CURVE PERICOLSE

LUCA GRANIERI

L'eredità scientifica e culturale di A. Einstein è di estremo valore e ha cambiato profondamente la nostra immagine del mondo. Anche il proverbiale *uomo della strada* ormai sa che Einstein ci ha insegnato che lo *spazio è curvo.* Anche la Terra, ovviamente, è curva. E questo lo si conosce sin dall'antichità. Aristotele, ad esempio, fornisce diversi argomenti, sia teorici che osservativi, per dimostrare che la Terra non è piatta ma bensì curva. Egli menziona l'ombra che la Terra proietta sulla Luna, o il fatto che viaggiatori provenienti dall'Africa raccontino di aver visto costellazioni differenti da quelle europee. Di più, teoricamente, sostiene Aristotele, la forma sferica della Terra è una conseguenza della sua teoria (geometrica) della gravità. Poiché tutti i corpi *vogliono* raggiungere il centro della Terra, questi cercheranno di raggiungere la distanza minima possibile dal centro. E qual è la figura geometrica che garantisce questa distribuzione di distanza minima dal centro? Proprio la sfera. Curiosamente, lo stesso argomento non è applicato agli altri corpi celesti, come la Luna, che sono sferici per altre motivazioni. Dunque, per Aristotele la gravità determina la forma, e quindi la curvatura, della Terra. Einstein porterà agli estremi questa intuizione geometrica facendo della gravitazione una grande e profonda sinfonia geometrica, in particolare di *geometria differenziale.* L'audacia di Einstein è nel ritenere che non solo la gravità determina il comportamento dei corpi materiali, ma anche di qualcosa di etereo e impalpabile come lo *spazio*, curvandolo. Così, la gravità determina la geometria dello spazio e quest'ultima costringe i corpi, ma anche le onde elettromagnetiche e i raggi di luce, a muoversi in un certo modo. In quest'ottica, la Terra orbita attorno al Sole non perché ci sia qualche cosa a spingerla o a tirarla, ma semplicemente perché lo spazio attorno al Sole è curvo. La Terra non fa altro che seguire la forma dello spazio, allo stesso modo in cui una biglia che rotola su una pista di sabbia realizzata sulla spiaggia dai bambini mentre giocano è costretta a seguire la geometria della pista stessa, con curve, dossi e ostacoli vari. La massima che rende l'idea è di Jhon Archibald Wheeler: *la materia dice allo spazio-tempo come curvarsi; lo spazio-tempo dice alla materia come muoversi.* Semplicemente geniale.

Comunque, la prova più spettacolare della curvatura della Terra è costituita dalle immagini provenienti dallo spazio (satelliti, sonde, voli spaziali ecc.). Ma il fatto è che noi poveri mortali non possiamo certo *uscire* dal nostro universo per poterlo osservare dall'esterno e decidere se sia curvo o meno. Allora, cosa significa dire che *lo spazio è curvo*?

1. Curvature

Prima di poter parlare dell'universo, cominciamo a farci le ossa partendo dall'esame di *curve piane* (quelle nello spazio pongono già delle difficoltà aggiuntive). Le rette sono ovviamente i prototipi di curve prive di curvatura, o meglio a curvatura nulla. Come possiamo stabilire e quantificare se una curva è curva? Il gioco di parole riposa sul fatto che generalmente in matematica si chiama curva un qualsiasi cammino (unidimensionale). Anche un cammino rettilineo è in questo senso una curva. Il concetto di curvatura ci dovrebbe permettere di distinguere curve pericolose da innocui rettilinei. Affidiamoci per ora all'intuizione fisica. Se procediamo a velocità costante seguendo un cammino piano, se questo è rettilineo non ci sono problemi e possiamo procedere senza particolari patemi d'animo. Se imbocchiamo una *curva*, ci sentiamo invece sballonzolare e se la curva è particolarmente *a gomito* il rischio di andare fuori strada è concreto. Possiamo allora quantificare la *curvatura* della strada sfruttando questo fenomeno fisico che è prodotto dalla variazione della direzione della velocità, che stiamo mantenendo costante in modulo visto che non stiamo né accelerando né frenando. Fisicamente si tratta di una accelerazione (che analiticamente corrisponde alla derivata seconda dello spostamento).

