ERRATA CORRIGE (I EDIZIONE)

L. GRANIERI

(1) Cap. 1 pag. 4: Per una approfondita storia e analisi della nascita del pensiero formale segnaliamo il testo: L. Borzacchini, Il computer di Platone, editore Dedalo.

(2) Cap. 1, sez. 1.4 Principio 1

$$\text{(proprietà distributiva)} \quad a(b+c) = ab + ac$$

(3) Cap.1 pag. 16: La proprietà equivalente all'implicazione è

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

(4) Cap.1 pag 20 rigo 27: Se escludiamo che sia falso, allora deve essere vero. Se invece escludiamo che sia vero, allora deve essere falso.

(5) Cap. 1 Sez. 1.4.2: A proposito dell'implicazione può sembrare strano che risultino vere implicazioni a partire da una ipotesi falsa. Ma già Aristotele osservava che se fosse impossibile dedurre il vero dal falso, allora $A \Rightarrow B$ sarebbe in realtà equivalente a $B \Rightarrow A$, che non sarebbe una buona cosa. In effetti, se la tavola di verità dell'implicazione fosse

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Allora la tavola di verità di $B \Rightarrow A$ sarebbe

A	B	$B \Rightarrow A$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

e quindi varrebbe sempre la doppia implicazione $A \Leftrightarrow B$.

(6) Teorema 9 e Teorema 10, ovviamente, per salvaguardare l'unicità della decomposizione, si conviene di non considerare l'unità come fattore primo. Pertanto, tali teoremi valgono per numeri interi maggiori di uno.

(7) Sez. 2.5, Osservazione 12: In matematica non sempre è facile (o possibile) distinguere ciò che è costruttivo da quello che non lo

Date: Marzo 2020.

è. L'argomento di Euclide può essere considerato *non costruttivo* in quanto si limita a dire che data una qualunque lista di primi, esiste un non meglio specificato numero primo non appartenente alla lista. Tuttavia, l'argomento di Euclide pone un limite superiore entro cui è possibile trovare questi nuovi primi. Ad esempio, dati i primi $2, 3, 5, 7$, l'argomento di Euclide prova che esiste almeno un altro primo più piccolo di $211 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$. E questo primo può essere determinato con un metodo costruttivo, ad esempio con il crivello di Eratostene. In questo senso l'argomento euclideo può essere considerato *costruttivo*. In ogni caso, il fatto che un metodo costruttivo come ad esempio il crivello di Eratostene debba trovare sempre nuovi primi è alla fine garantito da un argomento *non costruttivo*, ovvero quello euclideo.

(8) sez.2.5 pag.33: Congettura di Goldbach: ogni numero pari maggiore di due è somma di due primi.

(9) Capitolo 4, pag. 49. I numeri pari non sono limitati superiormente in $\mathbb{N}$. Ovvero non ci sono maggioranti che stiano in $\mathbb{N}$.

Il fatto che $\mathbb{N}$ non sia limitato superiormente in $\mathbb{R}$ discende invece dalla proprietà archimedea, anch'essa una conseguenza dell'assioma di Continuità.

Teorema 1 (Proprietà archimedea)**.** *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a > 0$. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $b < na$.*

Proof. Se $b \leq 0$ basta prendere $n = 1$. Per $b > 0$, supponiamo per assurdo che sia $na \leq b$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Considerato $A = \{na \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, si tratta di un insieme non vuoto avente b come maggiorante. Allora, per completezza esiste $c = \sup A$. Ora, per un qualsiasi $m \in \mathbb{N}$ risulta $(m+1)a \in A$. Pertanto $ma + a \leq c$, da cui $ma \leq c - a$. Ma m può essere scelto arbitrariamente e ciò significa che $c - a$ è un maggiorante di A. Allora, poiché c è per definizione il più piccolo tra i maggioranti, otteniamo la contraddizione $c \leq c - a < c$. $\square$

Per $a = 1$ si ottiene il fatto che $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente in $\mathbb{R}$.

