Sulla misura del cerchio

Luca Granieri

Dato un cerchio C_r di raggio $r > 0$, tutti sanno che la sua area è data da $\mathcal{A}(C_r) = \pi r^2$, mentre il perimetro è dato da $\mathcal{P}(C_r) = 2\pi r$. Queste ben note formule che ci accompagnano sin dai primi anni di scuola, nascondono però molte questioni profonde. In effetti, cosa dobbiamo intendere per area e perimetro di una figura *curva*, come il cerchio appunto? Che cos'è quel misterioso simbolo π? Potremmo cominciare, come esercizio d riscaldamento, con un approccio sperimentale. Da questo punto di vista, il perimetro di una figura sembra una quantità molto più accessibile rispetto alla sua area. Basta infatti disporre uno spago lungo il suo bordo per averne una misura ragionevole. Per il cerchio, anche la valutazione del raggio mediante il nostro spago è ragionevolmente semplice. Allora possiamo raccogliere tutti gli oggetti circolari che ci capitano sotto mano per misurarne perimetro $\mathcal{P}$ e raggio r. Se rappresentiamo i dati raccolti in un grafico $(r, \mathcal{P})$ come in figura 1,

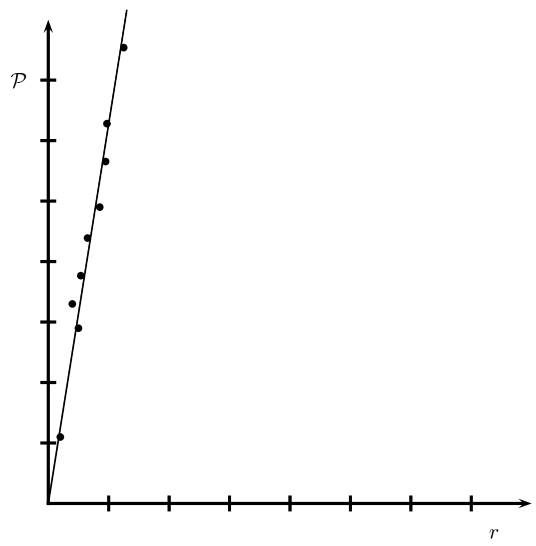

Figura 1: retta che meglio approssima i dati raccolti.

questi si adattano più o meno bene al grafico di una retta passante per l'origine. Ma allora le due grandezze rappresentate devono essere tra loro proporzionali. Dunque la pendenza della retta nel grafico così ottenuto è una misura della quantità 2π.

Tuttavia, anche il caso del cerchio ci pone problemi molto seri e delicati. Cosa dobbiamo intendere per lunghezza di una curva? E come si calcola l'area racchiusa da una curva? Usualmente, per misurare le lunghezze ci si serve del righello. Si sceglie cioè un segmento come unità di misura e lo si confronta con la lunghezza da misurare. Data una curva, possiamo prendere un certo numero di punti su di essa e congiungerli con un segmento. Una misura approssimata della lunghezza della curva è costituita dalla lunghezza della spezzata (poligonale) così ottenuta. Aumentando il numero di punti, a causa della disuguaglianza triangolare, la lunghezza della poligonale aumenta sempre di più e l'approssimazione della lunghezza della curva diventa mano a mano migliore. Se le lunghezze così ottenute non crescono a dismisura, sono cioè limitate superiormente come si dice, allora la successione delle lunghezze delle poligonali è limitata da qualche valore, ognuno dei quali è detto maggiorante. A questo punto è naturale considerare come migliore approssimazione possibile il più piccolo possibile tra questi maggioranti che, per definizione, è chiamato estremo superiore. Pertanto è ragionevole prendere questo estremo superiore come misura della lunghezza della curva. Similmente, nel caso delle figure piane, possiamo prendere come unità di misura il quadrato di lato unitario e contare quanti quadrati sono contenuti nella figura. Suddividendo poi il quadrato unitario in sottomultipli sempre più piccoli, si ottiene una approssimazione via via migliore dell'area della figura. Questa approssimazione definisce un numero reale che esprime l'area della figura (figura 2). Dunque, la lunghezza di una curva γ è data dalla quantità

