Periodico di Matematiche **98** (2022), pp.45--62

Continuità senza limiti

Continuity without limits

Luca Granieri

Introduzione

La nozione di continuità è fondamentale nel calcolo differenziale. Purtroppo, specialmente nell'insegnamento scolastico, il concetto di funzione continua è spesso ingiustamente sottovalutato o peggio bistrattato. Si può sentir ad esempio sostenere che l'iperbole equilatera $y = \frac{1}{x}$ non corrisponderebbe ad una funzione continua. Oppure alla domanda di quanto faccia ad esempio il limite $\lim_{x\to 2} 3x + 1$ rispondere (correttamente) 7, argomentando: *Perché si sostituisce*. Difficilmente si sente rispondere: perché la funzione $y = 3x + 2$ è continua ([9]).

Generalmente, il concetto di continuità è introdotto subordinandolo a quello di limite, limitandosi a dire che f è continua in x_0 se $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ma definizioni del genere possono rivelarsi insidiose e trarre in inganno. Il fatto è che il limite coinvolge la nozione di punto di accumulazione che in realtà risulta poco rilevante ai fini della continuità. Il concetto di limite è infatti *locale*, dipende cioè soltanto dal comportamento della funzione in un intorno del punto di accumulazione e non da quello che accade nel punto stesso. D'altra parte, la nozione di limite è importante per capire il comportamento di una funzione anche dove essa non è definita. Quello di continuità è invece un concetto *puntuale* (oltre che locale) e dipende in maniera essenziale dal comportamento della funzione in quel punto specifico, nonché da quanto accade nelle sue immediate vicinanze. Forse da qui il fraintendimento sull'iperbole equilatera, visto che il limite nell'origine non esiste. Ma l'origine non fa parte del dominio della funzione e quindi non rientra nella sfera della continuità, pur essendo un punto di accumulazione.

Talvolta si dice che una funzione è continua se il suo grafico può essere disegnato senza staccare la penna dal foglio. Ma ancora l'iperbole equilatera può trarre in inganno. O ancora la funzione che vale uno in $[0, 1]$ e tre in $[2, 3]$ che è continua (anche utilizzando la nozione di limite). Ma ovviamente non può essere disegnata tutta d'un pezzo. Questa nozione grafica porta anche ad un circolo vizioso. Da una parte la funzione è continua se il suo grafico si disegna in una certa maniera, dall'altra utilizziamo il fatto che la funzione sia a priori continua per disegnarne il grafico in quella maniera.

Ancora, possibili fraintendimenti nascono da come si definisce la *discontinuità*, definita sempre attraverso il concetto di limite. La mancata precisazione del contesto in cui ci si muove può ancora creare confusioni. Qualcosa del genere sembra accadere anche nella narrazione autorevole di [1, p. 105] in cui si legge:

La funzione $y = \frac{1}{x}$ *può servire come esempio di funzione discontinua nel punto* $x = 0$. *Altre funzioni discontinue sono rappresenta nei grafici in figura. Raccomandiamo al lettore di esaminare questi grafici con attenzione. Egli noterà che le discontinuità nelle funzioni sono di specie diverse: in alcuni casi esiste il limite di* $f(x)$ *quando* x *tende al punto* x_0 *in cui la funzione ha la discontinuità, ma questo limite è diverso da* $f(x_0)$. *In altri casi il limite non esiste affatto.[...] Come esercizio raccomandiamo al lettore di considerare il seguente problema: determinare quale valore si debba assegnare alle funzioni* $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x^2}$*... nei punti in cui esse non sono definite (cioè nei punti dove il denominatore è uguale a zero) affinché esse possano essere ivi continue.*

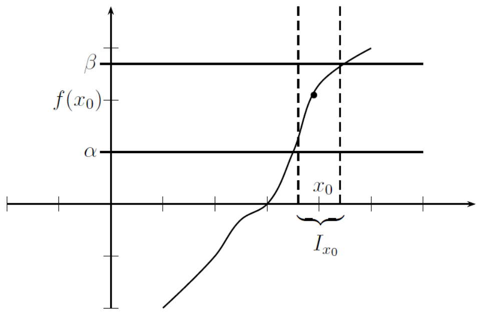
La confusione si ricompone alla fine del citato paragrafo, poiché dal contesto si capisce che si sta discutendo il problema di *estendere* una funzione continua in modo che resti tale. Dunque la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ sarebbe *discontinua* in $x_0 = 0$ nel senso che non è possibile estenderla con continuità in quel punto e comunque si definisca $f(x_0)$ la funzione risultante risulterebbe ivi discontinua. Ora, mentre possiamo sorvolare su dettagli del genere in un testo divulgativo, seppur ad altissimo livello come [1], al livello didattico, sia universitario che di scuola secondaria superiore, è bene evitare tranelli del genere in modo da non indurre lo studente a formarsi concetti incerti. Naturalmente, il concetto di continuità e quello di limite sono intimamente legati, ma a nostro avviso sarebbe preferibile una trattazione più estesa del concetto di funzione continua e possibilmente indipendente (si veda anche [9]) dal concetto di limite stesso. Anzi, introdurre da subito le funzioni continue può anche aiutare a familiarizzare con alcune problematiche propedeutiche allo studio dei limiti stessi. Ci proponiamo dunque di presentare un approccio allo studio delle principali proprietà connesse alla continuità evitando il ricorso esplicito al concetto di limite.

Funzioni continue e permanenza del segno

Le funzioni continue hanno notevoli proprietà geometriche. Una delle principali è quella di trasformare intervalli in intervalli. Tuttavia, tale proprietà non è equivalente alla continuità. Esistono funzioni che pur trasformando intervalli in intervalli non sono continue. Allo scopo è sufficiente considerare una funzione derivabile la cui derivata non sia continua (si veda la sez. 2). L'essenza geometrica della continuità consiste naturalmente nel fatto che una funzione non possa passare improvvisamente da un valore ad un altro. Se ad esempio vi trovate in una stanza al tempo t_0, se la posizione al variare del tempo è una quantità continua, non potete trovarvene istantaneamente fuori. Concludiamo cioè che allora siete stati dentro la stanza per un certo intervallo di tempo centrato in t_0, e quindi eravate nella stanza anche un po' prima e un po' dopo. Possiamo utilizzare questa proprietà geometrica per introdurre il concetto di continuità. Così, una funzione f è continua in x_0 se qualunque striscia contenente

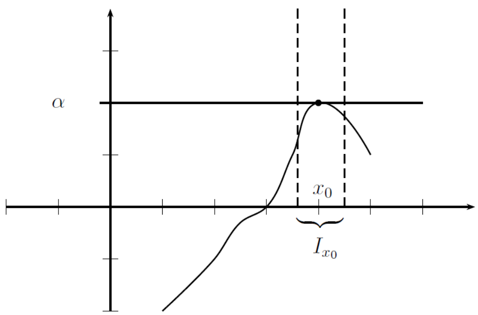
$f(x_0)$ si consideri, allora la funzione si troverà confinata nella striscia anche in un intorno di x_0 (fig.1). Diamo allora la seguente

Figura 1: Caratterizzazione geometrica delle funzioni continue.



