Affinità relative

Luca Granieri
granieriluca@libero.it; Liceo Scientifico E. Fermi, Bari

Un principio cardine della meccanica classica è il cosiddetto *Principio di relatività galileiano* secondo il quale due sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme tra loro sono fisicamente equivalenti. Galileo espone tale principio in una celebre pagina del suo *Dialogo* rimarcando come nessun esperimento svolto all'interno di un vascello sia in grado di discriminare se la nave sia ferma oppure si muova di moto rettilineo uniforme. Se S è un sistema di riferimento (ad esempio uno solidale al porto) ed S' un riferimento che si muove con velocità costante v rispetto ad S (ad esempio solidale al vascello in moto e lungo la direzione delle sole ascisse) le trasformazioni che legano le coordinate nei due sistemi sono le *trasformazioni di Galileo*

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t. \end{cases}$$

In queste equazioni si sottintende che all'istante iniziale le origini dei due sistemi coincidono. Altrimenti la prima equazione andrebbe ad esempio riscritta nella forma $x' = x - x_0 - vt$ con x_0 la prima coordinata iniziale di O'.

Lo sfondo di tali trasformazioni è costituito dalla concezione newtoniana di spazio e tempo come degli *assoluti*. Così si esprime infatti lo stesso Newton:

Il tempo assoluto, vero, matematico, in sé e per sua natura, senza relazione ad alcunché di esterno, scorre uniformemente, e con altro nome è chiamato durata; quello relativo, apparente e volgare, è una misura (esatta o inesatta) sensibile ed esterna della durata per mezzo del moto, che comunemente viene impiegata al posto del vero tempo: tali sono l'ora, il giorno, l'anno. Lo spazio assoluto, per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, rimane sempre uguale e immobile; lo spazio relativo è una misura o dimensione mobile dello spazio assoluto, che i nostri sensi definiscono in relazione alla sua posizione rispetto ai corpi, ed è comunemente preso al posto dello spazio immobile (Principi matematici della filosofia naturale, I. Newton).

Dunque, essendoci un tempo assoluto, se all'istante iniziale i due sistemi misurano lo stesso tempo nello stesso luogo (la comune origine dei due riferimenti), continueranno a sperimentare lo stesso tempo per sempre. Pertanto è possibile assumere un tempo universale $t = t'$ valido per tutti e due gli osservatori. La misura dello spazio percorso invece, che è una grandezza relativa riferita al sistema di riferimento scelto, si modifica. Se il moto avviene soltanto lungo l'asse delle ascisse, la $x' = x - vt$ non è nient'altro che la legge oraria del moto rettilineo uniforme.

Le trasformazioni di Galileo sono pertanto delle equazioni lineari in cui gli osservatori sperimentano lo stesso tempo e le equazioni fondamentali della meccanica, accettando la conservazione della massa, sono invarianti rispetto ad esse, giacché nei due sistemi le accelerazioni coincidono. Infatti, ricordando che $t' = t$, derivando rispetto al tempo la $x' = x - vt$ si ottiene $V' = V - v$ (composizione galileiana delle velocità) e derivando una seconda volta (essendo v costante) si ottiene $a = a'$. Le equazioni della dinamica restano invariate passando da un sistema all'altro se si assume, come è consuetudine, che anche la massa dei corpi sia invariante (e quindi considerandola come un altro concetto assoluto). In particolare le trasformazioni di Galileo sono delle *isometrie spaziali* in quanto le distanze vengono conservate essendo $|x'_1 - x'_2| = |x_1 - vt - x_2 + vt| = |x_1 - x_2|$. Tuttavia, tali trasformazioni non sono compatibili con l'elettromagnetismo. Infatti, le fondamentali equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico non sono invarianti rispetto a questo tipo di trasformazioni ([3, 4]). La teoria della *relatività ristretta* di Einstein prende le mosse proprio da questa incompatibilità. La via d'uscita mostrata da Einstein consiste nel mantenere immutati l'elettromagnetismo e il principio di relatività galileiano a patto però di riformare i fondamenti della meccanica classica di stampo newtoniano. Il principio di relatività galileiano è in genere introdotto in relazione al concetto di *sistema inerziale*, sebbene al tempo di Galileo la legge di inerzia fosse ancora in uno stato piuttosto embrionale. Inoltre, alla luce della rifondazione della meccanica e della relatività einsteiniana, la nozione di sistema inerziale si rileva piuttosto sottile. In questa sede non è necessario entrare nei dettagli di questa problematica e ci basterà considerare il principio di relatività esattamente come espresso da Galileo, ovvero per sistemi che si muovono di moto rettilineo uniforme uno rispetto all'altro. Per uniformità rispetto alla letteratura sul tema e per brevità si utilizzerà ancora la familiare espressione di *sistemi inerziali*, ma intendendola semplicemente come abbreviazione di *sistemi di riferimento che si muovono di moto rettilineo uniforme uno rispetto all'altro*. La riformulazione della meccanica richiede ovviamente la sostituzione delle trasformazioni di Galileo con delle trasformazioni diverse, dette trasformazioni di Lorentz, che nel nostro caso specifico assumono l'usuale forma riportata in tutti i testi che discutono la relatività:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\gamma}(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{1}{\gamma}(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases} . \tag{1}$$