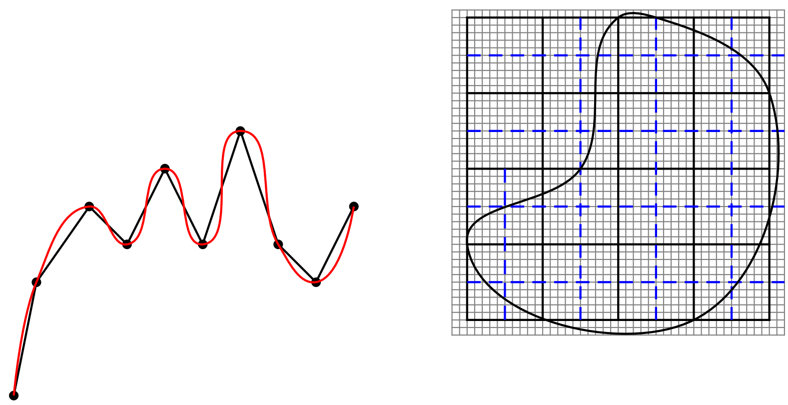

Figura 2: misura per approssimazione di perimetro e area di una figura

$$l(\gamma) = \sup\{l(P) : P \subset \gamma\},$$

dove abbiamo indicato con $P \subset \gamma$ la generica poligonale inscritta nella curva γ e con $l(P)$ la sua lunghezza, data ovviamente dalla somma delle lunghezze dei segmenti che la compongono. Similmente potremo definire l'area di una figura piana tramite la suguente quantità

$$A(S) = \sup\{A(P) : P \subset S\},$$

dove abbiamo indicato con $P \subset S$ la generica unione di quadratini (disgiunti), detta anche plurirettangolo, inclusi nella figura S e con $A(P)$ la somma delle loro aree. Si osservi che da queste definizioni segue immediatamente che aree e perimetri sono invarianti rispetto a trasformazioni isometriche. La procedura sommariamente appena descritta corrisponde alla misura di Peano-Jordan e alla teoria dell'integrazione secondo Riemann di cui è possibile aver sentito parlare già durante gli ultimi anni di scuola superiore.

Consideriamo ora, nel piano cartesiano, il cerchio di centro l'origine e raggio uno, la cui equazione è data dalla ben nota formula $x^2 + y^2 = 1$. Allora, se consideriamo il quarto di cerchio contenuto nel primo quadrante delle coordinate positive, questo è il sottografico della funzione $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Allora, per definizione di integrale, la sua area è data da

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\ dx.$$

Integrando, ad esempio per parti, si trova che la funzione

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x\right)$$

è una primitiva di f. Allora, per le ben note proprietà dell'integrazione si ottiene

$$A(C_1) = 4\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} = 4\,(F(1) - F(0)) = \pi.$$

Ma abbiamo veramente misurato l'area del cerchio? Sì e no. Il fatto è che per valutare le funzioni goniometriche come $\arcsin x$ abbiamo bisogno in realtà della misura in radianti di un angolo, e quindi in ultima analisi della lunghezza di archi di cerchio. Quindi, alla fine, abbiamo sì misurato l'area del cerchio, ma a patto di saperne misurare il perimetro. Tale approccio può anche essere ribaltato, si veda ad esempio [6], ottenendo il perimetro del cerchio a partire dalla misura della sua area.