Definizione 1 (Funzioni continue) *Una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ si dice continua in $x_0 \in D$ se, quali che siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la disuguaglianza $\alpha < f(x_0) < \beta$ può essere estesa ad un intorno di x_0, ovvero se $\alpha < f(x) < \beta$ $\forall x \in I_{x_0} \cap D$, dove I_{x_0} è un intorno del punto x_0. Diremo che f è continua in un insieme $A \subset D$ se f è continua in tutti i punti di A.*

Figura 2: La disuguaglianza $f(x_0) \geq \alpha$ è soddisfatta solo nel punto x_0 e mai in un intorno.



In altre parole, da un punto di vista algebrico forse più familiare allo studente, una funzione è continua se si può passare da una disuguaglianza che vale in un solo punto ad una che valga in un intero intorno. L'usuale proprietà di conservare *il segno* delle funzioni continue si ottiene dalla definizione per $\alpha = 0$ oppure $\beta = 0$.

Osservazione 1. Nella definizione di funzione continua non si possono sostituire le disuguaglianze strette con disuguaglianze larghe. Infatti, se ad esempio x_0 è un punto di massimo locale per f, la disuguaglianza $f(x) \geq M = f(x_0)$ è vera soltanto in x_0 e mai in un suo intorno.

Dalla definizione si ottiene subito ad esempio che la funzione costante $f(x) = k$ è continua. In effetti, $\alpha < f(x_0) < \beta \Leftrightarrow \alpha < k < \beta$ e quindi se la disuguaglianza di partenza nel punto x_0 è vera, allora essa è automaticamente vera in tutto $\mathbb{R}$, che è naturalmente un intorno di x_0. In termini geometrici, se la funzione si trova in una certa striscia, allora vi rimane per sempre.

Proposizione 1 (rette). *Le funzioni della forma $f(x) = ax + b$ sono continue.*

Dimostrazione. Supponiamo che sia $\alpha < f(x_0) < \beta \Leftrightarrow \alpha < ax_0 + b < \beta$. Sia ad esempio $a > 0$. Otteniamo $\frac{\alpha-b}{a} < x_0 < \frac{\beta-b}{a}$. Scegliendo

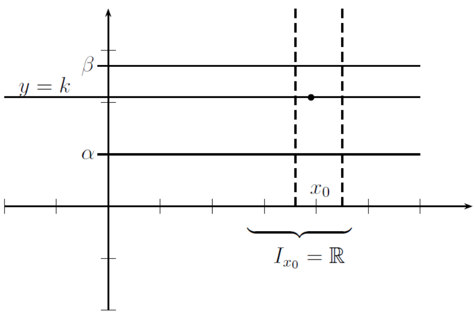
$$\delta = \frac{\alpha - b}{a} < x_0; \qquad x_0 < \gamma = \frac{\beta - b}{a},$$

nell'intorno $I_{x_0} =]\delta, \gamma[$ abbiamo

$$\delta < x < \gamma \Rightarrow \frac{\alpha - b}{a} < x < \frac{\beta - b}{a} \Rightarrow \alpha < ax + b < \beta \Leftrightarrow \alpha < f(x) < \beta.$$

La disuguaglianza $\alpha < f(x_0) < \beta$ è pertanto soddisfatta anche in un intorno di x_0. Il caso $a < 0$ è del tutto analogo. $\square$

Figura 3: Continuità della funzione costante.



Esempio 1. La funzione parte intera $f(x) = [x]$ è discontinua in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Soluzione. Infatti, ad esempio in $x_0 = 2$ consideriamo la disuguaglianza $f(2) = 2 > \alpha$. Tale disuguaglianza non può essere valida in un intorno giacché, in tutti i punti a sinistra di x_0 si ha $1 = f(x) < \alpha$. $\square$

Esempio 2. La funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ 2 & x \in [2, 3] \end{cases}$$

è continua.

Soluzione. Infatti, anche negli estremi come ad esempio in $x_0 = 2$ la disuguaglianza $f(2) = 2 > \alpha$ può essere estesa ad un intorno, a patto che questo non intersechi l'intervallo $[0, 1]$. Non bisogna dimenticare che le proprietà di una funzione, e in particolare la continuità, dipendono in modo cruciale dal dominio considerato in quanto le disuguaglianze devono essere verificate in $I \cap D$. La differenza rispetto all'esempio precedente sulla funzione $y = [x]$ è che in questo caso la funzione in esame non è definita a sinistra di x_0. $\square$

Figura 4: Funzione parte intera.

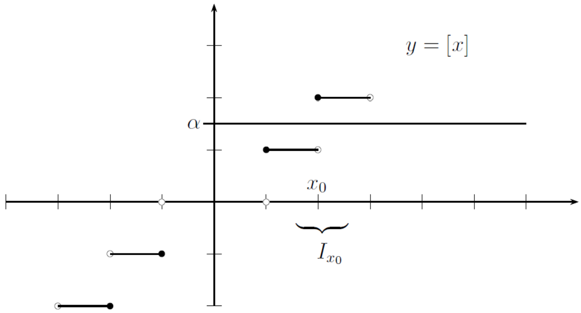
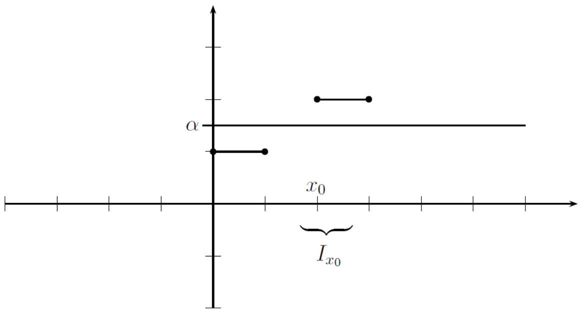


Figura 5: Una funzione continua definita a tratti.



Algebra delle funzioni continue

Si ottengono funzioni continue manipolandole algebricamente.

Teorema 2 (Algebra delle funzioni continue). *Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $x_0 \in D$. Allora*

1. *Per ogni $c \in \mathbb{R}$ la funzione $f + c$ è continua in $x_0 \in D$.*

2. *Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione λf è continua in $x_0 \in D$.*

3. *Se $f(x_0) \neq 0$ allora la funzione $\frac{1}{f}$ è continua in $x_0 \in D$.*

4. *Se g è un'ulteriore funzione definita in D e continua in x_0, allora la funzione $f + g$ è continua in $x_0 \in D$.*

5. *Se g è un'ulteriore funzione definita in D e continua in x_0 allora la funzione $f \cdot g$ è continua in x_0. In particolare, se $g(x_0) \neq 0$, allora la funzione $\frac{f}{g}$ è anch'essa continua in $x_0 \in D$.*

Dimostrazione.

