

Problemi di scelta: La Programmazione Lineare

Luca Granieri ...

Aprile 2007

Ogni giorno ci troviamo a fare un gran numero di scelte. Se facciamo la spesa oppure se decidiamo di andare a scuola con l'autobus oppure con il motorino. Spesso incontriamo anche delle scelte più importanti da fare e torna utile chiedere un consiglio. Ma chiediamoci: le nostre scelte sono sempre razionali? In altre parole la scienza, e in particolare la matematica, possono venirci in aiuto per poter fare le scelte migliori?

Scommessa di Pascal

Forse, il padre dell'approccio scientifico ai problemi di scelta è Pascal. Ad esempio è famoso il suo argomento della scommessa:

Scommessa di Pascal

Forse, il padre dell'approccio scientifico ai problemi di scelta è Pascal. Ad esempio è famoso il suo argomento della scommessa:

Dio esiste oppure no. Su quale delle due ipotesi volete scommettere?

Scommessa di Pascal

Pascal analizza le diverse possibilità.

Scommessa di Pascal

Pascal analizza le diverse possibilità.

- Chi crede in Dio ha due prospettive. Se Dio esiste otterrà un ricavo enorme (Paradiso) in caso contrario avrà perso il tempo dedicato alla preghiera, qualche digiuno, qualche altro sacrificio ecc ...

Scommessa di Pascal

Pascal analizza le diverse possibilità.

- Chi crede in Dio ha due prospettive. Se Dio esiste otterrà un ricavo enorme (Paradiso) in caso contrario avrà perso il tempo dedicato alla preghiera, qualche digiuno, qualche altro sacrificio ecc ...
- Chi invece non crede in Dio avrà il guadagno dei fine settimana liberi o di qualche divertimento in più, sempre se Dio non esiste. Ma se Dio esiste allora sono guai!

Naturalmente, ci sono tanti fattori che possono influenzare una scelta del genere.

Naturalmente, ci sono tanti fattori che possono influenzare una scelta del genere.

- Intanto abbiamo delle condizioni Aleatorie e dobbiamo assegnare una probabilità al fatto che Dio esista oppure no, e ci potrà essere un grande differenza tra un ateo e un credente convinto.

Naturalmente, ci sono tanti fattori che possono influenzare una scelta del genere.

- Intanto abbiamo delle condizioni Aleatorie e dobbiamo assegnare una probabilità al fatto che Dio esista oppure no, e ci potrà essere un grande differenza tra un ateo e un credente convinto.
- Poi risulta anche difficoltoso assegnare un valore al guadagno o alla perdita che si potrebbe realizzare nei differenti casi.

Naturalmente, ci sono tanti fattori che possono influenzare una scelta del genere.

- Intanto abbiamo delle condizioni Aleatorie e dobbiamo assegnare una probabilità al fatto che Dio esista oppure no, e ci potrà essere un grande differenza tra un ateo e un credente convinto.
- Poi risulta anche difficoltoso assegnare un valore al guadagno o alla perdita che si potrebbe realizzare nei differenti casi.
- Potrebbero esserci tanti dei diversi tra cui dover scegliere ecc
...

Dal diario di Darwin

Dal diario di Darwin

- Non sposarsi

Dal diario di Darwin

- Non sposarsi
- Niente bambini, nessuno che abbia cura di te nella vecchiaia. La libertà di andare dove si vuole, di scegliere chi frequentare. La conversazione di uomini intelligenti nei club. Non essere costretti a fare visita ai parenti e a cedere su ogni minima cosa, ad avere la spesa e l'ansia dei bambini, forse litigi. Perdita di tempo, non poter leggere la sera, diventare grassi e pigri, ansia e responsabilità, meno soldi per i libri, ecc . . . Se molti bambini l'obbligo di guadagnarsi il pane (però fa molto male alla salute lavorare troppo) Forse a mia moglie non piacerà Londra. Allora la condanna è l'esilio, e la degradazione, con una sciocca indolente e pigra.

Dal diario di Darwin

Dal diario di Darwin

- sposarsi

Dal diario di Darwin

- sposarsi
- Bambini (a Dio piacendo), una compagna fedele (amica nella vecchiaia) che si interessi a me, oggetto di amore e di svago. Una casa e qualcuno che se ne prende cura. Queste cose fanno bene alla salute. Costretto a visitare e ricevere parenti, ma terribile perdita di tempo. E' intollerabile pensare di impiegare una vita intera a lavorare, lavorare, e alla fine nulla. No, non va. Immaginate di vivere una lunga vita in solitudine in una sporca fumosa casa londinese. Pensa invece a una tenera, dolce moglie, un divano, un bel camino e libri e magari musica. Sposarsi. Sposarsi. Sposarsi.

Dal diario di Darwin

- sposarsi
- Bambini (a Dio piacendo), una compagna fedele (amica nella vecchiaia) che si interessi a me, oggetto di amore e di svago. Una casa e qualcuno che se ne prende cura. Queste cose fanno bene alla salute. Costretto a visitare e ricevere parenti, ma terribile perdita di tempo. E' intollerabile pensare di impiegare una vita intera a lavorare, lavorare, e alla fine nulla. No, non va. Immaginate di vivere una lunga vita in solitudine in una sporca fumosa casa londinese. Pensa invece a una tenera, dolce moglie, un divano, un bel camino e libri e magari musica. Sposarsi. Sposarsi. Sposarsi. Q.E.D.

Un problema di scelta può essere allora anche molto complicato e ricorrere ad una indagine razionale della questione può essere di enorme aiuto. Tale analisi potrà essere tanto più precisa quanto meglio si riesca ad includere il problema di scelta in un opportuno modello matematico.

Il barattolo ideale

Consideriamo un imprenditore che inscatola i pomodori pelati. Egli ha un certo ammontare di lamiera che deve utilizzare. Come deve costruire i barattoli?

Il barattolo ideale

Consideriamo un imprenditore che inscatola i pomodori pelati. Egli ha un certo ammontare di lamiera che deve utilizzare. Come deve costruire i barattoli?

