Equazioni differenziali ordinarie
Alcuni aspetti del problema di Cauchy

Luca Granieri*

Dicembre 2004

1 Introduzione

Le equazioni differenziali ordinarie nacquero nel settecento come risposta diretta a vari problemi fisici. Inoltre, affrontando fenomeni fisici più complicati, specialmente nello studio delle corde vibranti, i matematici pervennero alle equazioni alle derivate parziali. Nell'ottocento poi, i ruoli di queste due teorie vennero in un certo modo interscambiati; nel senso che spesso si cercava di risolvere equazioni alle derivate parziali riducendosi ad equazioni ordinarie. Naturalmente, man mano che gli studi andavano avanti, ci si trovava difronte ad equazioni sempre più difficili da risolvere. Così i matematici cominciarono a domandarsi: data una equazione differenziale, esiste una sua soluzione che soddisfi a date condizioni iniziali? Tale quesito è noto come *problema di Cauchy*. Nel seguito vengono presentati alcuni teoremi di esistenza e unicità. Nelle dimostrazioni un ruolo chiave è svolto dai teoremi di punto fisso, vedi ad esempio [10].

2 Il problema di Cauchy

Cominciamo con qualche osservazione preliminare sui punti fissi.

Assegnata una funzione $f : E \to E$, indicheremo con $f^p, p \geq 1$, le iterate di ordine p di f definite da:

$$f^1(x) := f(x);\ f^p(x) := f(f^{p-1}(x)).$$

Proposizione 1. *Sia x un punto fisso per f. Allora per ogni $p \in \mathbb{N}^*$, x è punto fisso per f^p.*

Dimostrazione. Ovviamente la tesi è vera per $p = 1$. Supponendola vera per p abbiamo:

$$f^{p+1}(x) = f(f^p(x)) = f(x) = x.$$

□

Proposizione 2. *Sia $p \in \mathbb{N}^*$ tale che x è unico punto fisso per f^p. Allora x è unico punto fisso per f.*

Dimostrazione. Dunque sia $f^p(x) = x$. Per la Proposizione 1 anche $f^{p+1}(x) = x$. D'altronde abbiamo che $f^{p+1}(x) = f(f^p(x)) = f(x)$. Quindi $f(x) = x$.

Se poi ci fosse un ulteriore y tale che $f(y) = y$, ancora per la Proposizione 1 avremmo:

$$f^p(y) = y \Rightarrow x = y,$$

poichè x era l'unico punto fisso di f^p. □

*Dipartimento di Matematica "L. Tonelli"
Università di Pisa, via Buonarroti 2, 56127 Pisa, Italy. granieri@mail.dm.unipi.it

Teorema 1 (di esistenza ed unicità del problema di Cauchy). *Si consideri un intervallo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, uno spazio di Banach $(E, \|\cdot\|)$ e una funzione continua $f : I \times E \to E$. Sia inoltre soddisfatta la condizione:*

$$\exists k > 0 \text{ tale che } \forall x \in I, \forall y_1, y_2 \in E : \|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|. \tag{1}$$

Allora $\forall (x_0, y_0) \in I \times E$ esiste un'unica soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \ . \end{cases} \tag{2}$$

Dimostrazione. Naturalmente, essendo f continua, risolvere il problema di Cauchy (2) equivale a trovare una funzione $y \in \mathcal{C}^1(I, E)$ che verifichi $y'(x) = f(x, y(x))$ in I, e $y(x_0) = y_0$.