1. Se $\alpha < f(x_0)+c < \beta$ allora $\alpha - c < f(x_0) < \beta - c$. Per la continuità di f vale la disuguaglianza $\alpha - c < f(x) < \beta - c$ in $I_{x_0} \cap D$. Pertanto $\alpha < f(x)+c < \beta$ nello stesso intorno e quindi $f + c$ è continua in x_0.

2. Sia $\alpha < \lambda f(x_0) < \beta$. Supponiamo che sia $\lambda > 0$ (il caso $\lambda < 0$ sarà del tutto analogo). Dividendo si ottiene $\frac{\alpha}{\lambda} < f(x_0) < \frac{\beta}{\lambda}$. Per la continuità di f vale la disuguaglianza $\frac{\alpha}{\lambda} < f(x) < \frac{\beta}{\lambda}$ in $I_{x_0} \cap D$. Moltiplicando per λ si ottiene $\alpha < \lambda f(x) < \beta$ nello stesso intorno e quindi λf è continua in x_0.

3. Se $f(x_0) \neq 0$, per fissare le idee sia ad esempio $f(x_0) > 0$. Allora, per definizione di continuità abbiamo che $f(x) > 0$ in $I \cap D$ per un intorno I di x_0. Pertanto, la funzione $\frac{1}{f}$ è ben definita in $I \cap D$. Sia dunque $\alpha < \frac{1}{f(x_0)} < \beta$. Essendo anche $\beta > 0$ abbiamo che $\frac{1}{\beta} < f(x_0)$. Se anche $\alpha > 0$ allora $f(x_0) < \frac{1}{\alpha}$. Per la continuità di f vale la disuguaglianza $\frac{1}{\beta} < f(x) < \frac{1}{\alpha}$ in $I_{x_0} \cap D$. Moltiplicando si ottiene $\alpha < \frac{1}{f(x)} < \beta$ nello stesso intorno e quindi $\frac{1}{f}$ è continua in x_0. Se invece fosse $\alpha < 0$, allora in tal caso abbiamo comunque $\frac{1}{\beta} < f(x)$ in $I_{x_0} \cap D$, e la $\alpha < \frac{1}{f(x)} < \beta$ è ancora valida essendo $\alpha < 0$.

4. Sia $\alpha < f(x_0) + g(x_0) < \beta$. Consideriamo le funzioni ausiliarie
$$h(x) = 2f(x) + g(x_0) - f(x_0); \quad k(x) = 2g(x) + f(x_0) - g(x_0).$$
Per quanto visto nei punti precedenti, si tratta di due funzioni continue in x_0. Inoltre, essendo $h(x_0) = f(x_0) + g(x_0)$ e $k(x_0) = g(x_0) + f(x_0)$ abbiamo che
$$\alpha < h(x_0) < \beta; \quad \alpha < k(x_0) < \beta.$$
Per la continuità di h e di k valgono le disuguaglianze
$$\alpha < h(x) < \beta \text{ per } x \in I_1 \cap D; \quad \alpha < k(x) < \beta \text{ per } x \in I_2 \cap D$$
per due intorni di x_0. Allora basta prendere $I = I_1 \cap I_2$, che è ancora un intorno di x_0, per avere entrambe le due disuguaglianze soddisfatte. Sommandole si ottiene
$$2\alpha < h(x) + k(x) < 2\beta \Rightarrow 2\alpha < 2f(x) + 2g(x) < 2\beta$$
in $I \cap D$. Pertanto $f + g$ è continua in x_0.

5. Sia $\alpha < f(x_0) \cdot g(x_0) < \beta$. Supponiamo che almeno uno tra i fattori $f(x_0)$ e $g(x_0)$ sia diverso da zero, ad esempio $f(x_0) > 0$. Riscriviamo la disuguaglianza nella forma
$$\frac{\alpha}{f(x_0)} < \gamma < g(x_0) < \delta < \frac{\beta}{f(x_0)}$$
intercalando due qualsiasi numeri γ, δ. Utilizzando la continuità di g e di $\frac{1}{f}$ troviamo tre intorni di x_0 per cui $\frac{\alpha}{f(x)} < \gamma$ in $I_1 \cap D$, $\gamma < g(x) < \delta$ in $I_2 \cap D$ e infine $\delta < \frac{\beta}{f(x)}$ in $I_3 \cap D$. Pertanto, nell'intorno $I = I_1 \cap I_2 \cap I_3$ le tre disuguaglianze valgono tutte contemporaneamente e quindi alla fine
$$\frac{\alpha}{f(x)} < \gamma < g(x) < \delta < \frac{\beta}{f(x)} \Rightarrow \alpha < f(x) \cdot g(x) < \beta.$$
Resta da valutare il caso in cui $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Dunque sia $\alpha < 0 = f(x_0) \cdot g(x_0) < \beta$. Fissato $\varepsilon > 0$, per continuità di f, essendo $f(x_0) = 0$, abbiamo che $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$ in $I_1 \cap D$ per un intorno I_1 di x_0. A questo punto vorremo moltiplicare questa disuguaglianza per g che dovrà soddisfare delle opportune disuguaglianze per ricostruire i termini α, β alle estremità della catena di disuguaglianze desiderate. A tal fine prendiamo
$$\gamma := \max\left(-\frac{\beta}{\varepsilon}, \frac{\alpha}{\varepsilon}\right); \quad \delta := \min\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}, \frac{\beta}{\varepsilon}\right).$$
Dalla continuità di g, essendo $\gamma < 0 = g(x_0) < \delta$, avremo che $\gamma < g(x) < \delta$ in $I_2 \cap D$. Moltiplichiamo ora le disuguaglianze che coinvolgono f per g in $I = I_1 \cap I_2 \cap D$. Se $g(x) > 0$ otteniamo
$$\alpha = -\varepsilon\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) < -\varepsilon\delta < -\varepsilon g(x) < f(x) \cdot g(x) < \varepsilon g(x) < \varepsilon\delta < \varepsilon\left(\frac{\beta}{\varepsilon}\right) = \beta.$$
Se invece $g(x) < 0$ la catena di disuguaglianze diventa
$$\alpha = \varepsilon\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) < \varepsilon\gamma < \varepsilon g(x) < f(x) \cdot g(x) < -\varepsilon g(x) < -\varepsilon\gamma < -\varepsilon\left(-\frac{\beta}{\varepsilon}\right) = \beta.$$

□

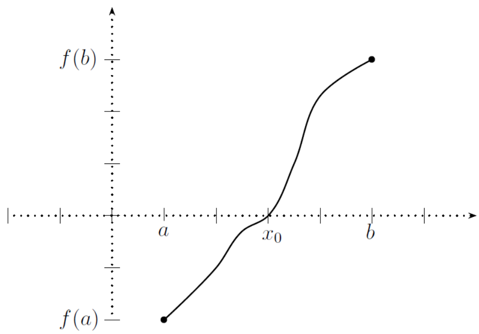
Verifichiamo la continuità della funzione composta

