ESSERE O NON ESSERE, QUESTO È IL PROBLEMA!

LUCA GRANIERI

Gli orsi polari esistono. Forse ancora per poco ma comunque esistono. Gli unicorni, a quanto pare, non esistono. Alcuni filosofi potranno anche dissentire, ma in linea di massima, almeno su cose concrete come queste, possiamo tutti essere più o meno d'accordo. Ma quando rivolgiamo l'attenzione a cose più astratte la faccenda si complica alquanto.

Dio esiste o non esiste? Su quale possibilità scommettereste, ci chiederebbe B. Pascal? ([7]). D'altra parte, Dio stesso, rispondendo a Mosé dal roveto ardente (Esodo 3, 13-14) in fondo ci tiene proprio a puntualizzare in qualche modo la propria esistenza. Del resto, anche la questione metafisica per eccellenza: *Perché esiste qualcosa anziché il nulla?* costituisce alla fine un problema di *esistenza*. Non bisogna pensare però che le questioni di esistenza siano interesse esclusivo di teologi e/o filosofi. Anzi, man mano che l'impresa scientifica avanza, e divenendo più astratta, tali questioni acquistano maggiore rilevanza. Come facciamo infatti a sapere che ad esempio quark e buchi neri esistono?

Rivolgendoci alla scienza, non possiamo non imbatterci nella matematica che tratta di quanto più astratto non si può. La questione obbligata è allora: *In che senso gli oggetti matematici esistono?* Sebbene se ne discuta da millenni, la questione è tutt'altro che archiviata. Se vogliamo, si potrebbe riformulare il tutto con la domanda: *La matematica è scoperta o invenzione?*

La scoperta rimanda ad una tradizione se vogliamo platonica. Gli oggetti matematici esisterebbero in un mondo a sé, magari accessibile con il solo pensiero. Compito del matematico è penetrare in questo mondo per *scoprirlo*. In questo senso, il matematico scopre un teorema in modo più o meno analogo a come Colombo scoprì l'America.

L'invenzione rimanda invece ad una tradizione se vogliamo aristotelica, secondo la quale gli oggetti matematici sarebbero in qualche modo costruiti artificialmente per astrazioni successive, magari partendo da procedure concrete.

Forse, la matematica potrebbe essere entrambe le cose, un po' *inventata* ed un altro po' *scoperta*. Su queste questioni si veda ad esempio [9, 3, 8, 12].

Comunque stiano le cose, come fanno i matematici a sapere che qualcosa esiste davvero? In effetti, non bisogna pensare che le questioni di *esistenza* siano un lusso o una sofisticheria inutile. Si consideri infatti il seguente

(Paradosso di Perron) Il più grande numero intero è 1.

Dimostrazione. Sia N il più grande numero intero. Poiché 1 è un numero intero, allora $1 \leq N$. D'altra parte, se fosse $1 < N$, moltiplicando per N si otterrebbe $N < N^2$, che contraddice il fatto che N è il più grande tra tutti i numeri. Allora dev'essere $N = 1$. □

Naturalmente, i problemi nel ragionamento precedente sono proprio nella premessa, nel fatto cioè che il numero più grande tra tutti i numeri esista davvero.

Pertanto, chiarire qualche idea sul problema dell'esistenza è piuttosto importante.

1. Costruttivo o non-costruttivo?

Un primo modo, più o meno soddisfacente, per stabilire l'esistenza di un oggetto è quello di *esibirlo*, *costruirlo*. Come ci ha insegnato Euclide (si spera anche nelle nostre scuole), in questo senso, il triangolo equilatero esiste perché lo possiamo costruire, magari utilizzando riga e compasso. Da questo punto di vista (costruttivismo) lo Yeti esisterebbe se fossimo in grado di trovarlo, fotografarlo e magari toccarlo con mano.