Se li costruisce cilindrici allora li può fare alti e slanciati oppure bassi e tozzi. Che fare? Questo problema corrisponde a un quesito geometrico.

Il barattolo ideale

Consideriamo un imprenditore che inscatola i pomodori pelati. Egli ha un certo ammontare di lamiera che deve utilizzare. Come deve costruire i barattoli?

Se li costruisce cilindrici allora li può fare alti e slanciati oppure bassi e tozzi. Che fare? Questo problema corrisponde a un quesito geometrico.

Tra tutti i cilindri di assegnata superficie, qual è quello che racchiude il volume massimo?

Il barattolo ideale

Consideriamo un imprenditore che inscatola i pomodori pelati. Egli ha un certo ammontare di lamiera che deve utilizzare. Come deve costruire i barattoli?

Se li costruisce cilindrici allora li può fare alti e slanciati oppure bassi e tozzi. Che fare? Questo problema corrisponde a un quesito geometrico.

Tra tutti i cilindri di assegnata superficie, qual è quello che racchiude il volume massimo?

Il modello matematico può essere studiato attentamente. Si dimostra che il cilindro migliore è quello in cui l'altezza è uguale al diametro della base. Anzi, in realtà dovrebbero essere sferici. Poiché la sfera gode della proprietà isoperimetrica. Ma qui ci sarebbero difficoltà di stoccaggio e costruzione.

Poter affrontare un problema di scelta dipende allora essenzialmente dalla possibilità di poter utilizzare un modello matematico che lo descriva. I problemi economici sono molto significativi da questo punto di vista.

In questa presentazione ci occuperemo principalmente di problemi di ottimizzazione. Ovvero di cercare le strategie migliori per portare a termine un certo compito.

Benchè molte proprietà di ottimizzazione siano conosciute sin dall'antichità, come ad esempio la proprietà isoperimetrica del cerchio, per un approccio sistematico a tali problemi dobbiamo attendere il XVII secolo con l'introduzione del calcolo infinitesimale e la nascita del *Calcolo delle Variazioni* che a tutt'oggi è un vasto e intenso campo di ricerca.

La Programmazione Lineare

Recentemente, una nuova classe di problemi di ottimizzazione è stata originata dalla complessa organizzazione della società moderna che richiedeva modelli per ottimizzare la gestione delle risorse, le strategie economiche e belliche. In effetti, intorno agli anni '40, l'aeronautica militare degli Stati Uniti organizzò e finanziò il progetto *SCOOP* (Scientific Computation of Optimum Programs) nell'ambito del quale furono sviluppati molti studi, sia teorici che applicativi. Anche la scuola russa, naturalmente sviluppò molto queste questioni. In questa presentazione ci occuperemo di alcuni di questi problemi noti come problemi di *Programmazione Lineare*.

Un esempio di organizzazione della produzione

Per fabbricare due articoli A e B sono necessarie due macchine M_1, M_2 . La prima impiega 5 minuti nella costruzione dell'articolo A e 6 minuti nella costruzione di B , mentre la seconda impiega 7 minuti per l'articolo A e 2 per B . Entrambe le macchine possono essere usate solo per 8 ore al giorno. Sapendo che l'articolo A fornisce un guadagno di 126 euro e l'articolo B di 90 euro, si determini il numero più conveniente di articolo A e B da produrre giornalmente per ottenere il massimo guadagno possibile.

Detti x, y rispettivamente le quantità di A e di B da produrre, il nostro problema è quello di massimizzare la funzione

Detti x, y rispettivamente le quantità di A e di B da produrre, il nostro problema è quello di massimizzare la funzione

$$R(x, y) = 126x + 90y.$$

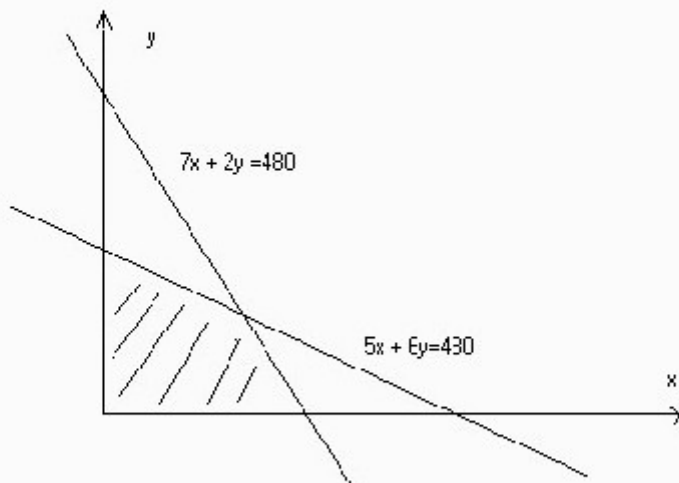
Detti x, y rispettivamente le quantità di A e di B da produrre, il nostro problema è quello di massimizzare la funzione $R(x, y) = 126x + 90y$. Tuttavia, poichè le due macchine producono i diversi articoli in diverso tempo dovremo richiedere che $5x + 6y \leq 480$ e che $7x + 6y \leq 480$.