Ma possiamo anche seguire un approccio più geometrico. La curva più semplice che possiamo disegnare è senz'altro il cerchio. La *curvatura* del cerchio è senz'altro correlata al raggio. Se infatti percorriamo una pista circolare, se il raggio è molto grande percorrerla non è molto complicato. Ma, se il raggio è piccolo servirà molto impegno per non andare fuori strada e forse dovremmo fermarci dopo non molto per non rischiare di vomitare a causa dei capogiri. In altre parole, più il raggio è piccolo e più a *gomito* la pista circolare risulta. Se il raggio è molto grande il cerchio è costituito da un bordo poco curvo. Pertanto, può essere ragionevole definire la curvatura del cerchio tramite

$$K = \frac{1}{r}$$

dove $r > 0$ è il raggio del cerchio. Andando ora a studiare altri tipi di curve, l'idea di base è quella di utilizzare il cerchio per *approssimare* le curve. Questo può essere fatto in diversi modi. Intanto, visto che stiamo parlando di curve qualsiasi, ci aspettiamo che la curvatura possa cambiare da punto a punto e non essere costante come nel caso del cerchio o della retta. Fissato allora un punto P consideriamo la **normale** (ovvero la retta perpendicolare alla tangente) alla curva nel punto P. Preso un altro punto Q sulla curva, la normale per Q interseca la normale per P in un punto C. Il cerchio di centro C e raggio PC è un'approssimazione della curva nei pressi di C. Questo se le due normali non sono parallele tra loro, come accade nel caso della retta. Ma quest'evenienza non è un grosso problema. Si può infatti verificare (ma richiederebbe qualche approfondimento) che, se la curva non è un segmento nei pressi di P, allora in ogni intorno di P ci sono infinite normali che intersecano quella per P. Pertanto, è ben definita l'operazione di passaggio al limite, e per $Q \to P$ si ottiene un cerchio approssimante tangente alla curva in P, detto *cerchio osculatore.* La curvatura in P è definita tramite la curvatura del cerchio osculatore.

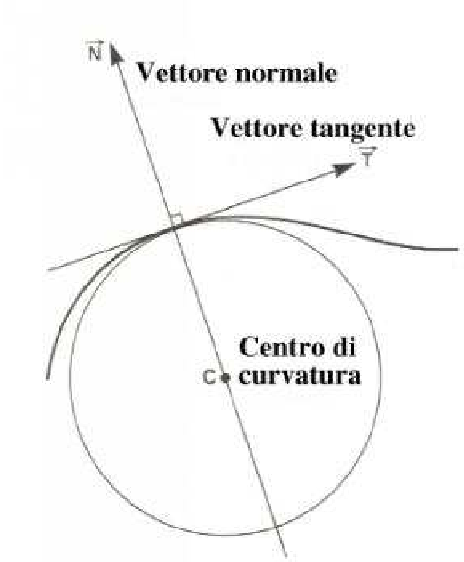

FIGURA 1. tangente, normale e cerchio osculatore

Si osservi che per un cerchio, il cerchio osculatore coincide con il cerchio di partenza e quindi questa nozione generale di curvatura è compatibile con la nostra definizione di curvatura per il cerchio. Alternativamente, per introdurre la curvatura si possono considerare due punti Q, R sulla curva. Poiché per tre punti non allineati passa un'unica circonferenza si ottiene un cerchio passante per P. Passando al limite per $Q, R \to P$ si ottiene il cerchio osculatore. O ancora, la curvatura si può ottenere considerando la variazione dell'angolo tra le tangenti rispetto alla lunghezza d'arco. Tutte queste operazioni danno luogo allo stesso oggetto: *la curvatura.* Analiticamente, mentre la retta tangente fornisce un'approssimazione della curva al prim'ordine, il cerchio osculatore fornisce un'approssimazione della curva al second'ordine in P. È anche possibile dare un segno alla curvatura distinguendo se mentre percorriamo il nostro cammino stiamo curvando in senso orario o antiorario.

Ad ogni modo, ciò che conta per ora è che sappiamo maneggiare la curvatura perlomeno per le curve piane. A titolo illustrativo forniamo un breve calcolo per la curvatura di curve cartesiane.