Ma lo stesso Euclide contempla un altro modo, forse più *esoterico*, per stabilire l'esistenza di qualcosa. Ad esempio quando afferma che *Esistono infiniti numeri primi* (si veda [6, 2, 1]). Tali numeri, infiniti, esistono non perché si possa dire costruttivamente chi siano, ma perché Euclide ci ha mostrato che non può che essere così, poiché altrimenti la matematica sarebbe contraddittoria. E in una teoria contraddittoria, per la legge di Duns Scoto (vedi [6, 4, 10, 11]), è vero tutto e il contrario di tutto. Allora, in questo senso, lo Yeti esisterebbe non perché lo abbiamo catturato, ma perché altrimenti il mondo non sarebbe quello che è e due più due non farebbe quattro. Può sembrare strano, ma molti risultati importanti della scienza si basano proprio su questo modo di pensare, spesso e volentieri non-costruttivo.

Un caso paradigmatico riguarda il cosiddetto *Teorema di finitezza di Hilbert*. Hilbert inviò il suo lavoro ad una delle più importanti riviste scientifiche di matematica, i Mathematische Annalen. Paul Gordan, un esperto del settore per i Mathematische Annalen, non voleva accettare per la pubblicazione il lavoro di Hilbert. Troppo astratto. *Questa è Teologia, non Matematica!* fu il suo commento.

Ma i matematici riconobbero ben presto l'importanza e l'utilità del metodo di Hilbert. Lo stesso Gordan dovette poi ammettere che *anche la teologia ha i suoi pregi.*

Tuttavia, in matematica non sempre è facile (o possibile) distinguere ciò che è costruttivo da quello che non lo è. L'argomento di Euclide sui numeri primi può ad esempio essere considerato *non costruttivo* in quanto si limita a dire che data una qualunque lista di numeri primi, esiste un non meglio specificato numero primo che non si trova nella lista di partenza. Se ad esempio in questa lista ci sono diciamo i numeri primi p_1, p_2, p_3, p_4, allora Euclide considera il nuovo numero

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 + 1$$

ottenuto moltiplicando i numeri primi dati tra loro e poi aggiungendo uno. Questo nuovo numero p è senz'altro più grande di tutti i primi di partenza. Ora, se p è primo allora abbiamo trovato un primo (lo stesso p) che non era nella lista. Se invece p non è primo, poiché ogni numero è prodotto di numeri primi, allora p è divisibile per qualche numero primo. Ma non essendo divisibile per nessun primo della lista data, essendo il resto della divisione sempre pari ad uno, allora ci dev'essere comunque qualche altro primo che non si trova nella lista data. Ingegnoso, senza dubbio.

Tuttavia, l'argomento di Euclide pone un limite superiore entro cui è possibile trovare questi nuovi primi che ampliano la lista di partenza. Ad esempio, dati i numeri primi $2, 3, 5, 7$, l'argomento di Euclide prova che esiste almeno un altro primo più piccolo di $211 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$. E questo primo può essere determinato con un metodo costruttivo, ad esempio con il crivello di Eratostene. Quest'ultimo consiste nel depennare dalla lista di numeri interessata, nel nostro esempio quella dei numeri fino a 211, tutti i multipli di due, poi tutti i multipli di tre, poi tutti i multipli di cinque, e così via. I numeri che sopravvivono a questa operazione sono solo e soltanto i numeri primi di quella lista. In questo senso l'argomento euclideo può essere considerato *costruttivo*. In ogni caso, il fatto che un metodo costruttivo, come ad esempio il crivello di Eratostene, sia in grado in linea di principio di trovare sempre nuovi primi è alla fine garantito da un argomento *non costruttivo*, ovvero dal fatto di sapere che la lista dei numeri primi non si esaurisce mai. Pertanto, il crivello di Eratostene ci dovrà indicare un primo minore di 211 diverso da $2, 3, 5, 7$. Altrimenti, senza questa garanzia, avremmo potuto imbatterci nella situazione di trascorrere molto tempo in calcoli senza alla fine trovare niente di nuovo.

2. Per assurdo

Il tipico modo per ottenere risultati non-costruttivi è tramite la cosiddetta dimostrazione per assurdo, che tra l'altro abbiamo utilizzato nel mostrare il paradosso di Perron.

