

# PROBLEMI A DOMINIO VARIABILE

LUCA GRANIERI

SOMMARIO. We discuss some basic problems which involve a geometric domain variation. In particular we deal with problems related to elastic materials subject to removal of a fixed volume of material from the reference configuration of the body or subject to instability of their elastic energy. The presentation could be convenient and useful for teachers and students of secondary high school level.

La poesia è l'arte di parlare di una stessa cosa in mille modi diversi. La matematica invece consiste nel parlare di mille cose diverse allo stesso modo. In effetti, molti scienziati potrebbero trovarsi d'accordo nel sostenere che tra i lavori scientifici più *belli*, per quanto di bellezza si possa parlare al proposito, ci sono senz'altro quelli *unificanti*. Quelli cioè che mostrano che fenomeni apparentemente diversi e lontani tra loro hanno in realtà un principio comune. In questa categoria, tanto per fare un esempio eclatante, rientra la gravitazione universale di Newton per la quale il moto orbitale dei pianeti attorno al Sole avviene per lo stesso motivo per il quale la proverbiale mela cade dall'albero. Noi naturalmente ci accontentiamo di molto meno, mostrando che in questa categoria possono ricadere quelli che potremo chiamare *problemi a dominio variabile* che possono provenire dai settori più disparati come lo studio di corpi elastici, il controllo industriale, la biologia e tanto altro.

Per fissare le idee, uno dei più antichi e celebri problemi che rientrano in questa categoria è il cosiddetto *problema di Didone* (*problema isoperimetrico*) che consiste nel determinare, tra tutte le forme geometriche di perimetro (o in generale superficie) fissata quella che racchiuda l'area (risp. volume) massima. La soluzione del problema (si veda [3] per un resoconto introduttivo) è il cerchio (sfera) che tra le altre cose è anche soluzione del problema (*duale*) isovolumetrico che consiste nel determinare tra tutte le forme geometriche di assegnata area (risp. volume) quella che abbia il perimetro (risp. volume) minimo. Una generalizzazione molto studiata di questi problemi è il cosiddetto *problema di Wulff* introdotto in cristallografia. Per *piccoli* cristalli per cui sia possibile trascurare le forze di volume, come la gravità ad esempio, la geometria che il cristallo assume è determinata dall'interazione della sua superficie con il mezzo in cui si trova immerso. Tipicamente, un cristallo si accresce grazie all'interazione tra un materiale e un mezzo (fluido) esterno al cristallo stesso. Questa interazione avviene attraverso il contatto tra la superficie del cristallo e il mezzo. Le forze di contatto agenti sulla superficie in qualche modo plasmano la forma del cristallo producendo una energia di superficie. In altre parole, si può individuare in questa energia di superficie il responsabile della forma finale del cristallo. Tale interazione *porta* il cristallo ad assumere la forma che rende il più piccolo possibile il contributo energetico relativo alla sua superficie. Si tratta dunque di un problema a dominio variabile: determinare a parità di volume, dato che la massa è costante, la forma geometrica che minimizza l'energia di superficie (si veda [5] per un'introduzione divulgativa al tema). Il problema isoperimetrico

corrisponde al caso particolare in cui l'energia di superficie è costante. Quando il contributo relativo al volume non è trascurabile l'interazione tra le energie di volume e quelle di superficie rende il tema ancora più difficile (si veda ad esempio [6]) da studiare. Un caso notevole è quello in cui la densità di superficie è costante, come nel problema isoperimetrico. Tali problemi si dicono anche di *curvatura prescritta* giacché la densità dell'energia di volume *prescrive* la curvatura che punto per punto la forma geometrica in esame deve assumere.

In generale, il fatto che i domini geometrici possano variare rendono questo tipo di problemi di non facile approccio. Il caso tipico di molti problemi provenienti dalla fisica richiede ad esempio di risolvere una equazione differenziale in un certo dominio geometrico. E spesso un ingrediente di notevole importanza nel risolvere l'equazione risiede proprio nelle caratteristiche di regolarità e di simmetria del dominio geometrico su cui si lavora. Permettere al dominio di variare distrugge in genere questo tipo di argomentazione. In questa sede mostriamo alcune tematiche che possono far intravedere degli orizzonti pur basandosi su tecniche relativamente elementari.