Teorema 2 (Continuità della funzione composta) *Sia $f : D \to E$ e $g : E \to \mathbb{R}$ con $f(D) \subset E$. Sia f continua in $x_0 \in D$ e g continua in $y_0 = f(x_0) \in E$. Allora la funzione composta $g \circ f$ è continua in x_0.*

Dimostrazione. Sia $\alpha < g(f(x_0)) < \beta$. Dalla continuità di g in y_0 troviamo $\alpha < g(y) < \beta$ in $I_{y_0} \cap E$. Tale intorno contiene senz'altro un intervallo della forma $]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[\subset I_{y_0}$. Dunque $y_0 - \varepsilon < f(x_0) < y_0 + \varepsilon$. Dalla continuità di f abbiamo $y_0 - \varepsilon < f(x) < y_0 + \varepsilon$ in $I_{x_0} \cap D$. Dunque i valori di f restano confinati nell'intorno I_{y_0}. Mettendo insieme queste informazioni otteniamo la disuguaglianza $\alpha < g(f(x)) < \beta$ in $I_{x_0} \cap D$. □

A questo punto abbiamo già un ampio ventaglio di funzioni continue: funzioni polinomiali e funzioni razionali ad esempio. La continuità delle funzioni elementari (esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche) si può ad esempio ottenere tramite considerazioni geometriche (si veda [6]). Prima di prendere in considerazione le funzioni inverse occupiamoci dapprima del Teorema di Bolzano (valori intermedi) che verificheremo a breve.

Le proprietà delle funzioni continue possono tutte essere stabilite sfruttando la permanenza del segno e ricorrendo alla *continuità* (o *completezza*) della retta reale (si veda [4,5,7]). **L'assioma di continuità** richiede che ogni sottoinsieme limitato superiormente (o inferiormente) sia dotato di estremo superiore (o inferiore). Per illustrare la situazione stabiliamo il cosiddetto Teorema degli zeri, che poi si vede facilmente essere equivalente alla proprietà dei valori intermedi e di trasformare intervalli in intervalli (Teorema di Bolzano).



Teorema 3 (degli zeri). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo I. Siano $a, b \in I$ tale che $f(a) < 0 < f(b)$. Allora esiste $x_0 \in]a, b[\subset I$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Consideriamo $E := \{x \in [a, b] \ : \ f(x) < 0\}$. Poiché $a \in E$ si tratta di un insieme non vuoto, e ovviamente limitato essendo contenuto in $[a, b]$. Per l'assioma di completezza, esiste $x_0 = \sup E$. Proviamo che $f(x_0) = 0$. Infatti, se fosse $f(x_0) < 0$, allora, per la permanenza del segno, avremmo anche $f(x_0 + \delta) < 0$ per un $\delta > 0$ opportunamente piccolo e tale che $x_0 + \delta < b$. Allora avremmo la contraddizione $x_0 + \delta \in E \Rightarrow x_0 + \delta \leq x_0$. Se infine fosse $f(x_0) > 0$, per la permanenza del segno avremmo che f sarebbe strett. positiva in un intorno $[x_0 - r, x_0 + r] \subset]a, b[$. Ma $x_0 - r < x_0$ e per le proprietà dell'estremo superiore troviamo $x \in E$ tale che $x_0 - r < x < x_0$. Avremmo allora la contraddizione $0 < f(x) < 0$. $\square$

Abbiamo già anticipato più volte la seguente fondamentale proprietà delle funzioni continue, ovvero di trasformare intervalli in intervalli. Una riformulazione del teorema degli zeri è in effetti la cosiddetta proprietà dei *valori intermedi*. Vale a dire che, se una funzione continua assume due valori distinti, ad esempio $y_1 = f(a) < f(b) = y_2$, nell'intervallo $[a, b]$, allora la funzione assume anche tutti i valori compresi tra y_1 e y_2. Ora che il grosso del lavoro è stato fatto, la verifica è abbastanza semplice.

Teorema 4 (di Bolzano sui valori intermedi). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua nell'intervallo I. Allora $f(I)$ è un intervallo. Ovvero, se $f(a) < y < f(b)$ con $a, b \in I$, allora esiste $x_0 \in]a, b[\subset I$ tale che $f(x_0) = y_0$.*

Dimostrazione. Sia infatti $f(a) = y_1 < y_0 < y_2 = f(b)$ un generico valore intermedio. Si consideri la funzione continua $g(x) = f(x) - y_0$. Abbiamo allora che $g(a) = f(a) - y_0 = y_1 - y_0 < 0$, mentre $g(b) = f(b) - y_0 = y_2 - y_0 > 0$. Allora, applicando il teorema degli zeri alla funzione continua g, esiste un punto $a < x_0 < b$ tale che $g(x_0) = 0$. Ovvero $f(x_0) = y$. $\square$

Questa notevole proprietà geometrica di trasformare intervalli in intervalli è stata a lungo ritenuta in qualche modo equivalente alla continuità. Ma così non è. Tale proprietà geometrica (proprietà di Darboux) è soddisfatta da una classe molto più ampia di funzioni. Si veda la sezione 2.

Veniamo infine alla continuità della funzione inversa.

Teorema 5 (Continuità della funzione inversa definita su un intervallo) *Sia $f : I \to J$ una funzione invertibile e continua in $x_0 \in I$. Sia $f^{-1} : J \to I$ la sua funzione inversa. Allora f^{-1} è continua in $y_0 = f(x_0) \in J$.*

Dimostrazione. Sia $\alpha < f^{-1}(y_0) < \beta$. Ovvero $\alpha < x_0 < \beta$. Scegliamo $\delta < \min(x_0 - \alpha, \beta - x_0)$. Per questa scelta abbiamo $\alpha < x < \beta$ per $x \in I_\delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Ma allora, in I_δ abbiamo

$$\alpha < x < \beta \Rightarrow \alpha < f^{-1}(f(x)) < \beta \Rightarrow \alpha < f^{-1}(y) < \beta$$

per $y = f(x) \in f(I_\delta)$. Ma, per il Teorema di Bolzano secondo cui le funzioni continue trasformano intervalli in intervalli, $f(I_\delta)$ è un intorno di y_0. Da cui la continuità di f^{-1} in y_0. $\square$

Nello stesso ordine di idee è possibile derivare il teorema di Weierstrass, col solito trucco di *estendere il più possibile* la proprietà desiderata. Ovvero mostrando che l'estremo superiore dei punti $x \in [a, b]$ per cui una funzione continua f è limitata in $[a, x]$ è proprio l'estremo b. E successivamente che il limite superiore M di f è raggiunto in $x_0 = \sup\{x \in [a, b] \ : \ f(x) < M\}$.

