Appunti per il corso di azzeramento in Analisi Matematica

Dr. Luca Granieri

18-29 Settembre 2006

0.1 Divisione tra polinomi e fattorizzazione

Teorema 1 (di divisione)**.** *Sia $A(x)$ un polinomio di grado m e sia $B(x)$ un polinomio di grado n. Supponiamo inoltre che sia $B(x) \neq 0$ e che $m \geq n$. Allora esistono e sono unici due polinomi $Q(x)$, di grado $m-n$, ed $R(x)$, di grado minore di n, tali che*

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x). \tag{1}$$

Dimostrazione. Il caso $m = n = 0$ è quello dell'usuale divisione tra numeri. Consideriamo allora il caso $m = 1$. Siano dunque $A(x) = a_1x + a_0$ e $B(x) = b_1x + b_0$. Se $b_1 = 0$ allora si può porre

$$A(x) = b_0\left(\frac{a_1}{b_0}x + \frac{a_0}{b_0}\right) = B(x)Q(x).$$

Sia dunque $b_1 \neq 0$. Poniamo

$$A_0(x) = A(x) - \frac{a_1}{b_1}B(x) = a_1x + a_0 - a_1x - \frac{a_1b_0}{b_1} = a_0 - \frac{a_1b_0}{b_1}.$$

Pertanto, dalla prima uguaglianza si ricava

$$A(x) = \frac{a_1}{b_1}B(x) + A_0.$$

Passiamo ora al caso $m = 2$ considerando $A(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $B(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$. Se $b_2 \neq 0$ consideriamo il polinomio $A_1(x) = A(x) - \frac{a_2}{b_2}B(x)$. (Si verifichi che $A_1(x)$ è di grado 1). Allora

$$A(x) = \frac{a_2}{b_2}B(x) + A_1(x). \tag{2}$$

Se invece $b_2 = 0$ si può porre $A_1(x) = A(x) - \frac{a_2}{b_1}xB(x)$ (che è ancora di grado 1). Per il passo precedente possiamo dividere $A_1(x)$ per $B(x)$ ed ottenere l'uguaglianza

$$A_1(x) = qB(x) + r, \tag{3}$$

con q ed r il quoziente ed il resto della divisione di A_1 per B. Mettendo insieme ll (2) e la (3) si ricava

$$A(x) - \frac{a_2}{b_1}B(x) = qB(x) + r \Rightarrow A(x) = \left(\frac{a_2}{b_1}x + q\right)B(x) + r.$$

Quanto detto si può generalizzare dimostrando (per induzione) l'uguaglianza (1) per ogni $m \geq 1$. Veniamo ora alla questione dell'unicità. Supponiamo allora che sia

$$A(x) = B(x)Q_1(x) + R_1(x) = B(x)Q_2(x) + R_2(x).$$

Dalla seconda uguaglianza si ricava

$$B(x)\left(Q_1(x) - Q_2(x)\right) = R_2(x) - R_1(x).$$

Osserviamo che il polinomio al primo membro ha grado almeno pari a quello di $B(x)$ mentre il polinomio al secondo membro ha grado sicuramente minore di n. Questo fatto conduce a contraddizione a meno che non si verifichi $Q_1(x) = Q_2(x)$ e quindi $R_1(x) = R_2(x)$. □

Teorema 2 (di Ruffini)**.** *Il polinomio $P(x)$ è divisibile per il binomio $x - a$ se e soltanto se a è una radice di $P(x)$.*

Dimostrazione. Per il Teorema di divisione possiamo determinare un quoziente $Q(x)$ ed un resto $R \in \mathbb{R}$ tali che

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R.$$

Allora $P(a) = R$ da cui discende il risultato. □

Corollario 3. *Un Polinomio di grado $n \geq 1$ ammette al più n radici.*

Dimostrazione. Sia $P(x)$ un polinomio di grado n e siano $a_1, \cdots, a_{n+1}$ $n+1$ radici distinte. Per il Teorema di Ruffini si potrà determinare un quoziente $Q_1(x)$ tale che

$$P(x) = Q_1(x)(x - a_1).$$

Poichè anche a_2 è radice di $P(x)$ otteniamo

$$P(a_2) = Q_1(a_2)(a_2 - a_1) = 0 \Rightarrow Q_1(a_2) = 0.$$

Applicando ancora il Teorema di Ruffini al polinomio $Q_1(x)$ si trova un quoziente $Q_2(x)$ tale che

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2)Q_2(x).$$

Iterando la procedura si potrà scrivere

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n+1})Q_{n+1}(x).$$

Ma L'uguaglianza appena scritta è contraddittoria poichè il secondo membro ha grado almeno pari a $n + 1$. □

Corollario 4 (Principio di identità dei polinomi)**.** *Due polinomi di grado $n \geq 1$ che assumono gli stessi valori in $n + 1$ punti distinti hanno uguali tutti i coefficienti (e quindi sono lo stesso polinomio).*

Dimostrazione. Siano $A(x)$ e $B(x)$ i polinomi in questione. Il polinomio $H(x) = A(x) - B(x)$ ha grado al più n. Per Il Corollario precedente $H(x)$ non può avere più di n radici. Allora, se ammettiamo che $H(x)$ si annulli in $n+1$ punti distinti l'unica possibilità è che sia $H(x) \equiv 0$. Ora, testando per $x = 0$ si trova che il termine noto di H è nullo. Se qualche altro coefficiente di H non è nullo allora è facile convincersi che la funzione H non è limitata. Allora i due polinomi $A(x)$ e $B(x)$ hanno uguali tutti i corrispondenti coefficienti. □

Per fattorizzare un polinomio mediante il Teorema di Ruffini occorre conoscere almeno una radice del polinomio. Il prossimo risultato caratterizza le radici razionali di un polinomio.

Teorema 5. *Sia $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ un polinomio di grado $n \geq 1$. Se $\frac{p}{q}$, con p e q primi fra loro, è una radice razionale di $P(x)$ allora p è un divisore del termine noto a_0, mentre q è un divisore del termine di grado massimo a_n.*

Dimostrazione. Per definizione di radice, la frazione $\frac{p}{q}$ soddisfa la relazione

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Moltiplicando per q^n si ottiene

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0. \tag{4}$$

Trasportando il termine $a_0 q^n$ al secondo membro della (4) e raccogliendo si ottiene

$$p\left(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^{n-1}\right) = -a_0 q^n.$$

Il primo membro è divisibile per p. Dunque il prodotto $a_0 q^n$ è anch'esso divisibile per p. Ma p e q sono primi fra loro e pertanto a_0 deve essere divisibile per p. Trasportando ora il termine $a_n p^n$ al secondo membro della (4) e raccogliendo si ottiene

$$q\left(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \cdots a_1 p q^{n-2}\right) = -a_n p^n,$$

da cui si deduce che a_n è disibile per q. □