(10) Sezione 4.5 pag. 49 primo rigo: $1^2 = 1, 2^2 = 4 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2$.

(11) Sezione 4.5. A proposito di numeri reali, non si vuole affermare che per tutti i numeri irrazionali non si potrebbe in alcun modo *prevederne* lo sviluppo decimale. Magari anche per $\sqrt{2}$ o per π non è escluso che si trovino metodi più diretti per calcolarne le cifre decimali. Dunque, per particolari numeri irrazionali può anche darsi qualche tipo di regolarità nella loro espansione decimale. Il fatto è che per il generico numero irrazionale non c'è una regolarità prevedibile a priori.

(12) Sez. 6.3: Il lemma 37 nasconde sotto sotto un argomento di *continuità*. Una dimostrazione alternativa potrebbe seguire le linee seguenti. Utilizzando il Teorema di Ruffini, che utilizza soltanto il teorema di divisione, potendosi quest'ultimo verificare per induzione, si può dimostrare, per induzione, il corollario 43, in cui ovviamente si considerano polinomi non identicamente nulli. Infatti, per $n = 1$, l'unica radice di $P(x) = a_0 + a_1x$ è $x = -\frac{a_0}{a_1}$. Detto ora P_{n+1} un polinomio di grado $n + 1$, sia a una sua radice. Per il Teorema di Ruffini possiamo scrivere $P_{n+1}(x) = (x - a) \cdot P_n(x)$. Ma per ipotesi induttiva $P_n(x)$ ha al più n radici, da cui segue che P_{n+1} ha al più $n + 1$-radici. A questo punto, segue quindi facilmente il Lemma 37. Infatti, per assurdo, sia a_i il primo coefficiente non nullo di $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Allora possiamo scrivere

$$P(x) = x^i \left(a_i + a_{i+1}x + \cdots + a_nx^{n-i}\right).$$

Ma il polinomio tra parentesi sarebbe un polinomio non nullo, giacché $a_i \neq 0$, che si annullerebbe infinite volte, contraddicendo il corollario 43.

(13) Teorema 39. Per un approccio algebrico alla divisione tra polinomi si veda: C. Maturo, Il principio di identità dei polinomi e la divisione euclidea, Archimede **3** (2014), 145-148. Pag. 81, dimostrazione dell'unicità nel Teorema 39: per il Corollario 38.

(14) Teorema 45. Naturalmente, il polinomio $P(x)$ è a coefficienti interi.

(15) Cap 6. Esempio 50:

$$\frac{2x}{x+1} + 3 = \frac{5x}{x-1}$$

$$\frac{2x}{x+1} + 3 - \frac{5x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x-1) + 3(x-1)(x+1) - 5x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = 0$$

Il numeratore si annulla per

$$2x^2 - 2x + 3x^2 - 3 - 5x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow -7x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{7}.$$

Pertanto, essendo $x \neq \pm 1$ abbiamo $S = \{-\frac{3}{7}\}$.

(16) Cap. 8 Dicendo che piano, punti e rette sono enti primitivi, nonché il concetto di appartenenza o incidenza stiamo ovviamente mettendoci all'interno della teoria degli insiemi. Più precisamente si potrebbe enunciare il tutto esplicitamente con un postulato:

Postulato insiemistico: Esiste un insieme, detto piano, i cui elementi sono detti punti. Ogni retta è un sottoinsieme del piano.

L'Assioma 1 potrebbe essere sostituito da un postulato più *economico*

Postulato di esistenza: Esistono almeno tre punti distinti che non stanno sulla stessa retta.