Funzioni continue e valori intermedi

La notevole proprietà geometrica di trasformare intervalli in intervalli è una caratteristica fondamentale delle funzioni continue (Teorema di Bolzano). Essa è stata a lungo ritenuta in qualche modo equivalente alla continuità. Ma così non è. Un possibile controesempio è il seguente

Una funzione discontinua che soddisfa la proprietà dei valori intermedi

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

non è continua in $x_0 = 0$ ma soddisfa la proprietà dei valori intermedi.

Dimostrazione. Cominciamo col mostrare che la funzione f non è continua in $x_0 = 0$. Essendo $f(0) = 1$, consideriamo ad esempio la disuguaglianza $1 = f(0) > \frac{1}{2}$. Verifichiamo che la disuguaglianza in oggetto non può essere soddisfatta in nessun intorno dell'origine. Infatti, abbiamo ad esempio che $\sin(k\pi) = 0$ quale che sia l'intero $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto, posto $x_k = \frac{1}{k\pi}$ abbiamo che $f(x_k) = \sin(\frac{1}{x_k}) = \sin(k\pi) = 0$. Abbiamo quindi infiniti valori in cui la funzione f si annulla. Ma, considerato un qualsiasi intorno $I =]-\delta, +\delta[$ dell'origine è possibile scegliere k in modo da avere $x_k \in I$. Infatti basta richiedere $x_k < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{k\pi} < \delta \Leftrightarrow k > \frac{1}{\pi\delta}$. Ma allora avremmo che $0 = f(x_k) < \frac{1}{2}$, e pertanto la disuguaglianza iniziale non può essere estesa ad un intorno. Nello stesso ordine di idee, sfruttando le oscillazioni della funzione seno, possiamo mostrare che la funzione f, pur essendo discontinua, verifica la proprietà dei valori intermedi. Sia dunque $f(x_1) < y < f(x_2)$. Verifichiamo che esiste $x \in]x_1, x_2[$ tale che $f(x) = y$. Se i punti x_1, x_2 stanno entrambi nella stessa semiretta allora non c'è nulla da verificare. In quelle zone la f è una funzione continua, essendo composta di funzioni continue, e possiamo applicare direttamente il teorema di Bolzano. Il caso dubbio è dunque quello in cui $x_1 < 0 < x_2$. Ora, essendo la nostra funzione a valori in $[-1, 1]$, la continuità della funzione seno assicura l'esistenza di un $x \in \mathbb{R}$ tale che $\sin x = y$. Per periodicità ne troviamo infiniti altri $x'_k = x + 2k\pi$. Con il trucchetto di prima ne troviamo almeno uno positivo nell'intervallo $]x_1, x_2[$. In effetti, ponendo $x_k = \frac{1}{x'_k}$, per la positività è sufficiente che sia $k > -\frac{x}{2\pi}$. Mentre per soddisfare l'altra condizione basta richiedere $x_k < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2k\pi} < x_2 \Leftrightarrow k > \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{x_2} - x\right)$. Le due richieste insieme producono $x_1 < 0 < x_k < x_2$ e $f(x_k) = \sin(x'_k) = y$. □

Tale proprietà geometrica (proprietà di Darboux) è in realtà soddisfatta da una classe molto più ampia di funzioni. Come ad esempio tutte quelle che sono derivata di qualcosa.

Teorema 6 (Darboux). *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile in I. Se $f'(x_1) < 0 < f'(x_2)$ allora esiste $c \in I$ tale che $f'(c) = 0$.*

Dimostrazione. Sia ad esempio $x_1 < x_2$. Essendo una funzione continua, per il Teorema di Weierstrass, la funzione assume minimo e massimo in $K = [x_1, x_2] \subset I$. Essendo $f'(x_1) < 0$, la f è localmente decrescente in x_1 (per la permanenza del segno del limite del rapporto incrementale). Pertanto x_1 non può essere il punto di minimo di f in K. D'altronde, essendo $f'(x_2) > 0$, la f è localmente crescente in x_2. Pertanto, nemmeno x_2 è di minimo per f in K. Ma allora tale punto di minimo si deve trovare in $]x_1, x_2[$ e per la condizione necessaria di Fermat tale minimo deve avere derivata nulla. □

Per verificare la proprietà dei valori intermedi, se $f'(x_1) < \alpha < f'(x_2)$ è sufficiente considerare la funzione $f(x) - \alpha x$ e applicare il teorema precedente.

Naturalmente, il fatto è che non tutte le funzioni derivabili hanno la derivata continua. A tal fine si consideri ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Essendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

la funzione f è derivabile e la sua derivata vale

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Ma la f' non è continua giacché il $\lim_{x\to 0} f'(x)$ non esiste. Oppure, non volendo utilizzare i limiti dato che ci eravamo impegnati ad utilizzarli il meno possibile, basti considerare punti della forma $x_k = \frac{1}{2k\pi}$ per cui $f'(x_k) = \frac{1}{k\pi}\sin(2k\pi) - \cos(2k\pi) = -1$. Pertanto ad esempio la disuguaglianza $-\frac{1}{2} < f'(x) < \frac{1}{2}$ non può valere in nessun intorno dell'origine. L'esempio mostrato fornisce una funzione discontinua soltanto in un punto. Ma, a partire da questo esempio, *rimpicciolendo e incollando* copie di questa funzione, è possibile ottenere funzioni derivabili la cui derivata è discontinua in molti, tantissimi punti. Anzi, con una costruzione di tipo *frattale* è possibile costruire funzioni derivabili la cui derivata è discontinua *quasi ovunque*, ovvero dappertutto tranne che per un insieme di misura (secondo Lebesgue) nulla. Tuttavia, non è possibile far meglio (o peggio a seconda del punto di vista) di così. Si può infatti anche dimostrare che la derivata di una funzione su un intervallo non può essere discontinua dappertutto. La difficoltà nel maneggiare questi concetti è forse il fatto che le discontinuità della derivata non possono essere di prima specie, come si può mostrare come valido esercizio (qui utilizziamo il formalismo dei limiti giacché usualmente è attraverso di esso che si classificano le discontinuità).

Esercizio 1. Sia f' la derivata di una funzione f su un intervallo I. Mostrare che f' non può avere discontinuità di prima specie.

Soluzione. Supponiamo che x_0 sia un punto di salto per f' in x_0. Supponiamo dunque che esistano i limiti a destra e a sinistra con ad esempio

$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x) = A < B = \lim_{x\to x_0^+} f'(x).$$

Per il Teorema dei valori intermedi di Lagrange esiste $\psi(x) \in (x, x_0)$ tale che $f'(\psi(x)) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. D'altra parte, essendo $\psi(x) \to x_0$ per $x \to x_0$, sfruttando la derivabilità di f in x_0 avremmo la contraddizione

$$A = \lim_{x\to x_0^-} f'(\psi(x)) = f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f'(\psi(x)) = B.$$

□

Il fenomeno delineato per le derivate ha naturalmente una validitá generale. Una funzione che soddisfi la proprietà dei valori intermedi non può avere discontinuità di prima specie.