1 Omotetie

Una omotetia di parametro $r > 0$ è una trasformazione del piano definita da $f_r(x, y) = (rx, ry)$. Dato un punto $P(x, y)$ del piano, indichiamo con $P'(rx, ry) = f_r(P)$ l'immagine di P tramite l'omotetia f_r. Analogamente, per ogni sottoinsieme B indicheremo con $B' = f_r(B)$. Evidentemente, si ha che

$$d(P', Q') = rd(P, Q), \tag{1}$$

dove $d(P, Q)$ denota l'usuale distanza euclidea tra i punti P e Q. Considerato il quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$, abbiamo che $A(Q') = r^2$, mentre $\mathcal{P}(Q') = 4r$. Pertanto, se Q_r è il quadrato di raggio $r > 0$, a causa di (1) valgono le formule

$$A(Q_r) = A(Q_1') = A(Q_1)r^2, \quad \mathcal{P}(Q_r) = \mathcal{P}(Q_1') = \mathcal{P}(Q_1)r = 4A(Q_1)r.$$

Quindi, le dimensioni del quadrato, come era lecito aspettarsi, variano con la potenza r per il perimetro e la potenza r^2 per l'area. Inoltre area e perimetro dipendono da delle costanti che sono una il quadruplo dell'altra. Questo è un fatto abbastanza generale vero per qualsiasi figura S (misurabile). Abbiamo infatti il seguente

Teorema 1.
$$\mathcal{P}(S') = \mathcal{P}(S)r, \quad A(S') = A(S)r^2.$$

Dimostrazione. Per dimostrare l'uguaglianza per i perimetri dobbiamo verificare che per ogni curva γ risulta $l(\gamma') = rl(\gamma)$. Sia dunque $Q' \subset \gamma'$ una poligonale inscritta in γ'. Detti $P'_i, i = 1, \dots, n$ i suoi vertici, poichè i punti P_i corrispondono ad una poligonale inscritta in γ, usando la (1) abbiamo che

$$l(Q') = \sum_{i=1}^{n-1} d(P'_i, P'_{i+1}) = r \sum_{i=1}^{n-1} d(P_i, P_{i+1}) \leq rl(\gamma).$$

Allora, $rl(\gamma)$ è un maggiorante per le lunghezze delle poligonali inscritte in γ'. Ma poichè l'estremo superiore è il più piccolo tra i maggioranti otteniamo che

$$l(\gamma') \leq rl(\gamma).$$

Per ottenere la disuguaglianza opposta partiamo questa volta da una poligonale $Q \subset \gamma$. Poichè ovviamente $Q' \subset \gamma'$ otteniamo

$$rl(Q) = r \sum_{i=1}^{n-1} d(P_i, P_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} d(P'_i, P'_{i+1}) \leq l(\gamma') \Rightarrow l(Q) \leq \frac{l(\gamma')}{r}.$$

Passando all'estremo superiore come prima si ottiene $l(\gamma) \leq \frac{l(\gamma')}{r}$. La dimostrazione per la formula relative alle aree è del tutto simile sostituendo le poligonali con plurirettangoli. □

Il risultato appena ottenuto ci consente quindi di misurare e confrontare aree e perimetri di figure tra loro omotetiche. Per quanto riguarda il cerchio, l'osservazione fondamentale è proprio che tutti i cerchi sono omotetici tra loro. Basta porre i centri nell'origine degli assi come in figura 3.

Dunque, $C_r = C'_1$. Pertanto, dal Teorema 1 segue che

$$\mathcal{P}(C_r) = \mathcal{P}(C_1)r, \quad A(C_r) = A(C_1)r^2.$$

Ma qual è il legame tra le due costanti $\mathcal{P}(C_1)$ e $A(C_1)$? A questo rispondevano già gli antichi greci, si veda ad esempio [5, 7],

Teorema 2 (di Archimede)**.** *L'area del cerchio è pari a quella di un triangolo che ha per base la circonferenza ed altezza pari al raggio.*

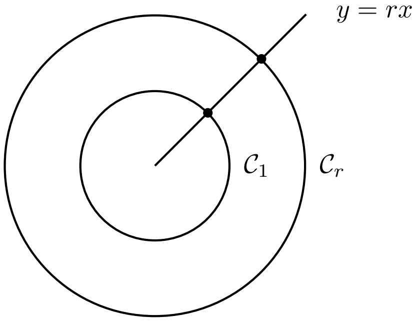

Figura 3: Le rette del tipo $y = mx$ determinano una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_r$.