In queste trasformazioni il tempo non è più assoluto e si *modifica* a causa del moto, risultando *intrecciato* con lo spazio. Con le parole di H. Minkowski: *D'ora in poi lo spazio in sé e il tempo in sé sono condannati a dissolversi in mere ombre e soltanto un certo tipo di unione dei due preserverà una realtà indipendente.* In effetti, a causa delle (1) anche le distanze non si conservano e risultano contratte o dilatate. Tuttavia, in un certo senso, anche tali trasformazioni sono delle *isometrie* ma rispetto ad una (pseudo) metrica diversa da quella usuale, la cosiddetta metrica di Minkowski dello spazio-tempo. Se $P(x_1, y_1, z_1, t_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2, t_2)$ sono due punti dello spazio tempo, tale distanza è espressa da

$$d^2(P, Q) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2,$$

dove la costante c ha le dimensioni di una velocità (rappresenta la velocità della luce nel vuoto). Tale espressione differisce dall'usuale metrica euclidea per la *segnatura*, in quanto compare un segno meno nella componente che contiene il parametro temporale. Questo significa che la $d(P, Q)$ non è necessariamente un numero reale positivo ma può corrispondere anche ad un numero complesso. L'invarianza di questa metrica sarà il punto di appoggio per definire delle trasformazioni del tutto generali, chiamate ancora trasformazioni di Lorentz, di cui le (1) costituiscono un caso particolare, permettendo di fare delle interessanti considerazioni sulla struttura matematica soggiacente alla relatività ristretta.

Cominciamo col ricordare che, nonostante il suo nome, la teoria della relatività è fondata anch'essa su degli assoluti:

1) Validità del principio di relatività galileiano per tutti i fenomeni fisici, compresi in particolare quelli elettromagnetici. Ovvero: *le leggi della fisica sono le stesse (invarianti) in tutti i sistemi inerziali.*

2) Esistenza di una **velocità assoluta**: quella della luce nel vuoto indicata con la lettera c. Pertanto, nei sistemi inerziali la velocità della luce è sempre la stessa indipendentemente dal moto degli osservatori.

Da questo punto di vista, la relatività einsteiniana è forse più assoluta della meccanica newtoniana. Per mantenere spazio e tempo assoluti la meccanica classica conduce infatti ad operare con leggi fisiche (come le equazioni di Maxwell) che non risultano valide per tutti. Permettendo invece allo spazio e al tempo di cambiare, la relatività di Einstein assicura invece che le leggi della fisica sono uguali per tutti. Naturalmente, in quest'ottica le trasformazioni che permettono di confrontare le esperienze di osservatori diversi, come già accennato, devono essere più complicate rispetto a quelle galileiane. In questo frangente, l'approccio usuale consiste nell'introdurre delle trasformazioni affini compatibili con le due richieste della relatività ristretta per poi verificare la conservazione delle metrica di Minkowski (si veda [3]). In altre parole si scrivono delle equazioni di primo grado che legano i due sistemi S ed S' e se ne determinano i coefficienti in modo da soddisfare le richieste della relatività ristretta. Ma chi ci assicura che tali equazioni debbano essere di primo grado? In genere tale questione è data per scontata o sorvolata. Lo stesso Einstein così si esprime al riguardo nel famoso articolo del 1905 *Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento*:

In primo luogo, è evidente che queste equazioni devono essere lineari in virtù delle proprietà di omogeneità attribuite allo spazio e al tempo [5, p. 140].

