Sul Teorema Fondamentale dell'Algebra

Luca Granieri
granieriluca@libero.it

Abstract

We discuss in details how to determine the roots of equations of third degree. Moving from the existence of roots of odd degree polynomials we provide a proof of the Fundamental Theorem of Algebra which can be useful to teachers and students of secondary high school level.

Questo articolo è ispirato ad una lezione tenuta dal Prof. Enrico Jannelli in occasione di un corso di formazione per docenti di scuola secondaria nell'ambito del PLS (Piano Lauree Scientifiche) dell'Università di Bari ed è a lui dedicato.

Nello studio dell'algebra uno dei compiti fondamentali che gli studenti imparano ad affrontare è quello di determinare radici di polinomi. Per quelli di primo e secondo grado si può sempre dire se ammettano o no radici (reali) in modo non troppo faticoso. Ma non appena il grado aumenta la faccenda non è più così immediata. Ad esempio, per le equazioni di terzo grado della forma $x^3 - px - q = 0$ (alla quale si può ricondurre qualunque equazione di terzo grado) si ricava la cosiddetta formula di Cardano-Tartaglia-Del Ferro

$$(1) \qquad x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

L'applicabilità (in campo reale) della (1) richiede ovviamente che sia

$$(2) \qquad \Delta_3 := \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} \geq 0$$

Ma il fatto è che anche in casi semplici come per l'equazione $x^3 - 15x - 4 = 0$ risulta $\Delta_3 = 4 - 5^3 = -121 < 0$ mentre si trova che $x=4$ è una radice. Infatti, da una valutazione diretta risulta $4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 4^3 - 4(-15 - 1) = 4^3 - 4^3 = 0$. Anzi, di radici reali il polinomio $P(x) = x^3 - 15x - 4 = 0$ ne ammette in realtà tre. Basta osservare che $P(-5) = -5^3 + 3 \cdot 5^2 - 4 = -5^3(5 - 3) - 4 < 0$; $P(-3) = -3^3 + 15 \cdot 3 - 4 = -3^3(5 - 3) - 4 > 0$ ed applicare il Teorema degli zeri.
Ora, se $\Delta_3 \geq 0$ si verifica facilmente che la formula (1) restituisce effettivamente una radice dell'equazione di terzo grado $x^3 - px - q = 0$. Ma i polinomi di grado dispari hanno sempre almeno una radice reale (quale conseguenza del Teorema degli zeri) e la (1) sembra non essere in grado di trovarla sempre, né di dirci se ce ne siano altre o no. A meno che non si passi al campo *complesso*. Considerando l'unità immaginaria $i^2 = -1$, nel caso in cui $\Delta_3 < 0$ la (1) restituisce la radice terza di due numeri complessi coniugati. Ad esempio per l'equazione $x^3 - 15x - 4 = 0$ si tratta di calcolare $x = \sqrt[3]{-2 + 11i} + \sqrt[3]{-2 - 11i}$. Nei primi rudimenti sui numeri complessi si trova la proprietà che ogni numero complesso ha sempre k radici complesse distinte, quale che sia l'intero $k \geq 1$. Inoltre, se $w^3 = z$ è una radice terza di z allora il suo coniugato soddisfa $\overline{w}^3 = \overline{w^3} = \bar{z}$ da cui deriva che $\overline{w}$ è una radice terza di $\bar{z}$. Pertanto, la (1) assume la forma

$$x = \sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\bar{z}} = w + \bar{w} \ \in \mathbb{R}\,.$$

Pertanto, ogni volta che $\Delta_3 < 0$ la (1) ci restituisce ben tre radici reali.
Se invece $\Delta_3 \geq 0$ allora la (1) ci restituisce una radice reale, diciamo $x_1 \in \mathbb{R}$. Dividendo si ottiene la scomposizione

$$x^3 - px - q = (x - x_1)(x^2 + x_1 x + x_1^2 - p).$$

Dunque, la natura delle altre radici del polinomio (che saranno in tutto ancora tre, tenuto conto della molteplicità) dipendono dal comportamento del trinomio di secondo grado $x^2 + x_1 x + x_1^2 - p$ e quindi in definitiva dal suo discriminante $\Delta = x_1^2 - 4(x_1^2 - p) = 4p - 3x_1^2$.
Naturalmente, vorremo stabilire la natura delle radici in base al comportamento di Δ_3. Distinguiamo i casi

- $\Delta_3 = 0$,

da cui ricaviamo che $x_1 = 2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} = \sqrt[3]{4q}$. Segue che $x_1^2 = \sqrt[3]{4^2 q^2}$. D'altra parte, essendo $\Delta_3 = 0$ si ha che $q^2 = \frac{4p^3}{3^3}$. Pertanto $\Delta = 4p - 3x_1^2 = 4p - 3 \cdot \frac{4}{3}p = 0$. Pertanto l'equazione $x^3 - px - q$ ammette un'ulteriore radice reale doppia

$$x_2 = -\frac{x_1}{2} = -\sqrt[3]{\frac{q}{2}}\,.$$

- $\Delta_3 > 0$.

Poniamo per semplicità $a = \frac{q}{2}$, $b = \frac{p}{3}$ e ancora $A = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - b^3}}$ e $B = \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 - b^3}}$. Valutiamo che

$$x_1^2 = (A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB > 4AB = 4\sqrt[3]{b^3} = 4b = \frac{4}{3}p.$$

Dove abbiamo utilizzato la disuguaglianza $A^2 + B^2 \geq 2AB$ nella quale l'uguaglianza vale se e soltanto se $A = B$. In definitiva abbiamo che $\Delta = 4p - 3x_1^2 < 4p - 3 \cdot \frac{4}{3}p = 0$. In tal caso l'equazione $x^3 - px - q = 0$ non ammette altre radici reali ma bensì due radici complesse e coniugate:

$$z = \frac{-x_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}\,.$$

- $\Delta_3 < 0$,

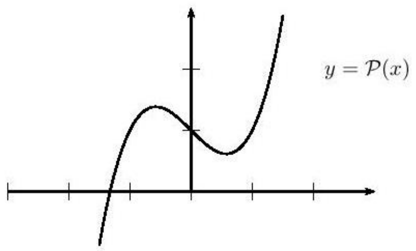
come discusso in precedenza l'equazione $x^3 - px - q = 0$ ammette tre radici reali distinte.