In effetti, combinando questo assioma con l'Assioma 2 e l'Assioma 3 si ottengono infinite rette distinte (e quindi infiniti punti distinti)

Per quanto riguarda l'Assioma 3 l'espressione *retta reale* è un po' sbrigativa. Precisiamo che con questo intendiamo che la distanza tra due punti è una quantità (positiva) *intrinseca* dipendente unicamente dai due punti e non dal particolare sistema di coordinate (ovvero dalla corrispondenza biunivoca con i numeri reali) sulla retta. Precisazioni analoghe andrebbero fatte per la definizione di segmenti, semirette e ordine tra i punti della retta. Per un'esposizione più dettagliata rimandiamo il lettore all'esauriente testo [**?**]

Assioma 4: I due semipiani individuati dall'assioma si dicono anche semipiani *aperti*. Si definiscono invece semipiani chiusi gli insiemi: $\overline{\mathcal{P}_1} := \mathcal{P}_1 \cup r$, $\overline{\mathcal{P}_2} := \mathcal{P}_2 \cup r$ che hanno in comune la sola retta r.

Assioma 5: Anche in questo caso facciamo notare esplicitamente che la misura angolare postulata è un oggetto intrinseco determinato unicamente dall'angolo e non dalla particolare corrispondenza biunivoca. Nel considerare una misura angolare a valori in $[0, P]$ stiamo naturalmente tacitamente identificando l'angolo piatto con l'intero semipiano, anche se a rigore in tal caso l'inviluppo convesso corrispondente è ridotto ad una retta. L'additività nell'assioma 5 si riferisce al fatto che A si trova nella regione angolare determinata da $\widehat{A'OB}$. Per definire in modo più appropriato la nozione di *regione angolare* di un angolo $\widehat{AOB}$ (diverso da quello nullo e da quello piatto) conviene definirla dapprima come l'insieme dei punti che stanno dalla stessa parte di B rispetto ad OA e dalla stessa parte di A rispetto ad OB. L'insieme che così si determina è un insieme convesso dato dall'intersezione di due semipiani. Una volta che si introduce l'assioma 8 di unicità delle parallele, tale nozione coincide con quella di *inviluppo convesso dei lati*. Le proprietà di additività e di monotonia potrebbero anche essere omesse e ricavate con un po' di fatica dalla nozione di misura angolare. Qualche discussione meriterebbero anche le altre nozioni che riguardano gli angoli, come ad esempio quella di bisettrice, per verificare che non dipendono dalla scelta della misura angolare. Per un'esposizione dettagliata si veda [**?**].

Assioma 6: Si tratta dell'immediata conseguenza del fatto che la misura angolare ha valori in $[0, P]$ ed è una funzione bigettiva. Tuttavia è bene rimarcare questo fatto anche per metterlo in relazione al postulato di Euclide: *Tutti gli angoli retti sono uguali.*

(17) Cap. 8, Def. 64: Dati N punti del piano, il fatto di essere tre a tre non allineati non garantisce che il poligono convesso generato abbia N lati. In genere ne potrà avere di meno. Il fatto è che qualcuno degli N punti di partenza, ma non tutti, può essere *interno* al poligono. Diamo allora la seguente

Definizione 2. *Un punto $P \in \mathcal{F}$ si dice interno alla figura $\mathcal{F}$ se esiste un cerchio di centro P tutto contenuto in $\mathcal{F}$. Si dice invece che $P \in \mathcal{F}$ è un punto di frontiera se ogni cerchio di centro P interseca sia $\mathcal{F}$ che il suo complementare.*

Osserviamo poi, lo si può verificare quale utile esercizio, che l'operazione concernente l'inviluppo convesso è monotona (per inclusione):

$$A \subset B \Rightarrow co(A) \subset co(B)$$

da cui segue immediatamente che $co(A)$ è il più piccolo (per inclusione) insieme convesso che contiene A. Infatti, se $\mathcal{C}$ è un ulteriore insieme convesso abbiamo

$$A \subset \mathcal{C} \Rightarrow co(A) \subset co(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$$