## 1. IL PROBLEMA DEL BUCO OTTIMALE

Il problema che vogliamo discutere è quello di alleggerire una struttura. Tanto per fissare le idee, possiamo pensare al problema di aprire una finestra in un muro. Abbiamo acquistato una bella casa ma con il difetto di avere poca luce. Essenzialmente, si tratta allora di fare un buco alla parete. Chiaramente occorre prescrivere la quantità di materiale da asportare. Se infatti cominciamo a sventrare allegramente la nostra parete togliendo materiale a man bassa, è possibile che ci crolli tutto addosso. Quindi, non facciamoci prendere dall'entusiasmo e accontentiamoci di produrre nella parete un buco di volume stabilito, diciamo pari ad un certo valore  $V$ . Ora, sappiamo che il volume della finestra deve essere  $V$ , ma quale dev'essere la sua forma? Se la parete è omogenea, allora per ricavare la finestra di volume  $V$  basta *ritagliare* una figura geometrica che abbia una prefissata area  $A$ . A parità di area, qual è la forma geometrica migliore per il buco? Allora, il problema che ci poniamo è quello di scegliere la figura geometrica della nostra finestra in maniera ottimale. Per farlo dovremo naturalmente stabilire che sia ottimale rispetto a qualche criterio. Ora, i finestrini degli aerei hanno una forma ovale. Come mai? Pare che un tempo si ricavassero invece più sbrigativamente in forma quadrangolare. Alcune problematiche, e qualche incidente, relative ai voli e alla loro sicurezza, misero però sotto accusa proprio i finestrini e la loro forma geometrica. La presenza degli spigoli metteva in serio pericolo la tenuta della struttura della cabina. In effetti, si può dimostrare (si veda [2] per qualche dettaglio) che il contributo energetico si concentra sul bordo. In parole povere, a parità di area si deve cercare la forma geometrica del buco in modo che la struttura si indebolisca il meno possibile. Se per semplicità chiediamo di *ritagliare* il meno possibile, ovvero nel caso di una densità di energia costante, si tratta allora di scegliere il perimetro minimo possibile. Abbiamo pertanto il problema isoperimetrico, anche se non esattamente. In effetti, c'è un piccolo particolare che distingue questo nostro problema dal problema isoperimetrico. Il fatto è che il cerchio è la soluzione (unica a meno di traslazioni) del problema isoperimetrico nel piano. Ma noi siamo vincolati a fare il buco nella parete. Non possiamo certo andare a bucare la parete del nostro vicino di casa! Si tratta allora di un *problema isoperimetrico vincolato*. Il problema vincolato è molto più difficile e presenta numerose questioni aperte. La difficoltà principale consiste nel tener conto

della geometria della parete. In termini più formali, il nostro problema del buco ottimale in questo caso corrisponderebbe a

$$(1) \quad \text{Minimizzare } \{ \mathcal{P}(K) \mid K \subset \Omega, A(K) = A \},$$

dove  $\mathcal{P}(K)$  è il perimetro del buco  $K$ , mentre  $A$  rappresenta l'area da rimuovere dalla parete  $\Omega$  per ricavare la nostra finestra.