Ad essere pignoli questo vorrebbe dire che la linearità è conseguenza di qualche ulteriore proprietà di spazio e tempo corrispondendo in qualche modo ad un ulteriore postulato della relatività ristretta che l'intuizione fisica ci incoraggia ad abbracciare. Tuttavia, è da rimarcare il fatto che Einstein si sia effettivamente posto la questione alla quale è in effetti possibile dare una risposta matematicamente rigorosa. Il famoso *Teorema di Alexandrov* (si veda ad esempio [6]) mostra infatti che la sola richiesta di una velocità assoluta determina univocamente il gruppo delle cosiddette trasformazioni di Poincaré, di cui quelle di Lorentz costituiscono un sottogruppo. Da questo punto di vista la velocità della luce è in un certo qual modo *convenzionale*. Ciò che conta è l'esistenza di una qualsivoglia velocità (indipendentemente da quella della luce) che resti invariata nel passaggio da un sistema ad un altro. Dunque, la *linearità* delle trasformazioni di Lorentz non costituisce un nuovo postulato ma è una conseguenza diretta dei postulati della relatività ristretta, in un modo forse meno evidente di quanto Einstein potesse ritenere. Ci proponiamo di illustrare il Teorema di Alexandrov, così come accennato in [1] perlomeno nel caso di dimensione (spaziale) uno. Vale a dire:

Se esiste una velocità che resta invariata nei sistemi inerziali allora i sistemi inerziali stessi sono legati tra loro da trasformazioni affini. Se inoltre queste trasformazioni preservano l'orientamento (formando conseguentemente un gruppo di trasformazioni) allora esse coincidono con le usuali trasformazioni di Lorentz (come nel caso delle (1)*).*

La strategia che seguiremo consiste dapprima nell'osservare che l'invarianza della velocità (ad esempio quella della luce) in due sistemi inerziali si traduce nell'invarianza della metrica di Minkowski nel passaggio da un sistema all'altro. Le trasformazioni che cerchiamo devono allora mantenere invariata la metrica di Minkowski. Questa interpretazione geometrica-analitica motiva lo studio astratto di queste trasformazioni, chiamate ancora trasformazioni di Lorentz. Troveremo che tali trasformazioni sono affini e il sottoinsieme di trasformazioni che preservano l'orientamento (che formano così un gruppo) coincide esattamente con le (1). Da questo punto di vista le (1) possono essere pertanto riguardate come le uniche trasformazioni che preservano la metrica di Minkowski e l'orientamento. Oltre al suo interesse intrinseco, l'approfondimento qui proposto ha il merito di evidenziare che sostanzialmente anche la relatività ristretta si può inquadrare in una *geometrizzazione dello spazio-tempo*, sulla stessa scia che conduce alla geometria (differenziale) su cui poggia la relatività generale.

1 Trasformazioni di Lorentz e coni di luce

Consideriamo dunque due sistemi inerziali S, S' supponendo, senza perdere di generalità (altrimenti basterà operare una traslazione), che sia all'istante iniziale $O = O'$. Possiamo immaginare che un fotone sia emesso nell'origine e seguirne poi la traiettoria che fa parte del cosiddetto *cono di luce*. Siano dunque (x, y, z, t) le coordinate del fotone in S e (x', y', z', t') quelle in S'. Indichiamo con c_1, c_2, c_3 le componenti della velocità della luce c che resta invariata nel passaggio da S ad S'. La luce si muove di moto rettilineo uniforme e quindi ad ogni istante di tempo t avremo che

$$x = c_1 t,\ \ y = c_2 t,\ \ z = c_3 t.$$

Elevando al quadrato e sommando otteniamo

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_1^2 t^2 + c_2^2 t^2 + c_3^2 t^2 = (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) t^2 = c^2 t^2.$$

Pertanto la traiettoria del fotone soddisfa la seguente equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad \text{(Cono di luce).}$$