Osserviamo ora che tutte e sole le soluzioni del problema di Cauchy sono soluzioni del seguente problema di Liouville:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

Consideriamo dunque lo spazio di Banach $(\mathcal{C}(I, E), \|\cdot\|_\infty)$ (perchè è di Banach?) e l'operatore $\mathrm{T} : \mathcal{C}(I, E) \to \mathcal{C}(I, E)$ definito da

$$(\mathrm{T}y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, (y(t))dt.$$

Per verificare la tesi è allora sufficiente mostrare che T ammette uno ed un solo punto fisso. Tenendo dunque presente il Teorema dei punti fissi di Banach, vedi ad esempio [10], basta verificare che l'operatore T è contrattivo. Valutiamo grazie ad (1) che:

$$\begin{aligned} \|(\mathrm{T}y)(x) - (\mathrm{T}z)(x)\| &= \| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) - f(t, z(t))dt\| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^{x} \|f(t, y(t)) - f(t, z(t))\|dt \leq \\ &\leq k \int_{x_0}^{x} \|y(t) - z(t)\|dt \leq k\, \|y - z\|_\infty\, |x - x_0|. \end{aligned} \tag{3}$$

Verifichiamo ora per induzione che vale la disuguaglianza:

$$\|(\mathrm{T}^n y)(x) - (\mathrm{T}^n z)(x)\| \leq \frac{k^n |x - x_0|^n}{n!} \|y - z\|_\infty \leq \frac{k^n (b - a)^n}{n!} \|y - z\|_\infty. \tag{4}$$

Infatti, la (3) ci assicura che la disuguaglianza è vera per $n = 1$. Verifichiamo allora il passo induttivo:

$$\begin{aligned} \|(\mathrm{T}^{n+1} y)(x) - (\mathrm{T}^{n+1} z)(x)\| &= \|\mathrm{T}(\mathrm{T}^n y)(x) - \mathrm{T}(\mathrm{T}^n z)(x)\| \leq \\ \leq k \int_{x_0}^{x} \|(\mathrm{T}^n y)(t) - (\mathrm{T}^n z)(t)\|dt &\leq k\, \frac{k^n \|y - z\|_\infty}{n!} \int_{x_0}^{x} |t - x_0|^n dt = \\ = \frac{k^{n+1}}{n!} \|y - z\|_\infty \left[\frac{|t - x_0|^{n+1}}{n + 1} \right]_{x_0}^{x} &= \frac{k^{n+1}\, |x - x_0|^{n+1}}{(n + 1)!} \|y - z\|_\infty \leq \\ &\leq \frac{k^{n+1} (b - a)^{n+1}}{(n + 1)!} \|y - z\|_\infty. \end{aligned}$$

Passando all'estremo superiore nella (4) otteniamo:

$$\|\mathrm{T}^n y - \mathrm{T}^n z\|_\infty \leq \frac{k^n (b - a)^n}{n!} \|y - z\|_\infty,$$

ovvero che T^n è Lipschitziano. Poniamo ora $M_n = \frac{k^n(b-a)^n}{n!}$ e consideriamo la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$. Quindi osserviamo che

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = \frac{k^{n+1}(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \, \frac{n!}{k^n(b-a)^n} = \frac{k(b-a)}{n+1}.$$

Passando al limite otteniamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = 0 < 1$. Allora, per il criterio del rapporto, la serie considerata è convergente. In particolare ciò implica che $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$. Dunque, dev'essere $M_p < 1$ per p abbastanza grande. In altre parole abbiamo trovato che l'iterata T^p è contrattiva. Allora, per il Teorema del punto fisso di Banach T^p ammette uno ed un solo punto fisso. Dunque, per la Proposizione 2, anche T ammette uno ed un solo punto fisso, e il teorema è così dimostrato. □

Osservsazione 1. *Nel Teorema 1 l'ipotesi di compattezza dell'intervallo I è essenziale. Inoltre si osservi che necessariamente lo spazio di partenza e di arrivo deve essere lo stesso. Infatti, nel caso di un sottospazio si trovano soluzioni locali. Ad esempio, si può adattare la dimostrazione e verificare che se* $f : [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - s, y_0 + s] \to \mathbb{R}$ *è una funzione continua, con* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *e* $r, s > 0$*, e Lipschitziana rispetto alla seconda variabile, posto* $0 < d \le min(r, \frac{s}{\|f\|_\infty})$*, il relativo problema di Cauchy ammette una ed una sola soluzione in* $I = [x_0 - d, x_0 + d]$*.*