Ora, se dentro la parete  $\Omega$  è possibile piazzare un cerchio  $\mathcal{C}$  di area pari ad  $A$ , allora abbiamo finito. Il cerchio  $\mathcal{C}$  è la nostra soluzione, non si può fare di meglio. Il problema è allora se un tale cerchio nella parete non ci entra. Che fare allora? È abbastanza chiaro che in tal caso la geometria della parete ha la sua importanza. Per semplificare le cose, consideriamo il caso in cui  $\Omega$  è una striscia di altezza  $h$ . Poiché non vogliamo preoccuparci dell'altra dimensione, potremo anche supporre che abbia una larghezza molto grande, diciamo infinita. Può sembrare paradossale, ma in tal caso l'infinito costituisce una semplificazione delle cose. Consideriamo questa volta il più grande cerchio  $\mathcal{C}$  che è possibile piazzare dentro  $\Omega$ . Il caso che ci interessa è quindi quello in cui  $A(\mathcal{C}) < A$ . Sia ora  $E \subset \Omega$  un qualsiasi altro buco tale che  $A(E) = A > A(\mathcal{C})$ . Per ragioni di continuità (si veda [3]), è possibile trovare due linee verticali (Fig. 1) che delimitano due regioni  $E_l, E_r$  di  $E$ , entrambe di area pari a  $\frac{A(\mathcal{C})}{2}$ . Se  $D$  rappresenta la distanza tra queste due linee verticali, indichiamo con  $E_c$  la parte restante di  $E$ , ovvero la regione di  $E$  incastrata tra le due linee verticali. Consideriamo ora  $B = \frac{A(E_c)}{h}$  e prendiamo la regione  $K$  costituita da un rettangolo di

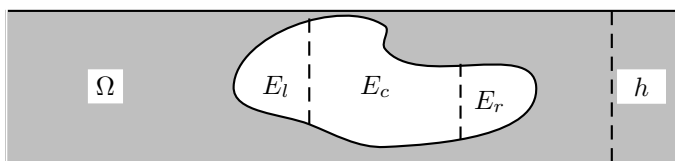


FIGURA 1

base  $B$  e altezza  $h$ , con incollate le due metà di  $\mathcal{C}$ , come indicato in Fig. 2. Vogliamo dimostrare che  $K$  è il buco migliore che si possa fare nella striscia  $\Omega$ .

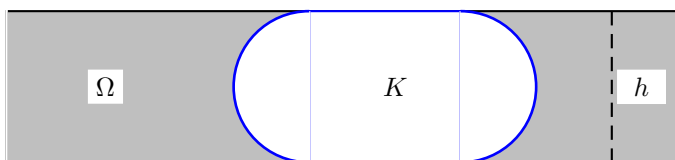


FIGURA 2

Infatti, come ci si aspetta, utilizzando la proprietà isoperimetrica del cerchio, possiamo affermare che

$$\mathcal{P}(E) \geq \mathcal{P}(\mathcal{C}) + 2D.$$

Nel ricavare questa formula abbiamo confrontato le figure  $E_l, E_r$  con le due metà di  $\mathcal{C}$ , e utilizzato il fatto che  $D$  è la minima distanza possibile tra le due linee verticali della figura 1. D'altra parte, essendo  $E_c$  contenuta nel rettangolo di dimensioni  $D$  e  $h$ , notiamo che

$$Bh = A(E_c) \leq Dh.$$

Pertanto, mettendo insieme queste informazioni, si ottiene ciò che desideravamo

$$\mathcal{P}(E) \geq \mathcal{P}(C) + 2D \geq \mathcal{P}(C) + 2B = \mathcal{P}(K).$$

Nel caso di una regione  $\Omega$  più generale, soluzioni esplicite sono più difficili da ottenere. Anzi, ad esempio, fatta eccezione per il caso bidimensionale, anche se  $\Omega$  è una regione convessa, è ancora una questione aperta se la soluzione del problema isoperimetrico vincolato sia anch'essa convessa oppure no. Da quanto detto, il nostro buco potrebbe essere piazzato ovunque dentro la striscia  $\Omega$ . Pertanto, potremmo bucare anche il bordo della parete. In genere, per motivi di sicurezza o di praticità, è bene piazzare la finestra ben all'interno della parete. Se  $d$  rappresenta una tale distanza di sicurezza dal bordo di  $\mathcal{R}$ , la finestra ottimale è come quella presentata in Figura 3.