Nei giochi a quiz ogni domanda è corredata da una lista di possibili risposte, composta ad esempio diciamo da quattro alternative. Ovviamente, se il concorrente conosce la risposta giusta dà questa risposta e tutto finisce lì. Questo è un metodo diretto per risolvere la questione. Ma c'è anche un altro modo, più indiretto, per rispondere. Sherlock Holmes, il famoso detective, in una sua avventura affermò: *quando si sia escluso l'impossibile, ciò che resta, per quanto improbabile, è pur* *sempre la verità*. Mi pare di aver sentito anche il vulcaniano Spock affermare qualcosa del genere in un episodio della storica serie televisiva Star Trek. E se lo dice Spock c'è da fidarsi!

D'altronde, il ragionamento di Holmes è, o almeno dovrebbe essere, limpido: è un ragionamento per esclusione. Io non conosco la risposta esatta. Ma so che *esiste* una sola risposta corretta. Allora, se riesco ad escludere tre risposte su quattro perché non possono essere la risposta giusta, quella che resta, per quanto bizzarra possa essere, deve essere la risposta giusta. E il gioco è fatto. Dovrebbe essere chiaro anche perché si tratta di un metodo indiretto. Diamo la risposta giusta non perché conosciamo la risposta esatta, ma soltanto perché le altre risposte non possono esserlo. Del resto, questo succede spesso quando ad esempio andiamo dal medico. Dopo il colloquio e la visita, anche se non ce lo dice, spesso il medico continua a non sapere da quale malattia siamo affetti. Allora, in base ai sintomi, dentro di sé può pensare qualcosa del genere: *Ok, quindi può essere una infezione di questo batterio, o di un certo virus, che potrebbe passare da sola tra qualche giorno, o la malattia cavolina (una malattia che mi sto inventando al momento e che si cura mangiando cavolo per un mese). Va bene, allora gli prescrivo un antibiotico. Intanto, l'effetto placebo qualcosina può sempre fare. Comunque sia, alla fine della cura, se il paziente è guarito tanto di guadagnato. Se non è guarito gli faccio mangiare cavoli a merenda. Se poi i sintomi persistono mi rivolgo allora all'antivirale. Se poi il paziente muore allora cosa volete da me? Sono un povero dottore non un mago!*

Naturalmente, le cose nella realtà sono ancora più complicate. Chi ha visto dottor House in TV può intuire di cosa si tratti. Il problema è che in medicina o nelle indagini di polizia, le alternative possibili possono essere anche molte di più di tre o quattro e potrebbero riguardare anche a volte cose (ad esempio malattie) ancora da scoprire. Anche chi ha figli piccoli spesso deve ragionare in questo modo. Se il bimbo piange avrà fame. Se non ha fame allora potrebbe avere il pannolino sporco. Altrimenti avrà sonno. E se continua a piangere inconsolabile allora forse non si sente bene ed è meglio consultare il pediatra.

Ora, la dimostrazione per assurdo è un caso semplificato rispetto al caso dei quiz televisivi. Si tratta del caso in cui ci sono soltanto due alternative tra le quali scegliere. Un enunciato può essere vero o falso. Se escludiamo che sia falso, allora deve essere vero. Se invece escludiamo che sia vero, allora deve essere falso. Tutto qui. Si tratta di un metodo indiretto perché non proviamo ad esempio che una cosa è vera, ma soltanto che non può essere falsa. Naturalmente, in quanto detto fino ad ora c'è qualcosa di implicito che vale la pena mettere in evidenza. Il primo assunto implicito, come abbiamo già detto, è il cosiddetto *principio del terzo escluso*. Cioè stiamo ammettendo che per un enunciato esistono soltanto due possibilità, vero o falso. Nessuna terza opzione. Se vogliamo, questo corrisponde ad una logica a due soli valori di verità. L'altro assunto implicito è il cosiddetto *principio di non contraddizione*, per il quale niente può essere contemporaneamente vero e falso. Questo corrisponde al desiderio di evitare i paradossi, le contraddizioni, in accordo con la legge di Duns Scoto.