Detti x, y rispettivamente le quantità di A e di B da produrre, il nostro problema è quello di massimizzare la funzione $R(x, y) = 126x + 90y$. Tuttavia, poichè le due macchine producono i diversi articoli in diverso tempo dovremo richiedere che $5x + 6y \leq 480$ e che $7x + 6y \leq 480$. Certamente poi potremo supporre che $x, y \geq 0$. Dunque il nostro modello di Programmazione Lineare è il seguente

Detti x, y rispettivamente le quantità di A e di B da produrre, il nostro problema è quello di massimizzare la funzione $R(x, y) = 126x + 90y$. Tuttavia, poichè le due macchine producono i diversi articoli in diverso tempo dovremo richiedere che $5x + 6y \leq 480$ e che $7x + 6y \leq 480$. Certamente poi potremo supporre che $x, y \geq 0$. Dunque il nostro modello di Programmazione Lineare è il seguente

$$\begin{cases} \max R(x, y) = 126x + 90y \\ x, y \geq 0 \\ 5x + 6y \leq 480 \\ 7x + 6y \leq 480 \end{cases}$$

Ora, i vincoli del problema individuano una regione compatta (chiusa e limitata) del piano, si veda la figura (1). Inoltre la funzione $R(x, y)$ è continua e pertanto il Teorema di Weierstrass ci assicura che una strategia ottimale esiste. Ma come determinare tale soluzione? Per dare una risposta che sia utile sul piano applicativo sfrutteremo il fatto che l'insieme compatto individuato dai vincoli non è un insieme qualunque ma è un poligono convesso. Infatti si può dimostrare che il massimo della funzione $R(x, y)$ deve essere raggiunto in uno dei punti estremali di tale regione convessa, ovvero in uno dei vertici del poligono tratteggiato in figura (1). Il lettore potrà verificare che il massimo viene raggiunto nel vertice di coordinate $(60, 30)$ corrispondente ad un ricavo massimo di euro 10.260 euro e che non è possibile guadagnare di più.



Un allevatore di bovini può comperare per la propria azienda due tipi di mangimi m_1, m_2 che costano per unità di prodotto rispettivamente 10 euro e 4 euro. Ogni giorno la mandria ha bisogno di:

- 60 Kg. dell'elemento nutrizionale A,
- 84 Kg. dell'elemento nutrizionale B,
- 72 Kg. dell'elemento nutrizionale C

e che i mangimi contengono per unità di prodotto tali elementi nutrizionali nelle quantità:

...	A	B	C
m_1	3Kg.	7Kg.	3Kg.
m_2	2Kg.	2Kg.	6Kg.

Si chiede di trovare la combinazione de due mangimi che assicuri la presenza degli elementi nutrizionale necessari e che dia la minor spesa giornaliera.

Indicati rispettivamente con x, y le quantità di mangime m_1, m_2 da acquistare, la funzione obiettivo da rendere minima è $Z = 10x + 4y$. Poichè la combinazione di mangimi deve soddisfare il fabbisogno giornaliero della mandria perveniamo al problema

Indicati rispettivamente con x, y le quantità di mangime m_1, m_2 da acquistare, la funzione obiettivo da rendere minima è $Z = 10x + 4y$. Poichè la combinazione di mangimi deve soddisfare il fabbisogno giornaliero della mandria perveniamo al problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z(x, y) = 10x + 4y \\ x, y \geq 0 \\ 3x + 2y \geq 60 \\ 7x + 2y \geq 84 \\ 3x + 6y \geq 72 \end{array} \right.$$

L'insieme dei vincoli è indicato in figura (2).

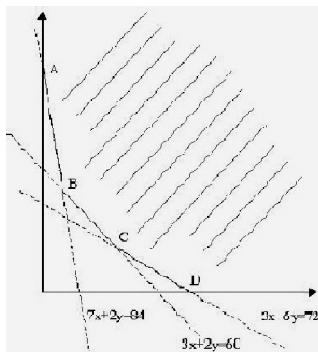


Figura: I vincoli individuano la regione in tratteggio

Anche se si tratta di una regione non limitata, poichè siamo interessati ai minimi della funzione obiettivo, sarà sufficiente testare Z nei punti $A(0, 42)$, $B(6, 21)$, $C(18, 3)$, $D(24, 0)$ in modo analogo all'esempio precedente. Il valore minimo è raggiunto precisamente nel punto $B(6, 21)$ dove la funzione obiettivo vale 144.

Problema di trasporto ottimale

Un'altra applicazione importante dei modelli di programmazione lineare è data dal seguente problema

Problema di trasporto ottimale

Un'altra applicazione importante dei modelli di programmazione lineare è data dal seguente problema. Siano dati un numero m di magazzini ed un numero n di negozi. Ogni negozio avrà un certo fabbisogno di merce, mentre ogni magazzino avrà una certa disponibilità di merce.

Problema di trasporto ottimale

Un'altra applicazione importante dei modelli di programmazione lineare è data dal seguente problema. Siano dati un numero m di magazzini ed un numero n di negozi. Ogni negozio avrà un certo fabbisogno di merce, mentre ogni magazzino avrà una certa disponibilità di merce.

Il problema è allora quello di consegnare le merci richieste ai negozi in modo da minimizzare il costo di trasporto.

Cerchiamo dunque di scrivere un modello del problema. Indichiamo con

Cerchiamo dunque di scrivere un modello del problema. Indichiamo con

- a_i , $i = 1, \dots, m$ l'ammontare di merce disponibile nel magazzino i -esimo,
- b_j $j = 1, \dots, n$ il fabbisogno di merce del negozio j -esimo,
- x_{ij} $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ l'ammontare di merce che dal magazzino i -esimo viene consegnata al negozio j -esimo.

Cerchiamo dunque di scrivere un modello del problema. Indichiamo con

- a_i , $i = 1, \dots, m$ l'ammontare di merce disponibile nel magazzino i -esimo,
- b_j $j = 1, \dots, n$ il fabbisogno di merce del negozio j -esimo,
- x_{ij} $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ l'ammontare di merce che dal magazzino i -esimo viene consegnata al negozio j -esimo.

Assumendo che la merce disponibile nei magazzini soddisfi il fabbisogno dei negozi abbiamo

Cerchiamo dunque di scrivere un modello del problema. Indichiamo con

- $a_i, i = 1, \dots, m$ l'ammontare di merce disponibile nel magazzino i -esimo,
- $b_j, j = 1, \dots, n$ il fabbisogno di merce del negozio j -esimo,
- $x_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ l'ammontare di merce che dal magazzino i -esimo viene consegnata al negozio j -esimo.