2. Curvatura per grafici cartesiani

Consideriamo il grafico di una funzione $y = f(x)$, derivabile due volte. Vogliamo calcolare la curvatura in un punto $P(x_0, f(x_0))$. Per semplicità, consideriamo un punto stazionario x_0, ovvero tale che $f'(x_0) = 0$. Se $f''(x_0) = 0$ poniamo la curvatura pari a zero. Altrimenti, preso un punto x_1 in un intorno di x_0, la retta tangente ha equazione $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$. La normale ha quindi equazione $y = f(x_1) - \frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$, questo se $f'(x_1) \neq 0$, cosa che possiamo sempre supporre dato che $f''(x_0) \neq 0$. In ogni caso, basterebbe escludere che la funzione f sia costante (e quindi a curvatura nulla) in un intorno di x_0. L'intersezione tra le due normali allora restituisce $y = f(x_1) - \frac{1}{f'(x_1)}(x_0 - x_1) = f(x_1) - \frac{x_0 - x_1}{f'(x_1) - f'(x_0)}$. Passando al limite per $x_1 \to x_0$ otteniamo il centro $C(x_0, f(x_0) + \frac{1}{f''(x_0)})$ del cerchio osculatore. Allora la curvatura nel punto $P(x_0, f(x_0))$ vale $|f''(x_0)|$. La formula generale (per la curvatura con segno) per i grafici cartesiani è la seguente

$$K(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

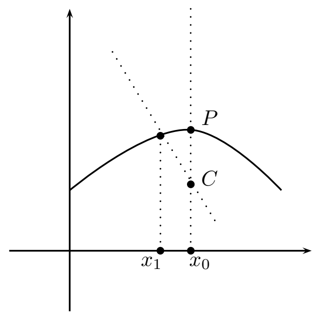

Figura 2. Centro di curvatura

Da questa formula si vede che l'unica funzione a curvatura nulla è la retta $y = mx + n$. Si può verificare che le uniche curve piane con curvatura costante sono le rette e i cerchi. Per convincersene potreste verificare che l'arco di circonferenza $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ soddisfa l'equazione della curvatura con $K(x) = \frac{1}{r}$, e poi intraprendere lo studio delle *equazioni differenziali*. In effetti, le curve piane sono completamente caratterizzate dalla loro curvatura. Lo stesso non accade nello spazio, giacché oltre a curvarsi una curva può anche *torcersi* (cioè abbandonare il piano).

3. Geometria intrinseca

Passando ad una superficie, preso un punto P su di essa possiamo considerare un piano normale, ovvero perpendicolare al piano tangente alla superficie in P. Questo piano taglia la superficie ottenendo una sezione che non è altro che una curva piana. Sembra allora del tutto naturale considerare la curvatura di questa curva nel punto P. Questa volta però, di piani normali ce ne sono infiniti, tutti quelli che si ottengono ruotando il piano attorno alla normale. Che fare? Eulero ha

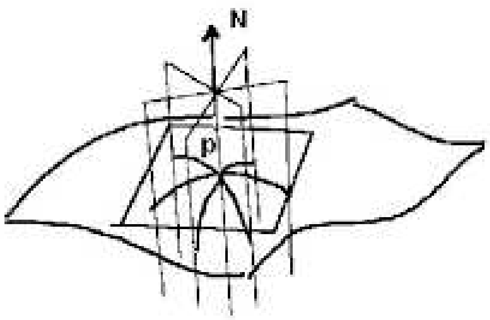

FIGURA 3. sezioni normali di una superficie

dimostrato che tra tutte le infinite sezioni piane così ottenute, esistono e sono unici due piani che determinano una sezione con curvatura minima, ed uno con curvatura massima. Queste due curvature estreme si dicono *curvature principali.*