essendo $\mathcal{C}$ già convesso di suo. Sia ora $A = \{P_1, P_2, \cdots, P_N\}$. Sia $\mathcal{P} := co(A)$ il poligono convesso generato dagli N punti di A. Allora gli N punti di A non sono tutti interni al poligono $\mathcal{P}$. Altrimenti $\mathcal{P}$ non sarebbe il più piccolo convesso contenente A. Dunque possiamo chiamare vertici del poligono $\mathcal{P}$ i punti P_i che risultano essere di frontiera. Dato ora un segmento congiungente due vertici, il segmento è esso stesso fatto tutto da punti di frontiera oppure è interno al poligono (salvo per gli estremi). Infatti, se il segmento ha un punto interno, allora, considerando l'inviluppo convesso, esso sarebbe la diagonale di un quadrilatero tutto contenuto in $\mathcal{P}$. I segmenti che risultano di frontiera si dicono lati del poligono e lo stesso giace tutto da una parte rispetto a ciascun lato. Altrimenti, il lato sarebbe la diagonale di un quadrilatero tutto contenuto nel poligono, e quindi non sarebbe più fatto di punti di frontiera. Verifichiamo infine che il numero di lati è esattamente uguale a quello dei vertici. Dato un vertice, osserviamo dapprima che è sempre possibile trovare una retta passante per il vertice di modo che il poligono si trovi tutto in uno stesso semipiano generato dalla retta stessa. Se così non fosse, non è difficile convincersi che allora il vertice sarebbe un punto interno e non di frontiera. Ciò detto, considerata una misura angolare di centro il vertice, tra i segmenti congiungenti il vertice in questione e gli altri vertici del poligono possiamo trovare quelli che formano un angolo minimo ed uno massimo. Questi segmenti sono due lati del poligono. Ad esempio, considerato il segmento che realizza l'angolo minimo, tutti i vertici si trovano in uno stesso semipiano rispetto a tale segmento. Per le proprietà dell'inviluppo convesso, segue che l'intero poligono si trova in quel semipiano e quindi il segmento in considerazione è di frontiera. Non è poi difficile verificare che da ogni vertice non possono uscire più di due lati. Infine, essendo i vertici a tre a tre non allineati, segue che il numero dei lati è pari a quello dei vertici.

(18) Sez. 8.1: Gli angoli alterni esterni sono soltanto quelli corrispondenti alle coppie: 1-8 e 2-7.

(19) Sez. 8.2 Teorema 75. secondo rigo della dimostrazione: segue che $\hat{A} = \widehat{ACD}, \hat{B} = \widehat{BCE}$.

La figura da considerare nella dimostrazione è allora la seguente:

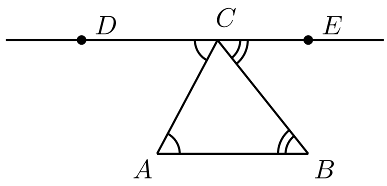

Figure 1. somma degli angoli interni di un triangolo

(20) Pag. 137 in relazione alla figura 8.17. Sul lato CD, innalziamo le perpendicolari ottenendo i lati AC e BD.

(21) Pag. 135 Rette tagliate da una trasversale. Ovviamente, per individuare precisamente gli angoli interni ed esterni bisogna far riferimento ai semipiani individuati dalle rette r, s, t.

(22) Teorema 82, In relazione alla figura 8.25, semplici variazioni degli argomenti della dimostrazione sono necessarie se $CD \cap AB = B$ oppure se $CD \cap AB \notin AB$.

(23) Sez. 8.4. Vale anche l'enunciato inverso del Teorema di Talete (di cui l'esercizio 100 è un esempio). Ovvero, in relazione alla figura **??**

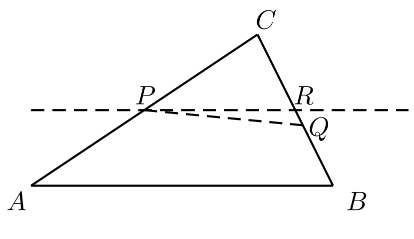

Figure 2. Teorema di Talete inverso

$$\frac{CP}{AP} = \frac{CQ}{BQ} \Rightarrow PQ \| AB.$$

Proof. La parallela per P ad AB incontra il lato CB in un punto R. Per il Teorema di Talete abbiamo $\frac{CP}{AP} = \frac{CR}{RB}$. Sfruttando l'ipotesi si ottiene $\frac{CQ}{BQ} = \frac{CR}{RB}$. Non si può in generale concludere che $CQ = CR$. Tuttavia, trovandosi sullo stesso segmento, se fosse ad esempio $CR < CQ$, allora sarebbe anche $QB < RB$, da cui si otterrebbe la contraddizione $\frac{CR}{RB} < \frac{CQ}{BQ}$. □