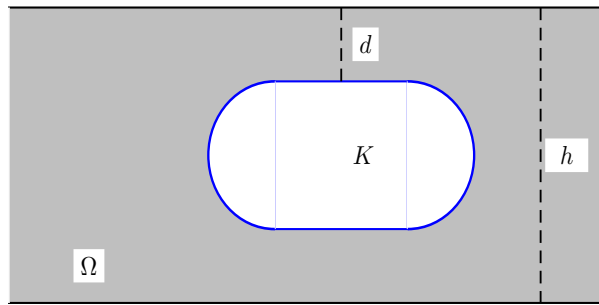


FIGURA 3

## 2. INSTABILITÀ E CORRUGAZIONI

Abbiamo accennato in precedenza alla forma dei cristalli. Tipicamente le forme che si presentano coinvolgono delle facce piane. Ma ci sono situazioni in cui le configurazioni piane risultano *instabili* e il materiale passa ad una configurazione *corrugata*. I fenomeni coinvolti sono molto complessi, legati anche a quella che si chiama *instabilità di Grinfeld*. Noi considereremo una situazione molto particolare e semplificata: quello che in gergo talvolta si chiama un *modello giocattolo*.

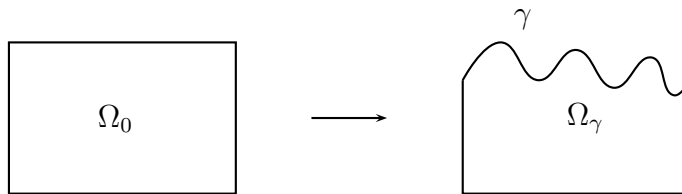


FIGURA 4. Corrugazione di un rettangolo

Così, tanto per divertirci un po'. Del resto, spesso è proprio giocando che si impara di più. Si tratta di un modello bi-dimensionale in cui  $\Omega_0$  è un rettangolo, diciamo  $\Omega_0 = [0, 1] \times [0, h]$  e permettiamo soltanto al lato superiore di  $\Omega_0$  di modificare la sua geometria (vedi figura 4). Abbiamo visto che in generale le energie corrispondenti dipendono anch'esse dalla geometria assunta. Allora, quale ulteriore semplificazione, considereremo una densità di energia di volume fissata una volta

per tutte e indipendente dalla geometria. Vedremo poi che anche questo modello semplificato ha il suo proprio interesse.

### 3. EQUILIBRIO PER L'ENERGIA DI VOLUME

Denotiamo con  $W : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la densità di energia e con  $\Omega_0 = [0, 1] \times [0, h]$  la configurazione di riferimento per un corpo elastico (un cristallo ad esempio). Denotiamo anche con  $\bar{\gamma}(x) = h$  il lato superiore del rettangolo  $\Omega_0$ . L'energia associata alla configurazione  $\Omega_0$  è data da

$$J(\bar{\gamma}) = \int_0^1 \int_0^h W(x, y) dx dy.$$

Per semplicità, assumiamo che il cambiamento della geometria del lato superiore del rettangolo sia dato dal grafico di una funzione  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Pertanto, stiamo considerando domini  $\Omega_\gamma$  sottografico della funzione cartesiana  $\gamma$ . La relativa energia  $J(\gamma)$  dipende quindi dalla funzione  $\gamma$  e, quale ulteriore semplificazione, consideriamo il caso di una densità che dipenda dalla sola altezza  $W(x, y) = g(y)$ . In tal caso, utilizzando le formule di riduzione per gli integrali doppi, l'espressione dell'energia diventa

$$(2) \quad J(\gamma) = \int_{\Omega_\gamma} W(x, y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^{\gamma(x)} g(y) dy \right) dx.$$

