

1. Studiare la seguente funzione disegnandone poi il grafico

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (\arctan t \sin t) dt}{x^2}.$$

3. Dire se la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è dotata di primitiva. In caso affermativo si determinini la primitiva che nel punto 0 assume il valore 1.

4. Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva. Dire quali delle seguenti affermazioni risultano in generale vere.

- (a) Esiste la funzione inversa f^{-1} e questa ammette massimo.
- (b) $\forall k \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = k$ ammette al più una soluzione.
- (c) Esiste $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che $g|_{[0,1]} = f$.
- (d) Esiste $\bar{x} \in [0, 1]$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.

Giustificare le risposte.

1. Studiare la seguente funzione disegnandone poi il grafico

$$f(x) = x - \frac{1}{2} - 2 \log \left| 1 - \frac{1}{x} \right|.$$

2. Determinare una primitiva della funzione

$$\frac{e^x}{e^x + \sqrt{2 - e^x}}.$$

3. Determinare la primitiva $F(x)$ di $f(x) = xe^{-|x|}$ tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -5$.
4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l > 0$. Dire quali implicazioni sussistono tra le seguenti affermazioni.
- (a) f é continua.
 - (b) f é limitata.
 - (c) f ammette minimo.
 - (d) f ammette massimo.

Giustificare le risposte.

1. Studiare la seguente funzione disegnandone poi il grafico

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2|x|} + x.$$

2. Determinare una primitiva della funzione

$$\frac{3x + 11}{x^2 - 2x - 3}.$$

3. Dire se la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{se } x \leq 0 \\ \cos x + e^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

è dotata di primitiva. In caso affermativo si determinini la primitiva che nel punto 0 assume il valore 1.

4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l < 0$. Dire quali implicazioni sussistono tra le seguenti affermazioni.
- (a) f é limitata.
 - (b) f é continua.
 - (c) f ammette minimo.
 - (d) f ammette massimo.

Giustificare le risposte.