L'ipotesi (1) di Lipschitzianità è essenziale per l'unicità della soluzione. Consideriamo infatti il seguente

Esempio 1. *Nel problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \ , \end{cases}$$

la funzione $f(x,y) = y^{\frac{2}{3}}$ *è definita e continua su tutto* $\mathbb{R}^2$*. Naturalmente, una soluzione è data dalla funzione* $y = 0$*. Se poi* $y \neq 0$*, separando le variabili abbiamo:*

$$y' \, y^{-\frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow \int y' y^{-\frac{2}{3}} dy = x + c \Rightarrow 3 \, y^{\frac{1}{3}} = x + c,$$

ovvero $y = \frac{(x+c)^3}{27}$*. D'altronde* $y(0) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{c^3}{27} \Rightarrow c = 0$*. Pertanto il problema di Cauchy ammette l'ulteriore soluzione* $y(x) = \frac{x^3}{27}$*.*

In effetti è da notare che la funzione $f(x,\cdot)$ *non è Lipschitziana. Infatti basta osservare che*

$$f_y(x,y) = \frac{2}{3} \, y^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}.$$

Poichè $f_y \to +\infty$ *per* $y \to 0^+$*,* f_y *non è limitata in un intorno dell'origine e quindi* f *non può essere Lipschitziana.*

L'Esempio 1 lascia presagire che sebbene la condizione (1) di Lipschitzianità possa essere violata, si potrebbe comunque ancora conservare l'esistenza di soluzioni del problema di Cauchy, a patto però di perderne l'unicità. Questa è infatti la situazione, come mostra il seguente

Teorema 2 (di Peano). *Sia* $f : [x_0 - r, x_0 + r \times [y_0 - s, y_0 + s] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora, posto* $0 < d \le min(r, \frac{s}{\|f\|_\infty})$*, il relativo problema di Cauchy ammette almeno una soluzione in* $I = [x_0 - d, x_0 + d]$*.*

Dimostrazione. Una dimostrazione funzionale analoga al Teorema 1 si può ottenere ricorrendo al Teorema del punto fisso di Schauder, si veda ad esempio [10]. Per un approccio diverso, basato sul Teorema di Stone-Weierstrass e di Ascoli-Arzelà, si può consultare [4]. □

I teoremi che abbiamo discusso valgono per le equazioni in forma normale, ovvero per equazioni differenziali ordinarie che si possano scrivere nella forma $y' = f(x, y)$. In caso di equazioni non normali si può perdere sia l'esistenza che l'unicità della soluzione, come si evince dai seguenti esempi.

Esempio 2. *Il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' \sin y + \sin x = 0 \\ y(0) = \pi \end{cases}$$

ammette le soluzioni $y(x) = x + \pi$ *e* $y(x) = \pi - x$*.*

Esempio 3. *Il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' \cos y = \cos x \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

non amette soluzione. Infatti, integrando l'equazione otteniamo

$$\int y' \cos y dx = \int \cos x dx \Rightarrow \sin y = \sin x + c.$$

Poichè dev'essere $y(0) = \frac{\pi}{2}$*, allora* $1 = \sin \frac{\pi}{2} = c$*, per cui* $\sin y = \sin x + 1$*. Se allora ci fosse una soluzione in* $]0, \pi[$*, avremmo che* $\sin y > 1$*.*

L'esistenza di soluzioni per il problema di Cauchy (2) vale anche in situazioni più generali in cui la funzione $f(x, y)$ non è continua. Ad esempio se si tratta di una funzione di tipo Carathèodory in cui la $f(\cdot, y)$ è soltanto misurabile. Inoltre, ci sono alcuni recenti sviluppi di ricerca su questo problema classico, estendendone lo studio a situazioni veramente molto generali. In [8], ad esempio, si studiano casi in cui la $f(x, y)$ è in uno spazio di funzioni di Sobolev, mentre [6] e poi [3] studiano il caso di spazi di funzioni a variazione limitata. Naturalmente, in tutti questi casi le soluzioni vanno intese in un opportuno senso generalizzato. Per una introduzione a queste problematiche si veda anche [7].