Assumendo che la merce disponibile nei magazzini soddisfi il fabbisogno dei negozi abbiamo

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Cerchiamo dunque di scrivere un modello del problema. Indichiamo con

- a_i , $i = 1, \dots, m$ l'ammontare di merce disponibile nel magazzino i -esimo,
- b_j $j = 1, \dots, n$ il fabbisogno di merce del negozio j -esimo,
- x_{ij} $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ l'ammontare di merce che dal magazzino i -esimo viene consegnata al negozio j -esimo.

Assumendo che la merce disponibile nei magazzini soddisfi il fabbisogno dei negozi abbiamo

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Dalle (1) si ricava la condizione di compatibilità

Cerchiamo dunque di scrivere un modello del problema. Indichiamo con

- a_i , $i = 1, \dots, m$ l'ammontare di merce disponibile nel magazzino i -esimo,
- b_j $j = 1, \dots, n$ il fabbisogno di merce del negozio j -esimo,
- x_{ij} $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ l'ammontare di merce che dal magazzino i -esimo viene consegnata al negozio j -esimo.

Assumendo che la merce disponibile nei magazzini soddisfi il fabbisogno dei negozi abbiamo

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Dalle (1) si ricava la condizione di compatibilità

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (3)$$

Naturalmente potremo assumere che $x_{ij} \geq 0$.

Naturalmente potremo assumere che $x_{ij} \geq 0$. Se c_{ij} è il costo per unità di merce relativo al trasporto della merce dal magazzino i -esimo al negozio j -esimo, il costo da minimizzare sarà dato da

Naturalmente potremo assumere che $x_{ij} \geq 0$. Se c_{ij} è il costo per unità di merce relativo al trasporto della merce dal magazzino i -esimo al negozio j -esimo, il costo da minimizzare sarà dato da

$$C = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} c_{ij} x_{ij}.$$

Problema del trasporto

Pertanto perveniamo al seguente problema di programmazione lineare

Problema del trasporto

Pertanto perveniamo al seguente problema di programmazione lineare

$$\left\{ \begin{array}{l} \min C = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} c_{ij} x_{ij}, \\ x_{ij} \geq 0, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad \forall j = 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

La programmazione lineare

Riprendiamo il problema di programmazione lineare discusso nell'introduzione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max R(x, y) = 126x + 90y \\ x, y \geq 0 \\ 5x + 6y \leq 480 \\ 7x + 6y \leq 480 \end{array} \right. \quad (4)$$

La programmazione lineare

Riprendiamo il problema di programmazione lineare discusso nell'introduzione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max R(x, y) = 126x + 90y \\ x, y \geq 0 \\ 5x + 6y \leq 480 \\ 7x + 6y \leq 480 \end{array} \right. \quad (4)$$

Se $x \in \mathbb{R}^N$ diremo che $x \geq 0$ se $x_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \dots, N$.

La programmazione lineare

Riprendiamo il problema di programmazione lineare discusso nell'introduzione:

$$\begin{cases} \max R(x, y) = 126x + 90y \\ x, y \geq 0 \\ 5x + 6y \leq 480 \\ 7x + 6y \leq 480 \end{cases} \quad (4)$$

Se $x \in \mathbb{R}^N$ diremo che $x \geq 0$ se $x_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \dots, N$.
Con le notazioni introdotte nel capitolo precedente, posto $c = (126, 90) \in \mathbb{R}^2$, $b = (480, 480) \in \mathbb{R}^2$ e considerata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 6 \end{pmatrix},$$

il problema (4) si scrive nella forma

La programmazione lineare

Riprendiamo il problema di programmazione lineare discusso nell'introduzione:

$$\begin{cases} \max R(x, y) = 126x + 90y \\ x, y \geq 0 \\ 5x + 6y \leq 480 \\ 7x + 6y \leq 480 \end{cases} \quad (4)$$

Se $x \in \mathbb{R}^N$ diremo che $x \geq 0$ se $x_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \dots, N$.
Con le notazioni introdotte nel capitolo precedente, posto $c = (126, 90) \in \mathbb{R}^2$, $b = (480, 480) \in \mathbb{R}^2$ e considerata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 6 \end{pmatrix},$$

il problema (4) si scrive nella forma

$$\begin{cases} \max \langle c, x \rangle \\ x \geq 0 \\ Ax \leq b. \end{cases}$$

Anche il problema del trasporto

$$\left\{ \begin{array}{l} \min C = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} c_{ij} x_{ij}, \\ x_{ij} \geq 0, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad \forall j = 1, \dots, n, \end{array} \right. \quad (5)$$

rientra in questo formalismo.

Infatti, se poniamo

- $b = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{m+n}$,
- $x = (x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn}) \in \mathbb{R}^{nm}$,
- $\underline{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$,
- $\underline{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$,
- $e_i, i = 1, \dots, n$ la base canonica di \mathbb{R}^n ,

Infatti, se poniamo

- $b = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{m+n}$,
- $x = (x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn}) \in \mathbb{R}^{nm}$,
- $\underline{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$,
- $\underline{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$,
- $e_i, i = 1, \dots, n$ la base canonica di \mathbb{R}^n ,

e consideriamo la matrice $A \in \mathcal{M}(m+n, nm)$ definita da

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} & \cdots & \cdots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \cdots \underline{0} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \cdots & \cdots \underline{0} & \underline{1} & \\ e_1 & e_1 & \cdots & \cdots & e_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_n & e_n & \cdots & \cdots & e_n \end{pmatrix},$$

Allora anche il problema (5) si può scrivere come

$$\begin{cases} \min \langle c, x \rangle \\ x \geq 0 \\ Ax = b. \end{cases}$$

Dunque dal punto di vista matematico, considereremo il problema di programmazione lineare come quello di ottimizzare la funzione prodotto scalare, che da ora in poi chiameremo funzione obiettivo,

Dunque dal punto di vista matematico, considereremo il problema di programmazione lineare come quello di ottimizzare la funzione prodotto scalare, che da ora in poi chiameremo funzione obiettivo, $\langle c, x \rangle$ con $x \geq 0$ soggetta a vincoli del tipo

$$Ax \geq b, \quad Ax \leq b, \quad Ax = b.$$

Dunque dal punto di vista matematico, considereremo il problema di programmazione lineare come quello di ottimizzare la funzione prodotto scalare, che da ora in poi chiameremo funzione obiettivo, $\langle c, x \rangle$ con $x \geq 0$ soggetta a vincoli del tipo

$$Ax \geq b, \quad Ax \leq b, \quad Ax = b.$$

La possibilità di trovare una soluzione del problema di programmazione lineare è legata ad alcuni aspetti matematici (compattezza, continuità) che assicurino almeno l'esistenza di una soluzione. In tal modo saremo sicuri che lo sforzo per ottenere una soluzione non sarà a priori vano.