Da un punto di vista puramente geometrico-analitico possiamo dunque identificare la curva descritta dalla luce come il luogo geometrico dei punti dello spazio euclideo

$\mathbb{R}^4$ di equazione $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$. Si è soliti, come già implicitamente abbiamo fatto, chiamare tali luoghi geometrici *coni di luce*. Poiché la velocità c è la stessa nei due sistemi, la stessa identica situazione si ripeterà in S' per cui anche l'osservatore in questo secondo sistema troverà la stessa equazione $x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0$ per il suo cono di luce. D'altra parte, le espressioni appena scritte corrispondono alle distanze di Minkowski dall'origine. In maniera compatta possiamo cioè interpretare il cono di luce come il luogo dei punti $P\in\mathbb{R}^4$ tali che $d(P,O)=0$. In altre parole, i coni di luce (di centro l'origine) non sono nient'altro che i punti che hanno distanza di Minkowski nulla dall'origine. In particolare osserviamo esplicitamente che tali distanze si conservano nel passaggio da un sistema di riferimento all'altro, vale a dire che $d(P,O)=0=d(P',O')$. Più in generale richiederemo la condizione $d(P,Q)=0=d(P',Q')$ (invarianza del cono di luce di centro Q).

Infatti, immaginiamo questa volta che il nostro raggio di luce parta da un punto Q. Allora i punti P del cono di luce di centro Q soddisfano le relazioni

$$x-x_q=c_1(t-t_q); \quad y-y_q=c_2(t-t_q); \quad z-z_q=c_3(t-t_q).$$

Quadrando e sommando otteniamo

$$d^2(P,Q)=(x-x_q)^2+(y-y_q)^2+(z-z_q)^2-c^2(t-t_q)^2=0.$$

Poiché i due sistemi valutano la stessa velocità c, la stessa equazione continua a valere in S' e pertanto anche $d(P',Q')=0$. Osserviamo che le relazioni trovate possono anche essere scritte nella forma $d(P-Q,O)=0\Leftrightarrow d(P'-Q',O')=0$ o per un centro diverso dall'origine

$$d(P-Q,A)=0\Leftrightarrow d(P'-Q',A')=0.$$

A questo punto, allo scopo di stabilire il Teorema di Alexandrov, risulta pertanto fondamentale studiare più nel dettaglio le trasformazioni che preservano la distanza di Minkowski dal punto di vista astratto.

Definizione 1 (Trasformazioni di Lorentz)**.** *Si dice Trasformazione di Lorentz ogni trasformazione L di $\mathbb{R}^4$ in sé ingettiva che preservi le distanze di Minkowski.*

In altre parole, denotando $L(P):=P'$ per ogni $P\in\mathbb{R}^4$, una trasformazione di Lorentz è una funzione ingettiva che soddisfa

$$d(P,Q)=0\Leftrightarrow d(P',Q')=0 \quad \text{(Invarianza dei coni di luce).} \tag{2}$$

Per completezza facciamo notare che anche la conservazione della distanza di Minkowski $d(P,Q)=d(P',Q')$ tout court è una conseguenza diretta dell'apparente meno generale condizione di conservazione dei coni di luce. Nel caso più generale, compreso quello in cui la trasformazione in considerazione non sia a priori lineare, tale conservazione è una conseguenza delle proprietà delle forme quadratiche differenziali (su questa questione si può consultare ad esempio [2]).

Per rendere più accessibili le argomentazioni ci limiteremo al caso in cui il moto avvenga in una sola dimensione spaziale. In tal caso le trasformazioni di Lorentz sono trasformazioni del piano euclideo in sé al pari di isometrie, dilatazioni, similitudini ecc.