3 Dipendenza continua dal dato iniziale

Si fissi $\varphi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ e $x_0 \in I = [a, b]$ e si consideri l'operatore lineare $\mathrm{A} : \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$definito da:

$$\mathrm{A}y = (y' + \varphi\, y, y(x_0)).$$

E' facile verificare che per le equazoni lineari a coefficienti continui vale il Teorema di esistenza ed unicità del problema di Cauchy. In altri termini possiamo dire che l'operatore A è invertibile. Diciamo infatti $\mathrm{B} : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ tale inverso, definito da $\mathrm{B}(\psi, y_0) = y$, dove y è l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \varphi\, y = \psi \\ y(x_0) = y_0\ . \end{cases}$$

Si può verificare facilmente che lo spazio $(\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ è di Banach, dove $\|y\|_1 = max(\|y\|_\infty, \|y'\|_\infty)$. Osservato che

$$\|y' + \varphi\, y\|_\infty \leq \|y'\|_\infty + \|\varphi\|_\infty \|y\|_\infty \leq (1 + \|\varphi\|_\infty) \|y\|_1,$$

e inoltre che $|y(x_0)| \leq \|y\|_\infty \leq \|y\|_1$, si ottiene:

$$\|\mathrm{A}y\| := max(\|y' + \varphi\, y\|_\infty, |y(x_0)|) \leq (1 + \|\varphi\|_\infty) \|y\|_1.$$

Pertanto l'operatore A è limitato, e quindi è continuo (per gli operatori lineari queste due nozioni sono equivalenti, si veda ad esempio [11, IV. §5]). Poichè lo spazio prodotto di spazi di Banach è ancora di Banach, siamo nelle ipotesi del teoema dell'applicazione aperta ([5, pag. 28], o anche [11]) e come conseguenza abbiamo che anche B è continuo. Quindi abbiamo che la soluzione del problema di Cauchy dipende con continuità dal dato iniziale e dal termine noto. Il caso non lineare non è così semplice. Tuttavia si può talvolta dimostrare la dipendenza continua dal dato iniziale. Più precisamente abbiamo il seguente

Teorema 3. *Nelle ipotesi del Teorema 1, sia $x_0 \in I$. Si consideri la funzione $\varphi : E \to \mathcal{C}(I, E)$ definita da: $\varphi(y_0) = y$ dove y è l'unica soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \ . \end{cases}$$

Allora φ è continua.

Dimostrazione. Se $y_0, z_0 \in E$, come nella dimostrazione del Teorema 1, consideriamo gli operatori:

$$\mathrm{T}y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \quad ; \quad \mathrm{S}y(x) = z_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt,$$

i cui punti fissi ci danno $y = \varphi(y_0)$ e $z = \varphi(z_0)$. Fissato $h > 0$, a causa della (1) nell'intervallo $[x_0 - h, x_0 + h] \subset I$ abbiamo:

$$\|\mathrm{T}y(x) - \mathrm{T}z(x)\| \leq k\|y - z\|_\infty \, |x - x_0| \leq kh\|y - z\|_\infty.$$

Dunque T è una contrazione per $h < \frac{1}{k}$. Naturalmente lo stesso vale per S. Pertanto, nell'intervallo $[x_0 - h, x_0 + h] \subset I$, i due operatori sono contrattivi con la stessa costante $\theta = kh$. Possiamo dunque considerare y e z i rispettivi punti fissi di T ed S nel detto intervallo. Tramite il metodo delle iterate successive di Picard, si veda [10], possiamo dire che $z = \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}^n(y)$. D'altronde, come nella dimostrazione del Teorema dei punti fissi di Banach, [10], sappiamo anche che

$$\|\mathrm{S}^n(y) - y\|_\infty < \frac{1}{1-\theta} \|\mathrm{S}y - y\|_\infty = \frac{1}{1-\theta} \|\mathrm{S}y - \mathrm{T}y\|_\infty.$$