Naturalmente, siamo interessati al caso in cui l'area del sottografico rimane costante, dato che la massa totale si deve conservare. Dev'essere  $Area(\Omega_\gamma) = Area(\Omega_0)$ . Tale richiesta si traduce nella seguente condizione

$$\int_0^1 \gamma(x) dx = h.$$

Il nostro scopo consiste nello studiare le condizioni di equilibrio per l'energia (2). Questo studio è di routine nel caso di funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , per le quali tutto ciò corrisponde a considerare punti di massimo o minimo locale per  $f$ . Come è noto, tali punti vanno cercati tra quelli in cui la derivata di  $f$  si annulla. Tali punti vengono detti anche stazionari o critici. La condizione di derivata nulla è soltanto necessaria. Ogni punto di massimo o minimo locale è senz'altro un punto stazionario. Ma ci possono essere punti che, pur essendo stazionari, non sono né massimi né minimi locali. Si pensi ad esempio al punto  $x_0 = 0$  per la funzione  $f(x) = x^3$ . Si tratta dunque di saper calcolare le derivate della funzione, meglio del funzionale,  $J(\gamma)$  definito dalla (2). Il fatto è che tale espressione dipende dalla curva  $\gamma$ , e non è subito chiaro come si possano considerare delle derivate in tale contesto. A questo proposito, un'idea semplice è quella di considerare l'espressione di  $J(\gamma)$  come dipendente da un parametro reale e poi effettuare le derivate rispetto a tale parametro reale. Vogliamo cioè studiare il comportamento dell'energia rispetto a perturbazioni della curva  $\gamma$  rispetto ad un parametro. Se consideriamo un'altra curva  $\eta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , considerato un parametro  $t$ , si possono considerare le perturbazioni  $\gamma_t(x) = \gamma(x) + t\eta(x)$ . In tal modo, per  $t = 0$  si riottiene la curva  $\gamma$  di partenza. Nel nostro problema possiamo certo cambiare la geometria del lato superiore, ma lasciando inalterata l'area del sottografico corrispondente. Allora, per garantire che sia sempre così, basterà considerare funzioni  $\eta$  tali che  $\int_0^1 \eta(x) dx = 0$ . Ad esempio

si potrebbero scegliere funzioni della forma  $\eta(x) = \sin(2k\pi x)$ . Se consideriamo la funzione di variabile reale

$$\varphi(t) := J(\gamma_t),$$

come già osservato è  $\varphi(0) = J(\gamma)$ . Allora, se  $\gamma$  corrisponde ad una configurazione di equilibrio per il funzionale  $J$ , ciò significa che la funzione  $\varphi$  deve avere in  $t = 0$  un punto stazionario. Pertanto deve essere  $\varphi'(0) := \frac{d\varphi}{dt}(0) = 0$ . Abbiamo così ottenuto una condizione necessaria di equilibrio per il nostro funzionale  $J$ . Tale derivata viene anche detta variazione prima del funzionale  $J$ , o anche derivata direzionale di  $J$  in  $\gamma$  nella direzione  $\eta$ . Ora, comunque la si voglia chiamare, vediamo dove ci porta la sua espressione. Per come è definito il funzionale  $J$ , dalla (2) otteniamo

$$\varphi'(0) = \frac{d\varphi}{dt}(0) = \frac{d}{dt} \left( \int_0^1 \left( \int_0^{\gamma+tn} g(y) dy \right) dx \right)_{t=0}.$$

Portando il simbolo di derivata sotto il segno di integrale e utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale (si veda per qualche dettaglio in più [3, 6, 7]) otteniamo

$$(3) \quad \varphi'(0) = \int_0^1 g(\gamma(x))\eta(x) dx.$$

Ora, se accade

$$(4) \quad g(\gamma(x)) = C \text{ (costante),}$$

allora, per come abbiamo scelto le funzioni  $\eta$ , avremo

$$(5) \quad \varphi'(0) = C \int_0^1 \eta(x) dx = 0.$$

Pertanto, ogni volta che sia soddisfatta la condizione (4) la configurazione  $\gamma$  è senz'altro un punto critico per il funzionale  $J$ . In realtà si può dimostrare che vale anche il viceversa. Se cioè  $\gamma$  è un punto critico, allora deve per forza essere soddisfatta la condizione (4) (si veda [3]). Osserviamo che la configurazione piatta  $\bar{\gamma} = h$  è un punto critico. La condizione di stabilità richiede di valutare le derivate seconde. Per definizione di derivata

$$\varphi''(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi'(t) - \varphi'(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{g(\gamma_t(x)) - g(\gamma(x))}{t} \eta(x) dx.$$