Quale utile esercizio segnaliamo il seguente

Teorema 3 (Teorema della bisettrice)**.** *La bisettrice di un triangolo taglia il lato in parti proporzionali all'angolo. Ovvero, in relazione alla figura* **??**

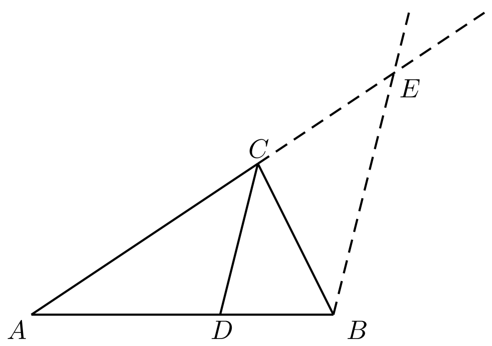

FIGURE 3. Teorema della bisettrice

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}.$$

Proof. Si mandi la parallela alla bisettrice per B e si prolunghi il lato AC fini ad incontrarla in un un punto E. Applicando il Teorema di Talete al triangolo di vertici ABE si trova $\frac{AC}{CE} = \frac{AD}{DB}$. Considerando le rette parallele tagliate da trasversali, si trova che il triangolo BCE è isoscele, da cui discende la tesi. □

Anche per il Teorema della bisettrice vale l'enunciato inverso. Infatti, in relazione alla figura, questa volta si prolunghi il lato AC in modo che risulti $AE = CB$ e poi congiungiamo E con B. Per l'inverso di Talete segue che $CD \| EB$ da cui si ottiene che CD è bisettrice.

(24) Sez. 8.2. Per una berve panoramica sul Teorema del triangolo isoscele si veda C. Bernardi, Gli angoli alla base di un triangolo isoscele, Archimede N.4, 2015.

(25) Sez. 8.5 Il Teorema di Pitagora può essere generalizato in vari modi costruendo figure diverse dal quadrato. Ad esempio, si può verificare che la relazione pitagorica resta vera se si costruiscono su cateti ed ipotenusa dei triangoli, a patto che questi siano simili tra loro.

A tal fine siano a, b, c le lunghezze rispettivamente dei cateti e dell'ipotenusa del nostro triangolo rettangolo. Detta h l'altezza del triangolo costruito sull'ipotensusa relativa all'ipotenusa stessa. Posto $\alpha := \frac{h}{2c}$ risulta che l'area del triangolo vale αc^2. Considerando ora il triangolo costruito sul caeto, diciamo quello di lunghezza b, trattandosi di triangoli simili non è difficile verificare che lati ed altezze sono in proporzione. Pertanto, denotando con h' l'altezza del triangolo in questione abbiamo $\frac{h'}{b} = \frac{h}{c}$ da cui $h' = \frac{bh}{c}$ segue che l'area del triangolo costruito sul cateto vale αb^2. In modo analogo si trova che l'area del triangolo costruito sull'altro caetto vale αa^2. Sommando e utilizzando il teorema di Pitagora allora si ottiene

$$\alpha a^2 + \alpha b^2 = \alpha(a^2 + b^2) = \alpha c^2.$$

(26) Sez. 8.5 Teorema 106. Il secondo Teorema di Euclide potrebbe anche essere dimostrato a partire dal primo sfruttando la transitività della similitudine tra triangoli.

(27) sez. 8.9.1: Si veda anche A. D'Andrea, Seni, coseni e tangenti razionali di angoli razionali, Archimede N. 4, 2015.

(28) Sez. 8.12: Sostituire Glisso-riflessione a glisso-simmetria.