Purtroppo, quanto sviluppato fino ad ora non è applicabile allo spazio in quanto tale. Il fatto è che abbiamo valutato la curvatura di curve e superfici pensandole come parte di un piano o di uno spazio tridimensionale in cui effettuare le opportune costruzioni geometriche. I matematici direbbero che le curve sono *immerse* nel piano e le superfici immerse nello spazio. Ma noi vorremmo sviluppare dei metodi *intrinseci.* Un ipotetico abitante unidimensionale di una curva, o bidimensionale di una superficie, vorrebbe sapere che forma ha il suo universo osservando soltanto il suo mondo, essendo impossibilitato ad uscirne fuori. I matematici hanno allora intrapreso lo studio astratto di spazi in quanto tali sviluppando una serie molto estesa di metodi (geometria differenziale, topologia, ecc.) chiamando *varietà* (differenziabili, topologiche, algebriche ecc.) questi oggetti intrinseci. Da questo punto di vista intrinseco, le superfici diventano delle varietà bidimensionali, mentre lo spazio è una varietà tridimensionale (o di dimensione maggiore). Noi tutti siamo allora nient'altro che abitanti di una certa varietà N-dimensionale e vorremmo capire che razza di varietà abitiamo, in particolare se è piatta o curva. Gauss, il *principe dei matematici*, scoprì che il prodotto delle curvature principali è una quantità *intrinseca* che non dipende da come la superficie è immersa nello spazio. Un abitante di quella varietà la potrebbe scoprire solo osservando la sua varietà bidimensionale e nient'altro. Tale quantità si chiama curvatura gaussiana delle superficie, ovvero $K = k_1 \cdot k_2$ dove k_1, k_2 sono le curvature principali. Gauss fu uno scienziato molto esigente. E fu talmente soddisfatto da questo risultato da chiamarlo *Theorema Egregium*. Una formulazione un po' più precisa del Teorema Egregium è la seguente:

Due varietà (localmente) isometriche hanno la stessa curvatura gaussiana.

Una isometria è una funzione che preserva le distanze, e che quindi corrisponde a muovere piccole porzioni (localmente) della prima varietà sulla seconda in modo *rigido*, senza cioè apportare nessuna deformazione. Esempi familiari di isometrie sono le traslazioni e le rotazioni. Il risultato è molto importante e Gauss lo derivò a compendio dei suoi studi sulla *cartografia*. Ora, il piano ha curvatura gaussiana nulla (essendo tutte le sezioni normali delle rette), mentre la sfera di raggio R ha curvatura gaussiana positiva $K = \frac{1}{R^2}$ (giacché le sezioni normali sono cerchi di raggio R). Allora, avendo curvatura gaussiana diversa, le due varietà non possono essere localmente isometriche. Questo vanifica i sogni e gli sforzi di tutti i cartografi. Non si può riportare una porzione della Terra su una cartina geografica senza apportare qualche distorsione. Il viceversa del Teorema Egregium in generale non vale. Due varietà possono avere la stessa curvatura gaussiana ma non risultare isometriche, nemmeno localmente.

Dunque, la sfera è, se vogliamo, il prototipo di una varietà a curvatura gaussiana positiva, mentre il piano è il prototipo di una varietà piatta con curvatura gaussiana nulla. Una varietà a curvatura negativa in un punto ha invece una forma di *sella*.

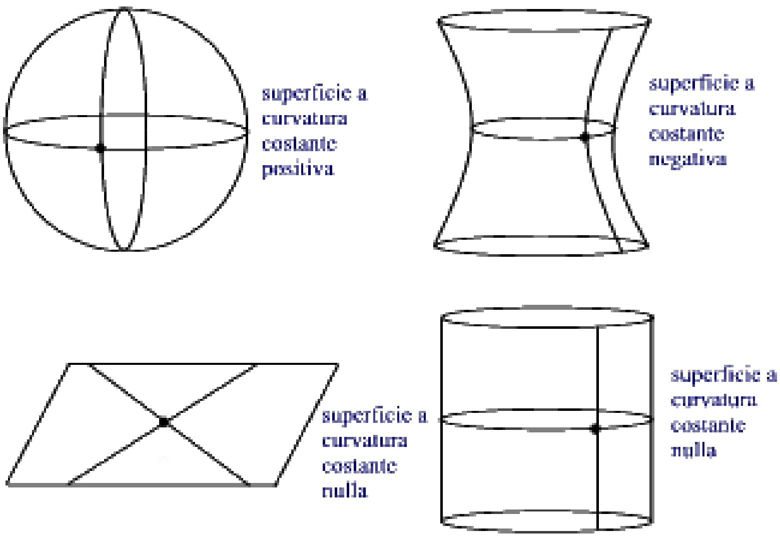

Figura 4. superfici curve e geodetiche

Questo nuovo punto di vista da cui esaminare le cose ci costringe però a diversi sforzi contro il nostro intuito. Un cilindro infatti ci appare curvo, ma la curvatura gaussiana è nulla. Le sezioni normali lungo l'asse di simmetria del cilindro sono infatti rettilinee. In effetti, tra il cilindro e il piano non ci sono molte differenze. Se prendete un foglio rettangolare, che è piatto, potete ottenere un cilindro incollando un bordo del foglio su quello opposto. I matematici direbbero che i due bordi opposti del foglio sono stati *identificati*. Viceversa, tagliando il cilindro lungo il suo asse questo si srotola diventando piatto. Se poi prendete il foglio di prima ed identificate anche gli altri due lati ottenete una ciambella con un buco che i matematici chiamano *toro*.