Per un moto unidimensionale (nello spazio) lungo l'asse delle ascisse, per i coni di luce di centro l'origine, la (2) può in effetti essere scritta come $x^2 - c^2t^2 = 0 \Leftrightarrow (x')^2 - c^2(t')^2 = 0$ da cui $(x-ct)(x+ct) = 0 \Leftrightarrow (x'-ct')(x'+ct') = 0$. Pertanto, i coni di luce corrispondono alle due rette incidenti nell'origine di pendenza $\pm c$. Da un punto di vista puramente geometrico possiamo dunque pensare ad una trasformazione di Lorentz come ad una trasformazione che lasci invariate queste due rette incidenti nell'origine. Osserviamo esplicitamente che in questa interpretazione il contenuto relativistico (la metrica di Minkowski) è inglobato unicamente nei luoghi geometrici di cui si richiede l'invarianza e pertanto le trasformazioni di Lorentz continuano ad operare nell'usuale spazio euclideo. Naturalmente anche le trasformazioni di Galileo $x' = x - vt, t' = t$ corrispondono ad una trasformazione del piano euclideo in sé. Un moto rettilineo uniforme corrisponde ad una retta, diciamo $x = wt + q$ nel piano (t,x). La trasformazione di Galileo manda tale retta in $x' = (w-v)t + q$. Pertanto le trasformazioni di Galileo mandano rette in rette ma la loro pendenza (ossia la velocità) non è preservata. Le trasformazioni di Lorentz sono state invece definite proprio allo scopo di preservare le pendenze dei coni di luce, ovvero delle rette nel piano (t,x) per l'origine di pendenza $\pm c$. In parole povere il postulato relativistico sull'invarianza della velocità della luce corrisponde dal punto di vista geometrico all'invarianza dei coni di luce. Il nostro compito è allora quello di studiare le trasformazioni del piano che lasciano invariate due rette incidenti con pendenze uguali in valore assoluto e di segno opposto (ad esempio $\pm c$).

Prima di procedere diamo ancora uno sguardo alle trasformazioni di Galileo osservando che costituiscono un *gruppo di trasformazioni*. In particolare ogni trasformazione è invertibile (basta cambiare il segno della velocità v) e la composta di trasformazioni di Galileo è ancora una trasformazione di Galileo, cosa che rappresenta in modo naturale la legge di composizione delle velocità. Infine la matrice corrispondente è della forma

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

il cui determinante vale uno. Si tratta dunque di trasformazioni che hanno l'importante proprietà di preservare le aree (determinante unitario) e l'orientamento (determinante positivo). Quest'ultima condizione corrisponde a interdire l'inversione temporale tra passato e futuro. Nel cercare trasformazioni più generali che siano compatibili con la relatività vorremo naturalmente conservare se possibile queste desiderabili proprietà.

2 Trasformazioni di Lorentz in dimensione uno

Per semplicità consideriamo allora una sola dimensione spaziale x e per snellire i calcoli operiamo il cambio di variabile $u = ct$. Osserviamo che u è fisicamente una coordinata spaziale. Se L è una trasformazione di Lorentz, vale allora la seguente

$$x^2 - u^2 = 0 \Leftrightarrow (x')^2 - (u')^2 = 0.$$

Innanzitutto vogliamo mostrare che L dev'essere affine, ovvero che rette vengono mandate in rette. Cerchiamo allora un modo conveniente di rappresentare le rette del piano euclideo. Dati due punti $P(x_p, u_p)$ e $Q(x_q, u_q)$ abbiamo

$$d^2(P,Q) = (x_p - x_q)^2 - (u_p - u_q)^2 = x_p^2 + x_q^2 - 2x_px_q - u_p^2 - u_q^2 + 2u_pu_q =$$

$$x_p'^2 - u_p'^2 - x_q'^2 + u_q'^2 + 2u_pu_q - 2x_px_q.$$

Tale espressione coincide con quella di $d^2(P', Q')$ se e solo se $u_pu_q - x_px_q = u_p'u_q' - x_p'x_q'$. Le espressioni algebriche in quest'ultima uguaglianza assomigliano tantissimo all'usuale prodotto scalare euclideo tranne che per la segnatura, giacché compare un segno meno invece che il solo segno positivo. Se allora introduciamo la notazione $\langle P, Q\rangle := x_px_q - u_pu_q$ (pseudo prodotto scalare) abbiamo che

$$d(P,Q) = d(P',Q') \Leftrightarrow \langle P, Q\rangle = \langle P', Q'\rangle.$$