Passando al limite otteniamo che

$$\|y - z\|_\infty \leq \frac{1}{1-\theta} \|\mathrm{S}y - \mathrm{T}y\|_\infty. \tag{5}$$

Pertanto, fissato $\delta > 0$, dalla forma esplicita di T ed S e dalla (5) abbiamo che

$$\|y_0 - z_0\| < \delta \Rightarrow \|\mathrm{T}y - \mathrm{S}y\|_\infty < \delta \Rightarrow \|y - z\|_\infty < \frac{\delta}{1-\theta}. \tag{6}$$

Ora prendiamo una partizione $\Pi = \{t_0 = x_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ di passo h. Risolvendo il nuovo problema di Cauchy

$$\begin{cases} \bar{y}\,' = f(x, \bar{y}) \\ \bar{y}(t_1) = y(t_1) \ , \end{cases}$$

dove y è la vecchia soluzione, otteniamo una soluzione in $[x_0, t_2]$. Considerando allora gli operatori

$$\bar{\mathrm{T}}y(x) = y(t_1) + \int_{t_1}^{x} f(t, y(t))dt \quad ; \quad \bar{\mathrm{S}}y(x) = z(t_1) + \int_{t_1}^{x} f(t, y(t))dt,$$

e tenendo conto della (6) abbiamo:

$$\|y(t_1) - z(t_1)\| \leq \|y - z\|_\infty < \frac{\delta}{1-\theta}.$$

Analogamente a quanto fatto per ottenere la (6), nell'intervallo $[x_0, t_2]$ risulta che

$$\|\bar{y} - \bar{z}\|_\infty < \frac{\delta}{(1-\theta)^2}.$$

Per l'unicità della soluzione abbiamo che $\bar{y} = y$ e $\bar{z} = z$. Ripetendo il ragionamento per tutti gli elementi della partizione, tenuto conto dell'unicità della soluzione, nell'intervallo $[x_0, b]$ risulta che

$$\|y - z\|_\infty < \frac{\delta}{(1-\theta)^n}. \tag{7}$$

Ragionando in maniera analoga a sinistra di x_0 possiamo ottenere soluzioni su tutto $[a, b]$. Pertanto, a causa della disuguaglianza (7), esisterà un certo $c(h) > 0$ per cui

$$|y_0 - z_0| < \delta \Rightarrow \|y - z\|_\infty < \frac{\delta}{c(h)}.$$

Allora, tenuto conto della (1), e fissato $\varepsilon > 0$, basta scegliere $\delta = \varepsilon c(h)$ per avere la continuità di φ. $\square$

Un'altra via per ricavare questo risultato è ricorrere al teorema sulla funzione implicita (si veda ad esempio [2] pag.118-123). E' da osservare che nella dimostrazione del Teorema 3 un ruolo importante ha svolto l'unicità della soluzione dovuta al principio delle contrazioni. Si può anche dare una dimostrazione della dipendenza continua in modo un pò più generale, e anche semplice, utilizzando il teorema di Ascoli-Arzelà.

Teorema 4. *Sia $f(x, y)$ continua e supponiamo che per ogni $y_0 \in E$ il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{8}$$

ammetta un'unica soluzione. Allora l'applicazione φ definita nel Teorema 3 è continua.

