Tale asimmetria (perché il campo magnetico non si modifica?) dava molto da pensare ad Einstein. Evidentemente le trasformazioni galileiane devono in qualche modo essere riformulate. Anche perché occorreva fare i conti col problema aggiuntivo che le equazioni di Maxwell non sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo della cinematica classica. Per illustrare la situazione consideriamo ad esempio il caso del flusso del campo elettrico (attraverso una superficie chiusa S) $\Phi_{\mathbb{E}}$ nello spazio vuoto.

Utilizzando il teorema di Gauss la prima equazione di Maxwell nel vuoto è $\Phi_{\mathbb{E}} = 0$. In un sistema di riferimento in moto rettilineo uniforme con velocità v, nel caso delle trasformazioni galileiane i campi si modificano in accordo con la (4). Passando ai flussi si ottiene

$$\Phi_{\mathbb{E}'} = \Phi_{\mathbb{E}} + \Phi_{v \times \mathbb{B}}.$$

Per il principio di relatività galileiana, ovvero che le leggi della fisica devono essere le stesse in tutti e due i sistemi di riferimento, dev'essere allora $\Phi_{v \times \mathbb{B}} = 0$. Esaminiamo più da vicino quest'ultima relazione.

Se S è una superficie chiusa, abbiamo

$$0 = \Phi_{v \times \mathbb{B}} = \int_{\partial S} (v \times \mathbb{B}) \cdot n \; ds$$

dove n denota il versore normale alla superficie. Consideriamo a questo punto il campo magnetico $\mathbb{B}$ generato da una corrente rettilinea e come superficie S quella di un cilindro coassiale alla corrente. Detto k il versore dell'asse del cilindro, e τ il versore tangente sulla superficie laterale S_l, per una velocità della forma $v = |v|k$, essendo il campo magnetico della forma $\mathbb{B} = |\mathbb{B}|\tau$, il flusso vale

$$0 = \Phi_{v \times \mathbb{B}} = |v| \int_{\partial S} (k \times \mathbb{B}) \cdot n \; ds = |v||\mathbb{B}| \int_{S_l} (k \times \tau) \cdot n \; ds = |v||\mathbb{B}| A(S_l) \neq 0.$$

Pertanto, muovendosi lungo la direzione della corrente il flusso del campo elettrico non sarebbe più nullo. Questo significa che le equazioni di Maxwell non sono in generale invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo. Utilizzando invece le cosiddette trasformazioni di Lorentz la trasformazione dei campi elettrico e magnetico assume la forma simmetrica (si veda [2, Th. 3.3])

$$\begin{aligned} \mathbb{E}' &= \gamma(\mathbb{E} + v \times \mathbb{B}) + \tfrac{(1-\gamma)(\mathbb{E} \cdot v)}{v \cdot v} v \\ \mathbb{B}' &= \gamma(\mathbb{B} - v \times \mathbb{E}) + \tfrac{(1-\gamma)(\mathbb{B} \cdot v)}{v \cdot v} v \end{aligned}$$

con $\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ il fattore relativistico. Questa volta le equazioni di Maxwell restano invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Anzi, il bello è che assumendo il principio di relatività, con le conseguenti trasformazioni di Lorentz, basterebbero solo due delle equazioni di Maxwell [2, Th. 3.] per descrivere completamente l'elettromagnetismo. Per ulteriori informazioni e approfondimenti su questi temi rimandiamo il lettore a [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

References

[1] F. Borghero, F. Demontis, Relatività per principianti, Fondamenti di Relatività Ristretta e Generale con breve Compendio di Fisica Classica, (UNICApress) 2021.

[2] R. Cooke, It's about Time, AMS, 2017.

[3] A. Arrigo, L. Lussardi, Un'Introduzione alla Teoria della Relatività, Aracne, 2008.

[4] L. Granieri, Sostituisci e parti, Archimede N. **4**, 2018.

[5] L. Granieri (a cura di), Mathematical Pride 1, LaDottta editore, 2020.

[6] L. Granieri, Relativamente ristretta, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, VOL.45 B N.3, Giugno 2022.

[7] L. Granieri, Affinità relative, Archimede N.**1**, 2022.