Dunque una trasformazione di Lorentz lascia equivalentemente inalterati i (pseudo) prodotti scalari appena definiti. Consideriamo allora la generica retta $r : \alpha x + \beta u + \gamma = 0$ in S. Considerato $A(\alpha, -\beta)$ e effettuando una traslazione nel caso in cui r non passi per l'origine ($\gamma \neq 0$), la retta r è individuata da

$$r = \{P(x,u) \; : \; \langle P - Q, A\rangle = 0\}$$

dove le coordinate di Q sono scelte in modo tale da soddisfare $ax_q + by_q = -\gamma$. Dunque le rette del piano euclideo si possono anche rappresentare tramite un (pseudo) prodotto scalare. Per questo motivo L trasforma rette in rette essendo

$$r' = \{P' \; : \; \langle P' - Q', A'\rangle = 0\}.$$

Trattandosi di una affinità, le proprietà fondamentali della geometria affine ci assicurano che L è determinata da equazioni di primo di grado

$$\begin{cases} x' = a_1x + a_2u \\ u' = a_3x + a_4u \end{cases}.$$

La trasformazione L deve conservare i coni di luce e quindi

$$(x')^2 - (u')^2 = x^2 - u^2 \Leftrightarrow a_1^2x^2 + a_2^2u^2 + 2a_1a_2xu - a_3^2x^2 - a_4^2u^2 - 2a_3a_4xu = x^2 - u^2.$$

Utilizzando il principio di identità dei polinomi i coefficienti della trasformazione devono soddisfare le condizioni

$$a_1^2 - a_3^2 = 1, \quad a_4^2 - a_2^2 = 1 \quad a_1a_2 - a_3a_4 = 0. \tag{3}$$

Se non vogliamo ricorrere alla conservazione della distanza di Minkowski tout court, occorre qualche accorgimento aggiuntivo. Per completezza presentiamo un breve cenno. Sul cono di luce, essendo $x = \pm u$, si ricavano le condizioni $a_1a_2 - a_3a_4 = 0$ e $a_1^2 - a_3^2 = a_4^2 - a_2^2$, da cui segue che $(x')^2 - (u')^2 = \lambda(x^2 - u^2)$ con $\lambda = a_1^2 - a_3^2 = a_4^2 - a_2^2$. Pertanto le due espressioni coincidono a meno di un fattore che è indipendente dalla velocità. Si conclude che allora dev'essere $\lambda = 1$ e quindi le distanze di Minkowski si conservano non solo lungo i coni di luce ma in tutto lo spazio-tempo. Per vedere ciò basta esprimere λ come rapporto tra le distanze di Minkowski (dove diverse da zero) a passare al limite per $v \to 0$, visto che per $v = 0$ (e assumendo una variazione continua) $S \equiv S'$.

Tornando alla nostra trasformazione, distinguiamo due casi per il coefficiente a_2. Se $a_2 = 0$ allora, essendo L ingettiva, $a_1 \neq 0$ e quindi $a_4 = \pm 1$. Ne consegue che $a_3 = 0$ e pertanto $a_1 = \pm 1$. Le trasformazioni si riducono alle $x' = \pm x$ e $u' = \pm u$ che oltre alla trasformazione identica comprendono la simmetria rispetto all'origine e le due simmetrie rispetto agli assi coordinati. In questa situazione, anche ulteriori richieste minimali, ad esempio che le parti positive del cono di luce restino positive, vale a dire che il futuro non diventi passato e viceversa, riducono al lumicino la scelta per le nostre trasformazioni. L'unica trasformazione a soddisfare tale richiesta è l'identità che corrisponde al caso in cui S' sia in quiete ($v = 0$) rispetto ad S. Dall'esame di questo caso particolare emerge il fatto che non tutte le trasformazioni che preservano i coni di luce conducono alle usuali espressioni delle trasformazioni di Lorentz. In genere si richiede, come accade per quelle di Galileo, che tali trasformazioni abbiano determinante pari ad uno, ovvero che conservino l'orientamento (determinante positivo) e le aree (determinante unitario). In effetti le trasformazioni con determinante negativo si dicono anche *Trasformazioni di Lorentz improprie* (non formano un gruppo). In effetti si prova che $|det(L)| = 1$ è una condizione necessaria affinché le trasformazioni di Lorentz formino un gruppo, e quindi, tra le altre cose, affinché la composizione di trasformazioni di Lorentz sia ancora una trasformazione di Lorentz. In queste sede ci limitiamo a verificare la validità di tale condizione sul determinante. Introduciamo le seguenti matrici