Dimostrazione. Consideriamo una successione (y_n) che approssimi il dato iniziale, ovvero tale che $y_n \to y_0$. Siano poi u_n le soluzioni del problema di Cauchy di dati iniziali y_n, definite nell'intervallo I. Dunque abbiamo che

$$u_n(x) = y_n + \int_{x_0}^{x} f(t, u_n(t))dt. \tag{9}$$

Allora possiamo stimare:

$$|u_n(x)| \leq |y_n| + h\|f\|_\infty,$$

da cui si ottiene:

$$\forall x \in I : \lim_{n \to +\infty} |u_n(x)| \leq C.$$

D'altra parte, dalla (9) abbiamo che

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq \int_{y}^{x} f(t, u_n(t))dt \leq \|f\|_\infty |x - y|,$$

da cui segue l'equicontinuità della successione $(u_n)_{n \geq 1}$. Allora, per il teorema di Ascoli-Arzelà, si può estrarre una sottosuccessione, che per comodità indichiamo con lo stesso indice, che converge uniformemente ad una funzione $\bar{u}$. Passando al limite nella (9) si ottiene:

$$\bar{u}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \bar{u}(t))dt.$$

Pertanto $\bar{u}$ è soluzione del problema di Cauchy (8). Allora, per l'unicità della soluzione, $\bar{u}$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy (8). Quanto detto vale in particolare per ogni sottosuccessione, allora anche l'intera successione $(u_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente ad $\bar{u}$ (proprietà di Uryshon, si veda ad esempio il Teorema A5.15 in [1]). In altre parole abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \|\varphi(y_n) - \varphi(y_0)\|_\infty = 0.$$

$\square$

Un problema di Cauchy che ammetta una ed una sola soluzione che dipende con continuità dai dati iniziali si dice *ben posto*. In pratica ciò che si vuole è una certa stabilità della soluzione, ovvero che cambiando di poco i dati iniziali allora anche la soluzione cambia di poco. Si può pensare ad esempio all'equazione del moto, dove i dati iniziali sono la posizione e la velocità all'istante iniziale, in cui la 'buona positura' del problema di Cauchy è un requisito essenziale per i calcoli approssimati delle traiettorie.

Specie per le equazioni alle derivate parziali, il fatto di essere *ben posto* è lungi dall'essere banale e spesso si tratta di un problema di difficile soluzione. Anzi, nelle equazioni non-lineari accade spesso il contrario, ovvero che piccoli cambiamenti delle condizioni iniziali possono produrre soluzioni molto diverse tra loro, anche quando c'è unicità della soluzione. Questa sensibilità dai dati iniziali è alla base dello studio dei fenomeni caotici (si può consultare [9] e [12] per un'introduzione divulgativa su queste problematiche).

Riferimenti bibliografici

[1] E. Acerbi, G. Buttazzo, *Primo Corso di Analisi Matematica.* Pitagora, 1997.

[2] P. Acquistapace, *Appunti di analisi convessa.* Disponibile su: www.dm.unipi.it/ acquistapace.

[3] L. Ambrosio, *Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields*, Preprint 2003. Disponibile su: http://cvgmt.sns.it.

[4] S. K. Berberian, *Foundamentals of Real Analysis.* Springer, 1998.

[5] H. Brezis, *Analisi Funzionale. Teoria ed Applicazioni.* Liguori, 1986.

[6] F. Colombini, N. Lerner, *Uniqueness of continous solutions for BV vector fields*, Duke. Math. J., **111** (2002), 357-384.

[7] G. Crippa, Equazione del Trasporto e Problema di Cauchy per Campi Vettoriali Debolmente Differenziabili. Tesi di Laurea, Università di Pisa, Luglio 2004. Disponibile su: http://cvgmt.sns.it.

[8] R. J. Di Perna, P. L. Lions, *Ordinary differential equation, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math., **98** (1989), 511-547.

[9] J. Gleik, *Caos.* Rizzoli, 1989.

[10] L. Granieri, *Alcuni teoremi di punto fisso ed applicazioni.* Disponibile su: http://www.dm.unipi.it/∼granieri.

[11] A. Kolmogorov, S. Fomine, *Elementi di Teoria delle Funzioni e di Analisi Funzionale.* Mir, 1980.

[12] D. Ruelle, *Caso e caos.* Bollati Boringhieri, 1992.

[13] G. E. Silov, *Analisi Matematica. Funzioni di Una Variabile.* Mir, 1978.