Naturalmente, i costruttivisti non vedono di buon occhio il procedimento di riduzione all'assurdo, anche perché esistono le cosiddette proposizioni *indecidibili* per le quali non è possibile stabilire se siano vere o false ([4, 10, 11, 12]).

3. Astratto o concreto?

Esistere in senso costruttivista può senz'altro apparire un modo più concreto di considerare le cose rispetto ad un metodo indiretto. Qualcuno dalla mentalità pratica potrebbe infatti chiedersi: *ma a cosa può mai servire sapere che qualcosa esiste così in astratto?* Paradossalmente, può capitare che l'esistenza in astratto possa produrre quella in concreto. Per illustrare la questione ricorriamo ad un esempio.

In molte circostanze, anche pratiche, si perviene al problema di determinare il massimo di una funzione matematica. Si tratta ad esempio di un tipico problema che in certe circostanze incontrano gli studenti durante gli ultimi anni di scuola superiore o nei primi di università. Ora, tornando al nostro caro Sherlock Holmes, facciamo finta che tale massimo sia l'assassino in uno dei suoi casi polizieschi. Ovviamente, se l'assassino non esiste, ad esempio perché la presunta vittima è morta di morte naturale, allora non ha senso cercarlo. Sarebbe una fatica sprecata. Ha senso allora sapere che l'assassino, anche se in astratto, esiste per poi tentare di acciuffarlo. Altrimenti, quand'anche si avesse una lista di persone sospette, le indagini potrebbero non portare a nulla, o peggio a mettere in carcere un innocente. Allora, da questo punto di vista, se l'autopsia riesce a determinare con certezza le cause della morte, abbiamo un vero e proprio teorema di esistenza (o di non-esistenza). Per il problema del massimo, un tale risultato potrebbe essere costituito dal Teorema di Weierstrass ([5]), tipicamente non-costruttivo, per il quale, sotto certe condizioni, un tale massimo esiste, anche se non sappiamo chi sia.

In molte situazioni, è poi relativamente facile stilare la lista dei sospettati. Si tratta dei cosiddetti *punti critici o stazionari* ([5]). Pertanto, l'assassino deve trovarsi in questa lista. Magari per Sherlock Holmes le cose potrebbero essere più complicate perché ad esempio i sospettati potrebbero mentire. Ma una funzione matematica non mente. Basta controllare i punti di tale lista uno per uno (se naturalmente non sono troppi) e il gioco è fatto. L'assassino non ha scampo e in questo modo lo mettiamo con le spalle al muro.

Ma questa strategia funziona solo perché preventivamente avevamo dimostrato in astratto che l'assassino esisteva.

Pertanto, anche l'astratto può essere più concreto di quanto non si pensi.

Riferimenti bibliografici

[1] M. Aigner, G. Ziegler, Proofs from THE BOOK, Springer, 2006.
[2] R. Courant, H. Robbins, Che Cos'è la Matematica?, Bollati Boringhieri, 1971.
[3] E. Giusti, Ipotesi sulla Natura degli Oggetti Matematici, Boringhieri, 1999.
[4] L. Granieri, Paradossi, Biblioteca dei 500, Ulisse, Sissa, Trieste, 2004. http://ulisse.sissa.it
[5] L. Granieri, Ottimo in Matematica. Quattro studi progressivi, in preparazione.
[6] L. Granieri, Elementi di Matematica, Matematica Elementare pre-Universitaria, LaDotta, 2013.
[7] L. Granieri, Dio c'é e la scienza, Edizioni LaDotta, 2015.
[8] R. Hersch, Cos'è davvero la matematica, Baldini & Castoldi, 2001.
[9] M. Livio, Dio è un matematico, RCS Libri, 2009.
[10] P. Odifreddi, C'era una volta un paradosso, Einaudi, 2001.
[11] P. Odifreddi, Le menzogne di Ulisse, Longanesi, 2004.
[12] J. D. Stein, La Matematica non è un'opinione, Newton Compton, 2010.

Luca Granieri
granieriluca@libero.it