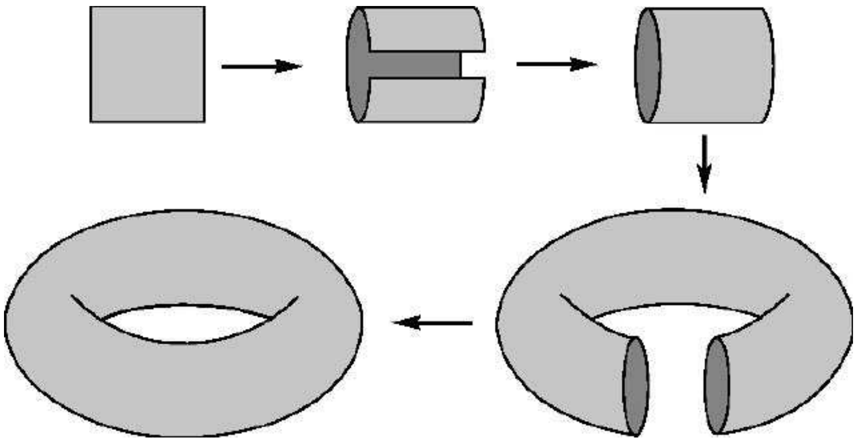

FIGURA 5. Costruzione del toro

Quindi anche il toro è una varietà piatta. La sua geometria è (localmente) euclidea e assomiglia allo storico video game degli anni '80 *asteroids*, nel quale se l'astronave varcava la soglia sinistra dello schermo ricompariva subito a destra, o se scompariva in basso ricompariva subito in alto. Senza saperlo, stavamo tutti navigando in un universo a forma di ciambella!

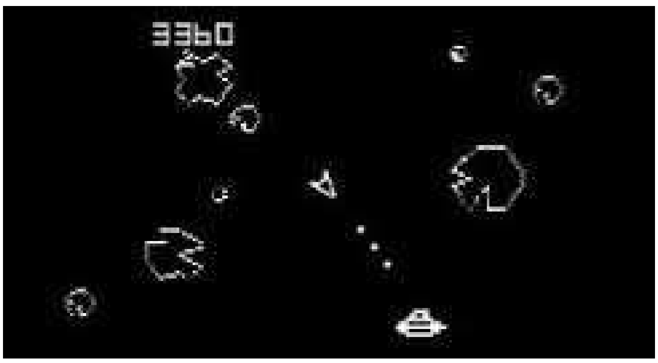

FIGURA 6. Videogame in uno schermo toroidale

Dunque, come superfici immerse nello spazio, il cilindro e il toro sono curve, ma non lo sono intrinsecamente. La sfera invece è intrinsecamente diversa, non potendosi *srotolare* in un foglio piano.

A proposito di immersioni, in realtà si può dimostrare, si tratta dei cosiddetti teoremi di immersione di Whitney, che una qualunque varietà, per qunato astratta possa essere, si può vedere come una varietà immersa in uno spazio euclideo di dimensione sufficientemente alta. Addirittura, queste immersioni possono essere isometriche, come mostrato dai teoremi di immersione di Nash, recentemente scomparso, diventato famoso presso il grande pubblico attraverso un film di successo (*A beutiful mind*) che raccontava diversi aspetti della sua vita (oltre ad aver vinto il premio Nobel per l'economia).