Convessità

Naturalmente, nelle applicazioni siamo interessati a trovare esplicitamente le soluzioni di un problema di programmazione o almeno ad una loro approssimazione numerica. A questo scopo utilizzeremo il fatto che l'insieme $K \subset \mathbb{R}^N$ dei vincoli non è un insieme qualsiasi ma è un *politopo convesso*.

Convessità

Naturalmente, nelle applicazioni siamo interessati a trovare esplicitamente le soluzioni di un problema di programmazione o almeno ad una loro approssimazione numerica. A questo scopo utilizzeremo il fatto che l'insieme $K \subset \mathbb{R}^N$ dei vincoli non è un insieme qualsiasi ma è un *politopo convesso*.

Definizione (Convessità)

Un insieme $K \subset \mathbb{R}^N$ si dice convesso se, contenendo due punti x, y , contiene anche il segmento $[x, y]$.

Convessità

Naturalmente, nelle applicazioni siamo interessati a trovare esplicitamente le soluzioni di un problema di programmazione o almeno ad una loro approssimazione numerica. A questo scopo utilizzeremo il fatto che l'insieme $K \subset \mathbb{R}^N$ dei vincoli non è un insieme qualsiasi ma è un *politopo convesso*.

Definizione (Convessità)

Un insieme $K \subset \mathbb{R}^N$ si dice convesso se, contenendo due punti x, y , contiene anche il segmento $[x, y]$.

Definizione (Inviluppo convesso)

Sia $X \subset \mathbb{R}^N$. Si dice inviluppo convesso di X , che denoteremo con $\text{co}(X)$, l'insieme di tutte le combinazioni lineari convesse di X .

Convessità

Naturalmente, nelle applicazioni siamo interessati a trovare esplicitamente le soluzioni di un problema di programmazione o almeno ad una loro approssimazione numerica. A questo scopo utilizzeremo il fatto che l'insieme $K \subset \mathbb{R}^N$ dei vincoli non è un insieme qualsiasi ma è un *politopo convesso*.

Definizione (Convessità)

Un insieme $K \subset \mathbb{R}^N$ si dice convesso se, contenendo due punti x, y , contiene anche il segmento $[x, y]$.

Definizione (Involuppo convesso)

Sia $X \subset \mathbb{R}^N$. Si dice involuppo convesso di X , che denoteremo con $co(X)$, l'insieme di tutte le combinazioni lineari convesse di X .

Dunque, se $K \subset \mathbb{R}^N$ è convesso, allora $K = co(K)$.

Punti estremali

Esempio

Il triangolo della geometria elementare è l'involuppo convesso dei suoi vertici.

Punti estremali

Esempio

Il triangolo della geometria elementare è l'involuppo convesso dei suoi vertici.

Definizione (Punti estremali)

Sia $K \subset \mathbb{R}^N$ un convesso. Si dice che $x \in K$ è un punto estremo se

$$\forall x_1, x_2 \in K, x \in [x_1, x_2] \Rightarrow (x = x_1) \vee (x = x_2).$$

Punti estremali

Esempio

Il triangolo della geometria elementare è l'involuppo convesso dei suoi vertici.

Definizione (Punti estremali)

Sia $K \subset \mathbb{R}^N$ un convesso. Si dice che $x \in K$ è un punto estremo se

$$\forall x_1, x_2 \in K, x \in [x_1, x_2] \Rightarrow (x = x_1) \vee (x = x_2).$$

Ad esempio, i vertici di un poligono convesso sono punti estremali.

Punti estremali

Esempio

Il triangolo della geometria elementare è l'involuppo convesso dei suoi vertici.

Definizione (Punti estremali)

Sia $K \subset \mathbb{R}^N$ un convesso. Si dice che $x \in K$ è un punto estremo se

$$\forall x_1, x_2 \in K, x \in [x_1, x_2] \Rightarrow (x = x_1) \vee (x = x_2).$$

Ad esempio, i vertici di un poligono convesso sono punti estremali. Sia ora K l'insieme individuato dai vincoli di un problema di programmazione lineare.

Punti estremali

Esempio

Il triangolo della geometria elementare è l'involuppo convesso dei suoi vertici.

Definizione (Punti estremali)

Sia $K \subset \mathbb{R}^N$ un convesso. Si dice che $x \in K$ è un punto estremo se

$$\forall x_1, x_2 \in K, x \in [x_1, x_2] \Rightarrow (x = x_1) \vee (x = x_2).$$

Ad esempio, i vertici di un poligono convesso sono punti estremali. Sia ora K l'insieme individuato dai vincoli di un problema di programmazione lineare. Si può verificare che K è un convesso speciale, essendo individuato dall'intersezione finita di semipiani chiusi. Pertanto, K risulta essere un politopo convesso, ossia l'involuppo convesso di un numero finito di punti (un poligono nel piano e un poliedro nello spazio).

Proposizione

Sia K convesso ed $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione lineare. Allora i valori assunti da f in un segmento di K sono compresi tra i valori che la funzione assume agli estremi.

Proposizione

Sia K convesso ed $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione lineare. Allora i valori assunti da f in un segmento di K sono compresi tra i valori che la funzione assume agli estremi.

Dimostrazione.