Esercizio 2. Una funzione f su un intervallo I che verifichi la proprietà dei valori intermedi non può avere discontinuità di prima specie.

Soluzione. Sia per assurdo x_0 un punto di discontinuità di prima specie con ad esempio

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A < \alpha < \beta < B = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Per la permanenza del segno, possiamo trovare un intorno sinistro I^- ed uno destro I^+ di x_0 per cui $f(x) < \alpha$ in I^-, mentre $\beta < f(x)$ in I^+. Ma, essendo valida la proprietà dei valori intermedi troviamo due valori $x_1 \in I^-, x_2 \in I^+$ tali che $f(x_1) = \alpha$ e $f(x_2) = \beta$. Trattandosi di due valori distinti, ovviamente almeno uno dei due è diverso da x_0. Supponiamo che sia ad esempio x_1. Allora, se $x_1 < x_0$ avremmo $f(x_1) < \alpha$ (contraddizione). Se invece $x_1 > x_0$ allora $\beta < f(x_1) = \alpha < \beta$ (ancora una contraddizione). $\square$

Le funzioni di Darboux possono in generale essere *totalmente discontinue*. Si deve a H. Lebesgue uno dei primi esempi di funzione che soddisfa la proprietà dei valori intermedi pur essendo discontinua in tutti i punti del suo dominio (in particolare si tratta di una funzione che non è una derivata di qualche altra funzione).

Dunque, derivate discontinue e funzioni di Darboux ci costringono a pensare delle funzioni che, in un certo senso, non possono essere disegnate. Ma la matematica esiste anche e soprattutto per questo: *rendere visibile l'inimmaginabile*. Così è possibile costruire funzioni continue che non sono mai derivabili (*mostro di Weierstrass*) o funzioni crescenti con derivata (quasi ovunque) nulla (la cosiddetta funzione di Cantor-Vitali o *scala del diavolo*), per cui, tra le altre cose, non vale il Teorema fondamentale del calcolo integrale. Ma si tratta di questioni che esulano dai nostri scopi. Un riferimento per tali problematiche è ad esempio [2].

La formulazione $\varepsilon - \delta$

Natura non facit saltus.
Carl von Linné

Se interpretiamo una funzione f come qualcosa che alla variabile x associa un effetto quantificato da $f(x)$, diremo che f è continua se a *piccole* variazioni della variabile corrispondono *piccole* variazioni degli effetti. Questo è ad esempio quello che per lo più succede nel gioco del biliardo. Il giocatore esperto sa che se colpisce la biglia in un certo punto, questa seguirà una certa traiettoria, per finire direttamente in buca. Ora, anche se si tratta di un campione dalla vista acuta e dalla mano ferma, difficilmente il giocatore riuscirà a colpire la biglia esattamente nel punto voluto e con la forza necessaria. Ma questo non è un problema. Se il fenomeno è continuo, sapiamo che se la stecca colpisce la biglia in un punto appena appena spostato rispetto a quello ideale, la biglia seguirà comunque una traiettoria molto vicina a quella immaginata, e con tutta probabilità andrà ancora a cadere in buca. Non tutto naturalmente è continuo. Ad esempio, tipicamente le tasse vengono pagate in modo discontinuo. Ad esempio, considerando un Ateneo in cui gli studenti con reddito inferiore a 500 euro non pagano alcuna tassa, mentre fino a 1000 euro una tassa calcolata al 10% del reddito e oltre i mille euro al 20%. Allora, basta una piccolissima variazione, guadagnando ad esempio 500 euro e un centesimo, per avere una considerevole variazione degli effetti. Una formalizzazione di queste condizioni conduce alla seguente

Definizione 2 (Continuità: formulazione $\varepsilon - \delta$) *Una funzione* $f : D \to \mathbb{R}$ *si dice continua in un punto* $x_0 \in D$ *se*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \textit{ tale che } \forall x \in D:\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \qquad (1)$$

f *si dice continua in* D *se lo è in tutti i suoi punti.*

In questa definizione ε quantifica la piccolezza nella variazioni degli effetti, δ invece quantifica la piccolezza delle variazioni della variabile. Allora, una funzione è continua se la variazione degli effetti può essere resa piccola quanto vogliamo ($\forall \varepsilon > 0$), ad esempio per assicurarci che la biglia vada in buca, scegliendo una opportuna *piccolezza* ($\delta > 0$) nella variazione delle variabili (scostamento massimo consentito nello scoccare il colpo). Tale formulazione *cattura* il senso della continuità in modo statico, come il senso di continuità nella scena di un film è prodotto dalla rapida successione delle immagini statiche della pellicola. Fissare un $\varepsilon > 0$, da questo punto di vista, significa fissare un *fotogramma vicino* agli altri. Per ingannare l'occhio umano e produrre il senso del movimento a partire da fotogrammi statici, questi devono essere proiettati in rapida sequenza, ad esempio 24 al secondo come è comune nella cinematografia. Se vogliamo, per *ingannare la natura* serve invece un'infinità di fotogrammi ($\forall \varepsilon > 0$). La (1) non è di facile assimilazione. Ricorrendo alla precedente immagine del biliardo, possiamo ancora interpretarla come una *scommessa di precisione*. Scegliendo una posizione $y_0 = f(x_0)$ si chiede al giocatore di mandare la palla vicino alla destinazione y_0 con una sempre maggiore precisione (quantificata da $\varepsilon > 0$). Se il giocatore riesce ogni volta a spedire la palla ad una posizione $y = f(x)$ che disti da quella richiesta y_0 meno della precisione richiesta ε, vince. Se la funzione f in oggetto è continua allora il giocatore può vincere sempre la scommessa. Basta che ad ogni richiesta di precisione ε lui risponda con il δ prodotto dalla (1). Colpendo la biglia con precisione inferiore a δ si è sicuri di spedire la biglia a destinazione con precisione inferiore ad ε.

Come ci si aspetta, le due nozioni di continuità introdotte sono perfettamente equivalenti.

Teorema 7. *Una funzione è continua nel senso della* (1) *se e soltanto se lo è nel senso della def. 1.*

Dimostrazione. Sia f continua nel senso della (1) e sia $\alpha < f(x_0) < \beta$. Prendiamo $\varepsilon < \min(f(x_0) - \alpha, \beta - f(x_0))$. In corrispondenza di questo $\varepsilon > 0$ possiamo determinare un $\delta > 0$ tale che $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Per $x \in I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D$ risulta

$$\alpha < f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon < \beta$$

e dunque f è continua nel senso della def. .