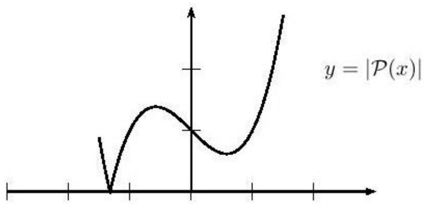
Il Teorema Fondamentale dell'Algebra

La discussione sul polinomio di terzo grado ci suggerisce che passando ai numeri complessi si possano sempre trovare tante radici quanto è il grado del polinomio. Ma, come si sa, a partire dai contributi di Ruffini-Abel-Galois, per i polinomi di grado qualsiasi non esistono formule algebriche esplicite (tranne che per il grado quattro) su cui fare affidamento. Occorre un approccio più generale (e più indiretto). Ad ogni modo, scomponendo i polinomi, il Teorema fondamentale dell'algebra assume la forma

Teorema Fondamentale dell'Algebra: Ogni polinomio ammette almeno una radice in campo complesso.

Come accennato più volte, per i polinomi di grado dispari ciò è vero già in campo reale. Tuttavia, l'argomento del Teorema degli zeri non è esportabile così com'è in campo complesso, giacché non c'è una corrispondente relazione d'ordine. Ma potremmo cambiare strategia. Infatti, gli zeri del polinomio dispari $P(x)$ potrebbero essere visti come punti di minimo di $|P(x)|$.





Cosa che potrebbe avere un seguito anche in campo complesso. Formalizziamo quest'idea nel seguente

Teorema. Ogni polinomio (reale a coefficiente reali) di grado dispari possiede almeno una radice reale.
Dim.
Avendo grado dispari si ha $|P(x)| \to +\infty$ per $x \to \pm\infty$. Dal Teorema di Weierstrass segue facilmente che $|P(x)|$ ammette minimo. In effetti, fissato un qualunque valore $y_0 = |P(0)|$, possiamo assumere che $|P(x)| > y_0$ fuori da un intervallo di raggio *r>0*. Allora il minimo di $|P(x)|$ in *[-r, r]* è automaticamente il minimo di $|P(x)|$ su tutta la retta reale. Sia dunque x_0 punto di minimo di $|P(x)|$. Se fosse $|P(x_0)| \neq 0$, detto *n* il grado di *P*, si consideri $w^n = -\frac{1}{a_n}$, dove $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Cosa che è sempre possibile essendo *n* dispari. Per fissare le idee supponiamo che sia ad esempio $P(x_0) > 0$.
Valutiamo che

$$|P(x_0 + tw)| = |P(x_0) - t^n + l(t)| < |P(x_0)|$$

per qualche *t* in un intorno dell'origine essendo *l(t)* un polinomio di grado *n-1* con *l(0)=0*. Basterà scegliere $0 < t^n - l(t) < P(x_0)$.
Ma questo contraddice il fatto che x_0 è punto di minimo per *|P(x)|*. □

La strategia perseguita nella dimostrazione precedente funziona perché è sempre possibile estrarre radici di ordine dispari. Cosa che non funziona per il grado pari. Ma allora questa limitazione nell'ambito dei numeri reali può diventare invece un punto di forza nell'ambito complesso, giacché in quel contesto l'estrazione di radici (complesse) è sempre possibile senza limitazione alcuna. Poi si può interpretare il $|\cdot|$ come *modulo* dei numeri complessi e utilizzare il Teorema di Weierstrass nel piano complesso (ovvero per funzioni continue in due variabili). Possiamo allora produrre la seguente

Dimostrazione del Teorema Fondamentale dell'Algebra

Dato che $|P(z)| \to +\infty$ per $|z| \to +\infty$, utilizzando il Teorema di Weierstrass si trova che $|P(z)|$ ammette minimo. Sia z_0 un punto di minimo e supponiamo per assurdo che sia $|P(z_0)| \neq 0$.
Per semplificare un po' le notazioni possiamo suppore, effettuando delle traslazioni, che tale punto di minimo sia l'origine degli assi e che *P(0)=1*. A tal fine si potrà considerare il polinomio $P_1(z) \coloneqq \frac{1}{P(z_0)} P(z + z_0)$. Per cui

$$1 = P_1(0) = \frac{1}{|P(z_0)|} |P(z_0)| \leq \frac{1}{|P(z_0)|} |P(z + z_0)| = |P_1(z)|.$$

In altre parole, possiamo assumere che il nostro polinomio sia della forma $P(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$e che abbia minimo nell'origine.
Sia $a_k \neq 0$ il primo coefficiente non nullo di *P*. Sia $w^k = -\frac{1}{a_k}$ una radice *k*-esima di a_k. Per $t \in [0,1]$ valutiamo che

$$|P(tw)| = \left|1 - t^k + t^{k+1} a_{k+1} w^{k+1} + \cdots t^n a_n w^n\right| \leq$$
$$1 - t^k + t^{k+1} |a_{k+1} w^{k+1} + \cdots| < 1 = |P(0)|$$

per *t* abbastanza piccolo.

Ma questo contraddice il fatto che $z_0 = 0$ è punto di minimo per $|P(z)|$. $\square$