Siano $p, q \in K$ e sia $x = \lambda p + \mu q \in [p, q]$. Supponiamo che per esempio sia $f(p) \leq f(q)$. Dalla linearità di f deduciamo che $f(x) = \lambda f(p) + \mu f(q)$, da cui seguono le disuguaglianze

$$f(p) = \lambda f(p) + \mu f(p) \leq \lambda f(p) + \mu f(q) = f(x),$$

$$f(x) = \lambda f(p) + \mu f(q) \leq \lambda f(q) + \mu f(q) = f(q).$$



Pertanto, gli eventuali punti di massimo o di minimo della funzione lineare f saranno raggiunti nei punti estremali di K .

Pertanto, gli eventuali punti di massimo o di minimo della funzione lineare f saranno raggiunti nei punti estremali di K . Se dunque K è l'insieme convesso individuato dai vincoli del problema di programmazione lineare, sapendo che i punti estremali sono in numero finito sarà sufficiente testare la funzione obiettivo nei punti estremali.

Pertanto, gli eventuali punti di massimo o di minimo della funzione lineare f saranno raggiunti nei punti estremali di K . Se dunque K è l'insieme convesso individuato dai vincoli del problema di programmazione lineare, sapendo che i punti estremali sono in numero finito sarà sufficiente testare la funzione obiettivo nei punti estremali. Tale procedura, come delineata negli esempi precedenti, può essere piuttosto laboriosa, specialmente se il numero dei vincoli è grande. Dunque, anche in vista delle applicazioni, si rende necessaria una procedura più efficiente per la determinazione delle soluzioni di un problema di programmazione lineare. Nella prossime sezioni illustreremo il metodo del simpleso introdotto da Dantzig.

Il metodo del simplesso

Un primo passo per poter applicare il metodo del simplesso è quello di formulare in modo differente il problema di programmazione lineare.

Il metodo del semplice

Un primo passo per poter applicare il metodo del semplice è quello di formulare in modo differente il problema di programmazione lineare.

Proposizione

Ogni problema di programmazione lineare si può sempre ricondurre alla forma

$$\begin{cases} \max \langle c, x \rangle \\ x \geq 0 \\ Ax = b. \end{cases} \quad (6)$$

Dimostrazione

Dimostrazione

Intanto osserviamo che $-\min f = \max(-f)$. Supponiamo ora che nei vincoli ci sia una equazione del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leq b, \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, n. \quad (7)$$

Dimostrazione

Intanto osserviamo che $-\min f = \max(-f)$. Supponiamo ora che nei vincoli ci sia una equazione del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leq b, \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, n. \quad (7)$$

Verifichiamo che l'equazione (7) si può sostituire con l'equazione

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + x_{n+1} = b, \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, n+1. \quad (8)$$

Dimostrazione

Intanto osserviamo che $-\min f = \max(-f)$. Supponiamo ora che nei vincoli ci sia una equazione del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leq b, \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Verifichiamo che l'equazione (7) si può sostituire con l'equazione

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + x_{n+1} = b, \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (8)$$

Infatti, se (x_1, \dots, x_n) risolve (7) allora basta porre $x_{n+1} = b - (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)$ per avere (x_1, \dots, x_{n+1}) soluzione di (8). Viceversa, se (x_1, \dots, x_{n+1}) è soluzione di (8) allora

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b - x_{n+1} \leq b,$$

e quindi (x_1, \dots, x_n) è soluzione di (7).

Dimostrazione

Dimostrazione

Allo stesso modo, un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \geq b, \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, n,$$

potrà essere sostituita con una della forma

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n - x_{n+1} = b, \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, n+1.$$

Dimostrazione

Allo stesso modo, un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \geq b, \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, n,$$

potrà essere sostituita con una della forma

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n - x_{n+1} = b, \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, n+1.$$

Dunque, a patto di aumentare la dimensione dello spazio, i vincoli potranno essere posti nella forma $x \geq 0, Ax = b$.

Dimostrazione

Allo stesso modo, un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \geq b, \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, n,$$

potrà essere sostituita con una della forma

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n - x_{n+1} = b, \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, n+1.$$

Dunque, a patto di aumentare la dimensione dello spazio, i vincoli potranno essere posti nella forma $x \geq 0$, $Ax = b$. Ora, per non modificare i valori della funzione obiettivo, sarà sufficiente sostituire il vettore di partenza $c \in \mathbb{R}^N$ con il vettore $(c_1, \cdots, c_N, 0, \cdots, 0)$.

Il metodo del simplesso

Il metodo del simplesso consiste in un algoritmo che consente di passare da un punto estremale dell'insieme dei vincoli K ad uno migliore.

Il metodo del simplesso

Il metodo del simplesso consiste in un algoritmo che consente di passare da un punto estemale dell'insieme dei vincoli K ad uno migliore. Descriviamo ora una procedura algoritmica che consente di passare da una soluzione di base ad un'altra in cui il valore della funzione obiettivo sia maggiore.

Il metodo del simplesso

Il metodo del simplesso consiste in un algoritmo che consente di passare da un punto estremalemente dell'insieme dei vincoli K ad uno migliore. Descriviamo ora una procedura algoritmica che consente di passare da una soluzione di base ad un'altra in cui il valore della funzione obiettivo sia maggiore. Supponiamo che il nostro problema di programmazione lineare abbia i vincoli tutti del tipo

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i,$$

con $b_i \geq 0$.

Come osservato in precedenza, il problema di programmazione lineare si può porre nella forma

Come osservato in precedenza, il problema di programmazione lineare si può porre nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ x \geq 0, \quad i = 1, \cdots, n + m, \\ a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{array} \right. \quad (9)$$

Come osservato in precedenza, il problema di programmazione lineare si può porre nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ x \geq 0, \quad i = 1, \cdots, n + m, \\ a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{array} \right. \quad (9)$$

Si può mostrare che ogni problema di programmazione lineare si può ricondurre alla forma canonica in cui i vincoli sono espressi come in (9). Su tale forma applicheremo il metodo del simplesso.