Viceversa, sia ora f continua nel senso della def. . Considerato un qualunque $\varepsilon > 0$, si ponga $\alpha = f(x_0) - \varepsilon$ e $\beta = f(x_0) + \varepsilon$. Pertanto $\alpha < f(x_0) < \beta$. Per la def. troviamo un intorno I di x_0 tale che $\alpha < f(x) < \beta$ per $x \in I \cap D$. Trattandosi di un intorno possiamo determinare un $\delta > 0$ tale che $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$. Dunque

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow x \in I \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon = \alpha < f(x) < \beta = f(x_0) + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

□

Praticamente, in questa formulazione le strisce del piano sono individuate da $\alpha = f(x_0) - \varepsilon$ e $\beta = f(x_0) + \varepsilon$.

Continuità uniforme

La nozione di continuità uniforme è spesso omessa o trascurata, specialmente a livello di scuola superiore. Un cenno, seppur circoscritto, ci appare doveroso soprattutto nell'ottica dell'integrazione delle funzioni continue, dove l'uniforme continuità delle funzioni continue negli intervalli chiusi e limitati è l'ingrediente fondamentale che ne assicura l'integrabilità. Come detto, la nozione di continuità è puntuale. Nella definizione 1 qui adottata le disuguaglianze considerate valgono in un intorno di x_0. Ma cambiando il punto del dominio, l'intorno in cui sono verificate le disuguaglianze richieste dalla continuità può cambiare, ad esempio diventando sempre più piccolo. In altre parole, l'intorno può essere a priori variabile e dipendere dal punto considerato. Mentre in altre occasioni, come ad esempio per la funzione costante con l'intorno $I = \mathbb{R}$, uno stesso intorno può funzionare ugualmente bene per tutti i punti. Questo accade anche per la funzione $f(x) = ax + b$, per la quale gli intorni possono essere presi tutti della forma $]\frac{\alpha - b}{a}, \frac{\beta - b}{a}[$ nella striscia delimitata da α, β. In questi casi la nozione di continuità diventa *globale* valendo *uniformemente* su tutti i punti del dominio. Ma questi sono casi davvero speciali e in genere questo non accade. Si veda ad esempio il prossimo esempio con la funzione $f(x) = x^2$. In termini di $\varepsilon - \delta$, la nozione locale di continuità si traduce nel fatto che la scelta di $\delta > 0$ può dipendere anche dal punto x_0, oltre che da $\varepsilon > 0$. In altre parole, $\delta > 0$ può anche variare da punto a punto. Quando invece si può effettuare una scelta di $\delta > 0$ indipendente dal punto, si dice che la funzione è uniformemente continua. In tal caso potremo dire che punti *vicini* tra loro hanno immagini *vicine* tra loro. La relativa definizione di funzione f uniformemente continua in A è allora la seguente

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ tale che } \forall x, y \in A: \; |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \qquad (2)$$

Ovviamente, ogni funzione uniformemente continua è a maggior ragione una funzione continua.

Esempio 3. La scelta di δ dipende anche dal punto x_0 oltre che da ε. In effetti in generale non si può far molto di meglio. La funzione $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua. Infatti, se lo fosse ci sarebbero gli ε, δ previsti dalla (2). Per $x > 0$ si consideri $y = x + \frac{\delta}{2}$ per cui $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Ma allora per definizione di continuità uniforme dovrebbe essere $|x^2 - y^2| < \varepsilon$. D'altra parte

$$|x^2 - y^2| = \left| x^2 - x^2 - \frac{\delta^2}{4} - \delta x \right| = \left| \delta x + \frac{\delta^2}{4} \right| > \delta x.$$

Scegliendo allora $x > \frac{\varepsilon}{\delta}$ si avrebbe la contraddizione $|x^2 - y^2| > \varepsilon$.

Tuttavia la relazione tra continuità ed uniforme continuità è piuttosto stretta. Basta ridursi ad un intervallo chiuso e limitato affinché le due nozioni diventino interscambiabili tra loro (Teorema di Heine-Cantor). Un modo abbordabile senza dover introdurre troppe nozioni nuove è a nostro avviso quella di introdurre la proprietà di Heine-Borel per gli intervalli chiusi e limitati che permette di passare da condizioni locali a condizioni globali. A tal fine si consideri un insieme I. Per $x \in I$ sia I_x un intervallo aperto contenente $x \in I$. Diremo che la famiglia di intorni I_x è un *ricoprimento aperto* di I. Un ricoprimento di I è cioè costituito da una famiglia di insiemi la cui unione contiene per intero l'insieme I. Ora, per ricoprire l'intero insieme I si può in genere ridurre il numero di intorni, giacché diversi punti di I potrebbero appartenere allo stesso intorno. Parleremo allora di un sottoricoprimento. Il meglio che ci auguriamo in questo caso è di poter ricoprire l'insieme con un numero **finito** di intorni scelti dalla famiglia di intorni di partenza. Diremo che

Definizione 3 (Proprietá di Heine-Borel). *Un insieme I soddisfa la proprietà di Heine-Borel se ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.*

Il fatto notevole è che tutti gli insiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ soddisfano tale proprietà

Teorema 8 (Heine-Borel). *Tutti gli intervalli $[a, b]$ soddisfano la proprietà di Heine-Borel.*

Dimostrazione. Sia $I_x =]x - \delta_x, x + \delta_x[$ una famiglia di intorni aperti che ricopre $[a, b]$. Si consideri l'insieme

$$A := \{x \in [a, b] \ : \ [a, x] \text{ ammette un sottoricoprimento finito}\}.$$

Vogliamo verificare che $b \in A$. Intanto ovviamente $a \in A \neq \emptyset$ bastando in tal caso a ricoprire A l'intorno I_a. Utilizzando l'assioma di completezza, possiamo allora considerare $x_0 = \sup A$. Ovviamente $x_0 \leq b$. Se fosse $x_0 < b$ allora l'intorno I_{x_0} coprirebbe anche punti più piccoli di $x_0 + r$ con $x_0 + r \in I_{x_0}$. In altre parole avremmo che anche $[a, x_0 + r]$ ammetterebbe un sottoricoprimento finito e pertanto si otterrebbe la contraddizione $x_0 + r \leq x_0 = \sup A$ essendo $x_0 + r \in A$. Pertanto $x_0 = b$. Essendo $b = \sup(A)$ possiamo determinare $r > 0$ tale che $[b - r, b + r] \subset I_b$, con $b - r \in A$. Allora $[a, b - r]$ ammette un sottoricoprimento finito. Aggiungendo I_b a tale sottoricoprimento si ottiene un sottoricoprimento finito di $[a, b]$. □

Il potersi restringere ad un numero finito di intorni è un passo cruciale. Ad esempio, dalla definizione () di funzione continua segue immediatamente che le funzioni continue sono tutte localmente limitate. Allora, per la proprietà di Heine-Borel l'intervallo $[a, b]$ si può coprire con un numero finito di tali intervalli su ciascuno dei quali la funzione è limitata. Prendendo il più grande limite superiore (tra un numero finito) si ottiene il fatto che la funzione continua è (globalmente) limitata in $[a, b]$. Seguendo una linea similare possiamo enunciamo finalmente il seguente