(29) Sez. 8.13. Per una dimostrazione algebrica sui 5 solidi platonici si veda: S. Mortola, Dimostrazioni che lasciano ... senza parole, Archimede **3** (2014), 163-164.

Si veda anche l'articolo: G. Lucchini, Spunti sul numero dei poliedri regolari, MatematicaMente N. 204, Settembre 2015.

(30) Cap. 9 pag. 216: Figura 9.20. La derivazione della disuguaglianza nella (9.25) è errata. Da sostituire con la seguente:

per siffatti punti $Q(x, y)$ con $0 \leq x \leq a < c$ e $y > 0$, razionalizzando, abbiamo

$$d(Q, F_1) - d(Q, F_2) = \frac{d(Q, F_1) - d(Q, F_2)}{d(Q, F_1) + d(Q, F_2)} \cdot (d(Q, F_1) + d(Q, F_2)) = \frac{d^2(Q, F_1) - d^2(Q, F_2)}{d(Q, F_1) + d(Q, F_2)} =$$

$$\frac{(x + c)^2 + y^2 - (x - c)^2 - y^2}{d(Q, F_1) + d(Q, F_2)} = \frac{(2x)(2c)}{d(Q, F_1) + d(Q, F_2)} < \frac{4cx}{2c} = 2x \leq 2a, \tag{1}$$

giacché per disuguaglianza triangolare è $2c = d(F_1, F_2) < d(Q, F_1) + d(Q, F_2)$.

(31) Cap. 14, Teorema 169 Pag. 238 penultimo rigo: i quadrilateri $ABCD$ e $A'B'CD$ hanno stessa area e stesso perimetro.

(32) Cap. 14, pag. 267: In realtà la condizione $f(1) = 0$ segue dalla $f(xz) = f(x) + f(z)$. Per $x = z = 1$ si ottiene infatti $f(1) = f(1) + f(1)$, da cui $f(1) = 0$.

(33) 1. Logaritmi e numeri primi

La funzione logaritmica è coinvolta sorprendentemente nel comportamento dei numeri primi. Si tratta del cosiddetto *Teorema dei numeri primi* formulato da Gauss, ma la cui dimostrazione fu fornita soltanto un secolo dopo (J. Hadamard, C. J. de la Vallèe Poussin).

Per averne un'idea, si consideri

$$\Pi(x) := \text{ quantità di numeri primi minori di } x.$$

Dunque, per calcolare ad esempio $\Pi(9)$ bisogna contare i numeri primi minori di 9, che sono $2, 3, 5, 7$. Pertanto $\Pi(9) = 4$. Mentre ad esempio si trova $\pi(14) = 6$ o $\Pi(25) = 9$. Ora, osservando i quozienti $\frac{x}{\Pi(x)}$ per molti valori (molto grandi) di x, Gauss notò un andamento in qualche modo *logaritmico*. La congettura di Gauss, dimostratasi poi esatta, afferma proprio che per x *molto grande* il rapporto $\frac{x}{\Pi(x)}$ si *approssima* con la funzione $\log x$.

(34) Sez. 13.2 La realizzazione pratica della misura del raggio terrestre da parte di Eratostene richiedeva procedure più laboriose e complicate. Richiedendo probabilmente campagne organizzate di rilevamenti geografici. Su questa questione si veda: L. Russo, La rivoluzione dimenticata, Feltrinelli, 2003.

(35) Appendice A, Principio di induzione: Osserviamo che l'applicabilità del principio di induzione richiede talvolta qualche precauzione. Ad esempio potremmo studiare la proprietà di essere calvo in relazione al numero di capelli posseduti. Ora, se una persona non ha capelli è senz'altro calva. Poi potremmo ammettere che aggiungendo un capello ad una testa calva questa rimane tale. Allora, quale che sia il numero, finito o numerabile che sia, si resterebbe sempre calvi!

References

[1] J.M. Lee, Axiomatic Geometry, American Mathematical Society, 2013.

Email address: `granieriluca@libero.it`