L'algoritmo del Simplexso

Introduciamo l'ulteriore equazione

$$-c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n + z = 0$$

nel sistema la cui matrice completa è

L'algoritmo del Simplexso

Introduciamo l'ulteriore equazione

$$-c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n + z = 0$$

nel sistema la cui matrice completa è

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & b_m \\ -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per passare ad una'altra matrice si opera come segue:

Per passare ad una'altra matrice si opera come segue:

1. Fra tutti i termini strettamente negativi dell'ultima riga si considera il più piccolo, diciamo $-c_h$.

Per passare ad una'altra matrice si opera come segue:

1. Fra tutti i termini strettamente negativi dell'ultima riga si considera il più piccolo, diciamo $-c_h$.
2. Fra gli elementi della h -esima colonna si considerano i termini strettamente positivi e i rapporti $\frac{b_j}{a_{jh}}$.

Per passare ad una'altra matrice si opera come segue:

1. Fra tutti i termini strettamente negativi dell'ultima riga si considera il più piccolo, diciamo $-c_h$.
2. Fra gli elementi della h -esima colonna si considerano i termini strettamente positivi e i rapporti $\frac{b_j}{a_{jh}}$.
3. Se il più piccolo di tali rapporti $\frac{b_q}{a_{pq}}$ è strettamente positivo, allora si individua il termine a_{pq} che chiameremo *pivot*.

Per passare ad una'altra matrice si opera come segue:

1. Fra tutti i termini strettamente negativi dell'ultima riga si considera il più piccolo, diciamo $-c_h$.
2. Fra gli elementi della h -esima colonna si considerano i termini strettamente positivi e i rapporti $\frac{b_j}{a_{jh}}$.
3. Se il più piccolo di tali rapporti $\frac{b_q}{a_{pq}}$ è strettamente positivo, allora si individua il termine a_{pq} che chiameremo *pivot*.
4. Mediante la procedura di eliminazione di Gauss, si rende uguale ad 1 il coefficiente di x_q nella p -esima equazione e uguale a zero in tutte le altre.

Per passare ad una'altra matrice si opera come segue:

1. Fra tutti i termini strettamente negativi dell'ultima riga si considera il più piccolo, diciamo $-c_h$.
2. Fra gli elementi della h -esima colonna si considerano i termini strettamente positivi e i rapporti $\frac{b_j}{a_{jh}}$.
3. Se il più piccolo di tali rapporti $\frac{b_q}{a_{pq}}$ è strettamente positivo, allora si individua il termine a_{pq} che chiameremo *pivot*.
4. Mediante la procedura di eliminazione di Gauss, si rende uguale ad 1 il coefficiente di x_q nella p -esima equazione e uguale a zero in tutte le altre.

Tale procedimento va ripetuto fino a quando non si verifica una delle due situazioni

Per passare ad una'altra matrice si opera come segue:

1. Fra tutti i termini strettamente negativi dell'ultima riga si considera il più piccolo, diciamo $-c_h$.
2. Fra gli elementi della h -esima colonna si considerano i termini strettamente positivi e i rapporti $\frac{b_j}{a_{jh}}$.
3. Se il più piccolo di tali rapporti $\frac{b_q}{a_{pq}}$ è strettamente positivo, allora si individua il termine a_{pq} che chiameremo *pivot*.
4. Mediante la procedura di eliminazione di Gauss, si rende uguale ad 1 il coefficiente di x_q nella p -esima equazione e uguale a zero in tutte le altre.

Tale procedimento va ripetuto fino a quando non si verifica una delle due situazioni

- Tutti gli elementi dell'ultima riga sono positivi, nel qual caso l'ultimo termine della matrice è il valore massimo assunto dalla funzione obiettivo.

Per passare ad una'altra matrice si opera come segue:

1. Fra tutti i termini strettamente negativi dell'ultima riga si considera il più piccolo, diciamo $-c_h$.
2. Fra gli elementi della h -esima colonna si considerano i termini strettamente positivi e i rapporti $\frac{b_j}{a_{jh}}$.
3. Se il più piccolo di tali rapporti $\frac{b_q}{a_{pq}}$ è strettamente positivo, allora si individua il termine a_{pq} che chiameremo *pivot*.
4. Mediante la procedura di eliminazione di Gauss, si rende uguale ad 1 il coefficiente di x_q nella p -esima equazione e uguale a zero in tutte le altre.

Tale procedimento va ripetuto fino a quando non si verifica una delle due situazioni

- Tutti gli elementi dell'ultima riga sono positivi, nel qual caso l'ultimo termine della matrice è il valore massimo assunto dalla funzione obiettivo.
- C'è una colonna (escluse le ultime due) composta di termini tutti strettamente negativi, nel qual caso la funzione obiettivo non è limitata superiormente.

Se il punto 3) della precedente procedura non è soddisfatto, bisogna ricorrere ad un sistema leggermente più complicato (vedi le note)

Esempio

Consideriamo il seguente problema

Esempio

Consideriamo il seguente problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \max 3x_1 - x_2 + 4x_3 \\ x \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ 3x_1 + 6x_3 \leq 4 \end{array} \right. \quad (10)$$

Esempio

Consideriamo il seguente problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \max 3x_1 - x_2 + 4x_3 \\ x \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ 3x_1 + 6x_3 \leq 4 \end{array} \right. \quad (10)$$

Introducendo le variabili ausiliarie possiamo scrivere i vincoli in forma canonica

Esempio

Consideriamo il seguente problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \max 3x_1 - x_2 + 4x_3 \\ x \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ 3x_1 + 6x_3 \leq 4 \end{array} \right. \quad (10)$$

Introducendo le variabili ausiliarie possiamo scrivere i vincoli in forma canonica

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0, \quad i = 1, \dots, 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 6x_3 + x_6 = 4 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + z = 0. \end{array} \right. \quad (11)$$

La matrice corrispondente è

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice corrispondente è

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La prima soluzione di base (punto estremo, vedi note) è $(0, 0, 0, 5, 1, 4)$. Il più piccolo termine negativo dell'ultima riga è -4 . Nella corrispondente colonna i termini positivi sono 3 e 6. Allora consideriamo i rapporti $4/6$ e $5/3$ di cui il più piccolo è $4/6$. Dunque il *pivot* è individuato dall'elemento a_{33} .