Passando al limite sotto il segno di integrale ([3] per una giustificazione rigorosa) si perviene alla derivata di una funzione composta all'interno dell'integrale. Otteniamo

$$\varphi''(0) = \int_0^1 g'(\gamma(x))\eta^2(x) dx.$$

Ogni qualvolta  $g'(h) < \alpha < 0$  avremo una condizione di instabilità per la configurazione piatta. Trattandosi infatti di un massimo locale, in un intorno di  $t = 0$  avremo  $J(\gamma_t) \leq J(\bar{\gamma})$  e quindi, in tal caso, il materiale può avere interesse ad assumere una configurazione corrugata per decrescere la sua energia.

Un effetto stabilizzante si ottiene invece considerando contributi energetici di superficie. Si veda [6, 7] per uno studio introduttivo sui materiali elastici.

## 4. ULTERIORI PROSPETTIVE

La discussione della sezione precedente, per quanto limitata, ha prodotto comunque qualcosa di interessante. In effetti, la semplicità della condizione necessaria di equilibrio (4) ci fa ben sperare nel suo utilizzo anche al di fuori dall'ambito in cui l'abbiamo ricavata. Consideriamo un qualsiasi fenomeno che produca dei dati che oscillano intorno ad un valore medio. Come ad esempio la temperatura corporea di un paziente o l'andamento di un titolo in borsa. Ciò significa che i punti che si trovano al di sotto di tale media sono in qualche modo bilanciati da quelli che si trovano al di sopra. Se c'è una funzione che descrive la dipendenza di tali dati tra loro, come la funzione che al tempo fa corrispondere la temperatura o il valore del titolo a quel preciso momento, il suo grafico dovrà passare vicino ai dati disponibili, e quindi anche la parte del grafico al di sotto della media sarà in qualche modo bilanciata dalla parte che si trova al di sopra di essa, come in figura 5. Magari, di questa presunta relazione funzionale tra le variabili non sappiamo dire molto data la complessità dei fenomeni che stiamo considerando. Tuttavia, dato il fenomeno oscillatorio, potrebbe essere sensato assumere che l'area del sottografico resti invariata, e pari a quella che si avrebbe considerando il rettangolo corrispondente all'andamento costante. Siamo così ricondotti ad un problema a dominio variabile come quello considerato per i materiali elastici.

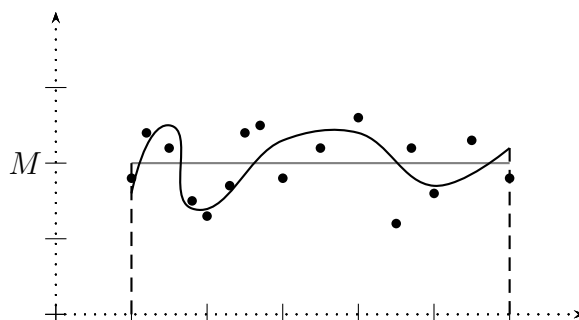


FIGURA 5. dati oscillanti intorno ad un valore medio

Naturalmente, di funzioni *vicine* ai dati che mantengano inalterata l'area del sottografico ce ne sono una infinità. Quale corrisponde effettivamente al fenomeno in questione? La condizione (4) ci può essere utile almeno per caratterizzarlo in qualche modo. Ci piacerebbe cioè dire che tra tutte le possibili funzioni  $\gamma$ , il fenomeno ne seleziona una che soddisfi la condizione necessaria (4). Questo corrisponde a chiedere che il fenomeno in questione prediliga in qualche modo le configurazioni di equilibrio. Vorremmo vedere tutto come se si trattasse di una pallina che si muove su una superficie, fino a che non trovi il fondo di una valle o la cima di una collina dove fermarsi. Se poi qualcuno, come il vento o la mano di un ragazzino, la costringesse a muoversi ulteriormente, essa comincerebbe nuovamente a vagare per fermarsi nella prima postazione di equilibrio utile. Abbiamo detto che la (4) è soltanto una condizione necessaria e da sola non è in grado di dirci se effettivamente ci troviamo in un vero e proprio punto di equilibrio. Tuttavia, essa potrebbe essere usata benissimo in senso negativo, per accertarsi che lo stato di equilibrio è stato