Teorema 9 (di Heine-Cantor). *Ogni funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$, consideriamo $\frac{\varepsilon}{2}$ (visto che vorremo in seguito considerare due contributi prodotti dalla disuguaglianza triangolare). Ad ogni $x \in [a, b]$ possiamo associare il $\delta_x > 0$ che proviene dalla definizione di continuità di f nel punto x. Ovvero $|y-x| < \delta_x \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. La famiglia di intorni $I_x =]x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2}[$ è un ricoprimento aperto di $[a, b]$. Per la proprietà di Heine-Borel, possiamo ridurci ad un sottoricoprimento finito, diciamo dato dagli x_i per $i = 1, \cdots, n$. Consideriamo allora $\delta < \min\left(\frac{\delta_{x_1}}{2}, \cdots, \frac{\delta_{x_n}}{2}\right)$. Siano $x, y \in [a, b]$ due qualsiasi punti tali che $|x - y| < \delta$. Trattandosi di un ricoprimento, questi punti apparteranno a qualcuno degli intorni del sottoricoprimento finito trovato. Sia ad esempio $x \in I_{x_i}$. Allora

$$|y - x_i| \leq |y - x| + |x - x_i| < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} < \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta_{x_i}}{2} = \delta_{x_i}.$$

Andiamo allora a valutare la distanza tra le immagini

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Alcune considerazioni finali

La definizione geometrica di continuità qui delineata potrebbe essere introdotta anche molto prima della trattazione sistematica dell'analisi matematica, già a livello di biennio di scuola secondaria superiore, una volta che sia acquisita una minima padronanza delle disuguaglianze algebriche. Un possibile percorso potrebbe legare la nozione di continuità alla geometria euclidea e poi alla geometria analitica. In fondo il Teorema degli zeri è se vogliamo una generalizzazione dell'assioma di separazione del piano o dell'intersezione tra circonferenze. Oltre ad inquadrare i problemi di continuità della geometria, compresa quella analitica, un tale approccio avrebbe il vantaggio non secondario di incorporare la geometria in un quadro unitario sottraendola alla diffusa percezione di corpo estraneo inserito di punto in bianco (talvolta malvolentieri) nel curricolo scolastico. Un'ulteriore prospettiva è quella di prendere sin da subito confidenza (apprezzandone l'importanza) di questo nodo cruciale dell'analisi matematica, consentendo poi un'assimilazione più *naturale* del concetto di *limite* nonché, sempre nell'ottica di una cornice unitaria degli insegnamenti di matematica, consentire la giustificazione di molte questioni importanti man mano che esse si presentano, piuttosto che (come anche molti libri di testo fanno) semplicemente *sorvolarle* di sana pianta, oppure riconducendole a teorie più avanzate, o ancora rimandandole a chissà quando. Possiamo pensare ad esempio alla questione dell'esistenza dei radicali, che si può agevolmente ottenere come applicazione del Teorema degli Zeri. O ancora alla definizione di funzione esponenziale, che in genere viene ricondotta ad una fantomatica estensione della potenza ad esponente razionale a quella ad esponente reale. Una definizione geometrica permetterebbe invece una introduzione meno involuta (e assicurandone la continuità) degli esponenziali (si veda [6,8]) e più in generale delle funzioni elementari. Naturalmente, il percorso abbozzato in questo articolo contiene spunti e discussioni che in diversi punti potrebbero essere considerate *troppo avanzate* per il livello liceale. A dispetto del fatto che l'estensione dai razionali ai reali dell'esponenziale, o la locale integrabilità delle funzioni continue, utilizzano tacitamente la nozione di uniforme continuità, certamente non si deve pensare che in classe si debba e/o si possa far tutto e/o dimostrare tutto. Ma uno degli obiettivi principali dell'insegnamento della matematica dovrebbe consistere nel presentare un quadro ampio della disciplina e soprattutto *aperto*, lasciando intravedere tutto il vasto mondo matematico che ci attende là fuori, suscitando la curiosità a saperne di più, molto di più. Così, molti degli spunti tratteggiati in questo articolo potrebbero servire anche da stimolo o sfida per l'insegnante e per lo studente all'approfondimento, alla proposta di esercizi e problemi che abbiano anche uno scopo esplorativo, conoscitivo e non soltanto allo scopo di addestrare a tecniche di calcolo. A che serve, ad esempio, proporre una dettagliata classificazione dei punti di discontinuità di una funzione se poi non si propongono mai dei contesti significativi nei quali tali nozioni sono importanti? Oltre a motivazioni di completezza, la presentazione di questi argomenti può essere occasione per gettare lo sguardo oltre i tradizionali contenuti didattici. Ad esempio, Il Teorema di Weiersrtass è il fondamento essenziale di tutte le teorie di *ottimizzazione*. E la sua validità è strettamente collegata alla *dimensione*. Ma spesso, ad esempio per risolvere alcune equazioni differenziali, occorre lavorare in spazi di funzioni che hanno *dimensione infinita*. Ma in tale contesto la nozione di *intervallo chiuso e limitato* deve essere generalizzata al concetto di *insieme compatto*, e la la proprietà di Heine-Borel è proprio uno dei modi possibili per considerare tale nozione. Anche il Teorema di Heine-Cantor è indipendente dalla dimensione (a patto di considerare domini compatti). Il fatto è che gli insiemi chiusi e limitati coincidono con quelli compatti solo in dimensione finita. Un semplice conseguenza è che (in dimensione finita) le funzioni continue sono localmente uniformemente continue. Visto che l'appetito vien mangiando, a tal proposito ci limitiamo ad osservare che questa proprietà non è in generale vera in dimensione infinita, si possono addirittura trovare funzioni continue che non sono localmente uniformemente continue in nessun punto.

Bibliografia

[1] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrentev, Le Matematiche, Bollati Boringhieri, 1977.

[2] R.P. Boas, A Primer in Real Functions, AMS, 1996.

[3] R. Courant, H. Robbins, Che Cos'è la Matematica, Bollati Boringhieri, 2000.

[4] L. Granieri, Geometria Piana, per il biennio della scuola secondaria superiore, in preparazione.

[5] L. Granieri, Matematica, per la scuola secondaria superiore, in preparazione.

[6] L. Granieri, Elementare Watson!, La Dotta, 2018.

[7] L. Granieri, Retta reale e geometria metrica, in preparazione.

[8] L. Granieri, Al ritmo naturale del logaritmo, MatematicaMente N. 282-283, 2021.

[9] G. Prodi, Riflessioni sull'insegnamento dell'analisi matematica, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate Vol. 16 N. 5-6, Maggio-Giugno 1993.