Dunque passiamo alle matrici

Dunque passiamo alle matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 2/3 \\ -3 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque passiamo alle matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 2/3 \\ -3 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 7/3 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 2/3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1 & 8/3 \end{pmatrix}.$$

Dunque passiamo alle matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 2/3 \\ -3 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 7/3 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 2/3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1 & 8/3 \end{pmatrix}.$$

La nuova soluzione di base è $(0, 0, 2/3, 3, 7/3, 0)$, in cui la funzione obiettivo vale $8/3$. Nell'ultima riga dobbiamo considerare il termine -1 . I rapporti da considerare sono dunque $4/3, 7/6, 3/2$ di cui il più piccolo è $7/6$. Dunque il nuovo pivot è a_{21} .

Dunque otteniamo le nuove matrici

Dunque otteniamo le nuove matrici

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/6 & 0 & 7/6 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 2/3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1 & 8/3 \end{pmatrix}$$

Dunque otteniamo le nuove matrici

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/6 & 0 & 7/6 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 2/3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1 & 8/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 & -1/4 & -7/12 & 0 & 29/12 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/6 & 0 & 7/6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1/4 & 1/12 & 0 & 1/12 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1/2 & 5/6 & 1 & 23/6 \end{pmatrix}.$$

Dunque otteniamo le nuove matrici

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/6 & 0 & 7/6 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 2/3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1 & 8/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 & -1/4 & -7/12 & 0 & 29/12 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/6 & 0 & 7/6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1/4 & 1/12 & 0 & 1/12 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1/2 & 5/6 & 1 & 23/6 \end{pmatrix}.$$

Poichè nell'ultima riga i termini sono tutti positivi, il procedimento si arresta e $23/6$ è il valore massimo raggiunto dalla funzione obiettivo. La relativa soluzione di base è

$$(7/6, 0, 1/12, 29/12, 0, 0).$$

Dunque otteniamo le nuove matrici

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/6 & 0 & 7/6 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 2/3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1 & 8/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 & -1/4 & -7/12 & 0 & 29/12 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/6 & 0 & 7/6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1/4 & 1/12 & 0 & 1/12 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1/2 & 5/6 & 1 & 23/6 \end{pmatrix}.$$

Poichè nell'ultima riga i termini sono tutti positivi, il procedimento si arresta e $23/6$ è il valore massimo raggiunto dalla funzione obiettivo. La relativa soluzione di base è

$$(7/6, 0, 1/12, 29/12, 0, 0).$$

Dunque la soluzione del nostro problema di partenza è
 $x = (7/6, 0, 1/12).$

Implementazione algoritmo del simplesso

- *function [valopt, optimo]=simplesso(A,b,c) procedura del simplesso per problema in forma canonica*
- *E=completa(A,b,c);*
- *d=size(E);*
- *n=d(1); m=d(2);*
- *B=test(E); controlla la limitatezza del problema*
- *while min(B(n, :)) < 0 procedi fintanto che ci sono termini negativi nell'ultima riga*
- *D=test(B); effettua test di limitatezza*
- *z=D(n,1:m-n-1); considera la riga dei costi*
- *[minc, k] = min(z); considera l'indice di colonna in cui è raggiunto il minimo dei costi*

- $s = \text{length}(z);$
- $e = [];$
- $q = -1;$
- for $j = 1:n-1$
- if $(D(j,k) \sim = 0)$ *nella colonna k-esima determiniamo il minimo rapporto $b(j)/A(j, k)$ che sia positivo, altrimenti il problema non è risolvibile con questa procedura*
- if $(b(j)/D(j, k)) > 0$
- $f = b(j)/D(j, k);$
- $e = [e \ f];$
- if $(q == -1)$
- $q = j;$
- elseif $(f < e(q))$
- $q = j;$
- end
- end
- end
- end

- `if q==-1`
- `error('problema non risolvibile');`
- `end`
- `D=pivo(D,q,k);` *effettua l'eliminazione di gauss rispetto agli indici q,k*
- `B=D;`
- `end`
- `l=size(D);`
- `u=l(1);`
- `v=l(2);`
- `z=length(c);`
- `valopt=D(u,v);` *visualizza il valore ottimo*
- `optimo=opt(D,z);` *visualizza la soluzione del problema*

- function $y = \text{completa}(A, b, c)$ aggiunge le variabili artificiali e crea la matrice completa del problema
- $n = \text{length}(b)$;
- $e = [b \ 0]'$; aggiungiamo uno zero al vettore b e mettiamolo in colonna
- $B = \begin{bmatrix} A & -c \\ \text{eye}(n+1) & e \end{bmatrix}$; aggiungiamo la riga dei costi ed i vettori linearmente indipendenti
- $y = B$;

- function t=test(A) *test di limitatezza del problema del simplesso*
- d=size(A);
- ncol=d(2);
- for j=1:ncol-2
- c=A(:,j);
- if $\max(c) \geq 0$ B=A;
- else
- error('Problema non limitato superiormente'); *interrompi perchè c'è una colonna, escluse le ultime due di termini tutti negativi*
- end
- end
- t=B;

- function $y = \text{pivo}(\alpha, p, h)$ *effettua l'eliminazione di gauss rispetto all'elemento di indici p, h della matrice α*
- $teta = \alpha;$
- $dimalpha = \text{size}(\alpha);$
- $n = dimalpha(1);$
- $m = dimalpha(2);$
- $x = \alpha(p, :) / \alpha(p, h);$
- for $i = 1:n$
- if ($i \sim p$)
- for $j = 1:m$
- $teta(i, j) = teta(i, j) - x(j) * \alpha(i, h);$
- $teta(p, :) = x;$
- end
- end
- end
- $y = teta;$