abbandonato. Infatti, ogni qualvolta la (4) non è soddisfatta, allora la configurazione  $\gamma$  non può essere un punto di equilibrio per  $J$ . Se ci pensiamo, questo approccio potrebbe essere importante per il nostro ipotetico paziente. Supponiamo infatti di monitorare costantemente la sua temperatura corporea costruendo un grafico della temperatura in funzione del tempo. Se il grafico si impenna sempre di più verso l'alto o verso il basso, non c'è bisogno di un genio della medicina per correre subito ai ripari segnalando che il paziente sta andando in fumo o piuttosto in ibernazione. Ma se il grafico dovesse invece oscillare intorno ad un valore medio, diciamo pari a  $37^\circ$ , cosa dovremmo fare? Possiamo stare tranquilli o dobbiamo temere che la situazione precipiti da un momento all'altro? Se infatti c'è qualcosa che non va, per esempio se l'organismo è in lotta che so con una infezione e questa dilaga, dopo un po', se non succede di peggio, la temperatura comincerà a salire per assestarsi oscillando intorno ad un nuovo valore medio, ad esempio di  $39^\circ$ . Il fatto è che noi vorremmo, se possibile, intervenire prima che la situazione possa degenerare. Se il fenomeno medico in questione si accorda con il nostro principio di equilibrio, avremmo qualche possibilità in più di intervento. In tal caso infatti, oltre al grafico dell'andamento della temperatura, avremmo anche la (4) da controllare. Potremmo cioè immaginare un macchinario attaccato al paziente che monitori costantemente la temperatura del paziente, valutando il grafico  $\gamma$  del suo andamento e che poi calcoli il primo membro della (4). Allora, la macchina darebbe un segnale di allarme ogni qualvolta il grafico di  $\gamma$  non si adatti ad un andamento costante (paziente in iper(ipo)termia), e in seconda istanza se il primo membro della (4) non si adatta ad un andamento costante (poiché in tal caso non è valida la condizione di equilibrio). Di particolare interesse sarebbe proprio quest'ultimo caso. La macchina darebbe un allarme anche quando la situazione è apparentemente tranquilla (la temperatura oscilla intorno ad un valore costante), ma lo stato di equilibrio è già compromesso, forse perché c'è già qualche problema in incubazione. Per due casi concreti si veda [1, 4, 7] in cui lo schema qui delineato è applicato al controllo della produzione industriale di piastre metalliche e allo studio della cosiddetta relazione Stock-Recruitment nello studio delle popolazioni ittiche.

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] A. Brancolini, M. Chimienti, M. Dassisti, L. Granieri, F. Maddalena, Variational Techniques for Assessing the Technological Signature of Flat Surfaces, *Optimization and Engineering*, 1, vol. 14 (2013), 155-174.
- [2] P. D'ambrosio, D. De Tommasi, L. Granieri, F. Maddalena, A surface energy approach to the mass reduction problem for elastic bodies, *IMA Journal of Applied Mathematics*, 74 (2009), 934-949, Oxford University Press.
- [3] L. Granieri, *Ottimo in Matematica*, LaDotta, 2016.
- [4] L. Granieri, A Variational Approach to the Stock-Recruitment Relationship in Fish Population Dynamic, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **34** (2011) 607-619.
- [5] L. Granieri, Cristalli ottimali, *Progetto Alice*, III Vol. 15 n. 45, 2014.
- [6] L. Granieri, F. Maddalena, On some variational problems involving volume and surface energies, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 146, Issue 2 (2010), 359-374.
- [7] G. Tagarelli, Problemi variazionali a dominio variabile e applicazioni. Tesi di laurea in Matematica, Università di Bari, A.A. 2009-2010.

LICEO SCIENTIFICO E. FERMI, BARI

*Email address:* granieriluca@libero.it