4. La forma dell'universo

Avendo a disposizione la nozione di varietà, il problema è allora di capirne la natura. Ci possono essere diversi modi per farlo. Uno è quello di seguirne le *geodetiche*. Una geodetica è una curva che realizza la minima distanza possibile tra due punti. Nel piano le geodetiche sono ovviamente rettilinee. Ma non è più così se lo spazio è curvo. Sulla sfera le geodetiche sono cerchi di raggio massimo (come i meridiani). Seguendo le geodetiche si può ad esempio distinguere tra un toro e una sfera. A partire da un punto, facendo una rivoluzione completa della varietà in due direzioni diverse, sempre se la varietà lo permette, se le geodetiche si intersecano solo in un punto la varietà può essere un toro ma non una sfera, se invece le geodetiche si intersecano in due punti, la varietà può essere una sfera ma non un toro. Oppure si potrebbe considerare un triangolo geodetico. Se lo spazio è piatto, la somma degli angoli interni è esattamente π. Se invece lo spazio è curvo, la somma degli angoli interni può essere maggiore di π o minore, a seconda della curvatura. Si racconta che lo stesso Gauss tentò una misura del genere prendendo tre cime di montagne come vertici. Ma gli errori sperimentali non permettevano di discriminare la geometria dello spazio.

Agli inizi del XX secolo, Poincaré cominciò a sviluppare tutta una serie di metodi (omologia, omotopia, ecc.) per discriminare la forma delle varietà. Per le superfici le cose furono presto sistemate, classificando completamente le varietà bidimensionali. Poincaré cercò di dipanare anche il caso tridimensionale chiedendosi se potessero esistere altre varietà oltre alla sfera tridimensionale a condividerne il cosiddetto *gruppo fondamentale di omotopia*. La questione si rivelava però piuttosto intricata, costituendo quella che oggi si chiama *congettura di Poincaré*. Paradossalmente, la classificazione delle varietà fu sviluppata con successo dapprima in dimensione alta, da cinque in poi. Successivamente per la dimensione quattro. Ma il caso tridimensionale restava aperto, tanto che il CLAY INSTITUTE lo inserì nella cosiddetta lista dei *problemi del millennio*, offrendo un bel milione di dollari al futuro risolutore dell'enigma. Qualche anno fa, il matematico Gregory Perelman ha pubblicato alcuni lavori con i quali la congettura di Poincaré risulta verificata positivamente. Curiosamente, Perelman ha rifiutato il milione di dollari, e anche la medaglia Fields, considerata il massimo riconoscimento per un matematico.

Qual è la forma dell'universo? Come accennato all'inizio, la relatività generale di Einstein è una teoria geometrica della gravitazione. La materia distorce lo spazio che diventa una varietà curva. Il fatto che lo spazio sia curvo è stato verificato sperimentalmente per la prima volta da Eddington che in una storica spedizione riuscì a misurare la deflessione della luce vicino al Sole durante un'eclissi. Lo spazio attorno al Sole era curvo poiché la luce non seguiva più un percorso rettilineo ma una geodetica curva. Un altro spettacolare fenomeno accade quando la luce proveniente dallo spazio profondo attraversa una galassia massiccia. La luce, attraversando uno spazio curvo, può produrre vari effetti ottici, ad esempio lo sdoppiamento dell'immagine della galassia, come se stesse attraversando una lente. Si tratta del cosiddetto effetto di *lente gravitazionale*. Ma non è facile stabilire la geometria dell'universo. Il fatto è che la geometria dello spazio dipende da quanta materia c'è nel nostro universo, e questo è in larga parte un problema aperto. Si tratta del cosiddetto problema della *materia oscura*, complicato dal fatto che esisterebbe anche un'*energia oscura* responsabile dell'espansione accelerata del cosmo. Per quanto ne sappiamo oggi, su scala globale il cosmo sarebbe piatto. Ciò significa che continuerà ad espandersi per sempre, anche se con sempre minore velocità. Mentre una curvatura positiva corrisponderebbe ad un cosmo che ad un certo punto riprenderebbe a contrarsi. Infine una curvatura negativa lascerebbe il posto ad una espansione accelerata sempre più prominente.

Riferimenti bibliografici

[1] K. Devlin, I Problemi del Millenio, Longanesi, 2004.
[2] M. Du Sautoy, L'equazione da un milione di dollari, RCS 2010.
[3] D. O'Shea, La congettura di Poincaré
[4] I. Stewart, I Grandi Problemi della Matematica, Einaudi, 2014.
[5] Materia oscura: uno sguardo a un livello più profondo della realtà?, Le Scienze, Giugno 2012.
[6] Alle radici dello spazio e del tempo, Le scienze, Aprile 2012.
[7] La forma dell'universo: dieci possibiltà, Le Scienze, Febbraio 2003.