Dunque, il Teorema di Archimede afferma che $A(\mathcal{C}_1) = \frac{1}{2}\mathcal{P}(C_1)$. Pertanto le due costanti relative al perimetro e all'area del cerchio unitario sono una il doppio dell'altra. Se chiamiamo $\pi = A(C_1)$, allora otteniamo le consuete formule

$$A(C_r) = \pi r^2, \quad \mathcal{P}(C_r) = 2\pi r.$$

Una dimostrazione del risultato di Archimede potrebbe seguire le linee seguenti. Immaginate il cerchio unitario come se fosse uno di quei dischi di vinile che si usavano una volta, con l'accortezza di pensare che i solchi coprano tutto il disco fino al suo centro. Quando la puntina si appoggia sul bordo comincia la musica che prosegue ininterrotta fino a che questa non raggiunge il centro del disco sollevandosi e tornando automaticamente alla sua posizione di riposo. Dunque, quando la musica finisce la puntina ha spazzolato il disco per la sua interezza. In altre parole, se vogliamo possiamo assumere che l'area del disco sia pari al percorso totale impiegato dalla puntina a passare dal bordo al suo centro. Ma la puntina si muove proprio su delle circonferenze che hanno un raggio r variabile che passa man mano da uno fino a zero. Pertanto non dobbiamo far altro che *sommare* tra loro tutti questi cammini circolari. Ma ognuno di questi cammini ha lunghezza pari a $\mathcal{P}(C_1)r$. Poichè $\mathcal{P}(C_1)$ è uguale per ogni cammino, non dobbiamo far altro che sommare tra loro tutti questi raggi. D'altra parte, questi raggi possono esseri posti uno accanto all'altro come se fossero dei bastoncini verticali la cui altezza passa da zero fino ad uno. Ora il gioco è fatto perchè quello che si ottiene è un triangolo la cui area è proprio $\frac{1}{2}$! Abbiamo così ottenuto la relazione di Archimede $A(C_1) = \frac{1}{2}\mathcal{P}(C_1)$. In termini di integrazione, ciò che abbiamo espresso a parole corrisponde al seguente calcolo:

$$A(C_1) = \int_0^1 \mathcal{P}(C_r)\ dr = \int_0^1 \mathcal{P}(C_1)r\ dr = \mathcal{P}(C_1)\int_0^1 r\ dr = \frac{1}{2}\mathcal{P}(C_1).$$

Dunque c'è un legame profondo tra area e perimetro. In parte, ciò è vero per una figura geometrica qualsiasi. Vale infatti la seguente disuguaglianza isoperimetrica

$$A(E) \leq \frac{1}{4\pi}\mathcal{P}(E)^2, \tag{2}$$

valida per qualunque insieme (di perimetro finito) piano E. Il cerchio è una figura speciale anche da questo punto di vista. Esso è l'unica figura piana che realizza l'uguaglianza nella (2). Pertanto, il cerchio possiede l'importante proprietà di racchiudere l'area massima possibile a parità di perimetro. Dalla (2) segue anche la proprietà di avere il perimetro minimo possibile a parità di area. Per giustificazioni e approfondimenti rimandiamo il lettore a [1, 2, 3, 4]

Riferimenti bibliografici

[1] R. Courant and H. Robbins, Che cos'è la Matematica? Boringhieri, 1983.

[2] Piero D'Ancona, Eugenio Montefusco, Il Dubbio di Didone

[3] Enrico Giusti, La Matematica in Cucina, Boringhieri, 2004.

[4] L. Granieri, Matematica per (quasi) tutti, in preparazione.

[5] L. Granieri, Elementi di Matematica, matematica elementare pre-universitaria, in preparazione.

[6] S. Lang, La Bellezza della Matematica, Boringhieri, 2002.

[7] P. Odifreddi, Divertimento Geometrico, Boringhieri, 2003.