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad ; \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando l'algebra delle matrici le condizioni (3) si compattano nell'espressione

$$L^T \cdot G \cdot L = G$$

dove L^T è la matrice trasposta e il prodotto è quello righe$\times$colonne. Calcolando i determinanti, utilizzando la cosiddetta formula di Cauchy-Binet e il fatto che il determinante della matrice trasposta coincide con quello della matrice stessa, otteniamo

$$det^2(L) det(G) = det(G) \Rightarrow det^2(L) = 1.$$

Non resta allora che esaminare il caso in cui sia $a_2 \neq 0$. Ricavando a_1 dalla terza condizione della (3) sui coefficienti e sostituendo nella seconda si ottiene

$$\frac{a_3^2 a_4^2}{a_2^2} - a_3^2 = 1 \Rightarrow a_3^2 a_4^2 - a_3^2 a_2^2 = a_2^2 \Rightarrow a_3^2(a_2^2 + 1) - a_3^2 a_2^2 = a_2^2 \Rightarrow a_3^2 = a_2^2 \Rightarrow a_3 = \pm a_2.$$

Dunque, $a_3 = a_2 \to a_1 = a_4$, mentre $a_3 = -a_2 \to a_1 = -a_4$. Se pertanto richiediamo la minima condizione di preservare l'orientamento la trasformazione L assume la forma

$$\begin{cases} x' = ax + bu \\ u' = bx + au \end{cases} \tag{4}$$

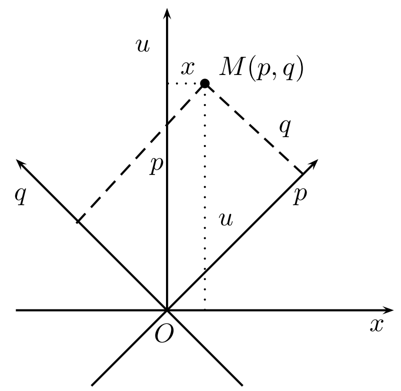

Figura 1: Rotazione delle coordinate

con $a^2 - b^2 = 1$. Ora, lungo la retta $x = u$ abbiamo $x' = (a + b)x$. Mentre sulla retta $x = -u$ si ha $u' = (a - b)u$. D'altra parte $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 = 1$. Se allora poniamo $\tau = a + b$, lungo il cono di luce $(x + u)(x - u) = 0$ la trasformazione L agisce come una dilatazione di fattore τ su una retta e come una contrazione con fattore il reciproco sull'altra, ovvero $x' = \tau x$ e $u' = \frac{1}{\tau}u$.

A questo punto, sapendo come la trasformazione agisce sul cono di luce è essenziale esprimere le coordinate sfruttando questa informazione. Osserviamo che il cono di luce è formato da due rette ortogonali passanti per l'origine formando così in modo naturale un altro sistema di riferimento ruotato di 45 gradi rispetto al sistema di riferimento originale. Le equazioni della rotazione permetteranno di passare da un sistema all'altro. Indichiamo con (p, q) le coordinate nel sistema del cono di luce come in figura 1.

Il cambio di coordinate è dato allora dalle equazioni di una rotazione di 45 gradi.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}p - \frac{1}{\sqrt{2}}q \\ u = \frac{1}{\sqrt{2}}p + \frac{1}{\sqrt{2}}q \end{cases}.$$

Sostituendo le coordinate (x, u) appena trovate nella (4) otteniamo

$$\begin{cases} x' = a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}p - \frac{1}{\sqrt{2}}q\right) + b\left(\frac{1}{\sqrt{2}}p + \frac{1}{\sqrt{2}}q\right) \\ u' = b\left(\frac{1}{\sqrt{2}}p - \frac{1}{\sqrt{2}}q\right) + a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}p + \frac{1}{\sqrt{2}}q\right) \end{cases}$$

da cui, ricordando che $a + b = \tau$ e $a - b = \frac{1}{\tau}$, segue

$$\begin{cases} \sqrt{2}x' = \tau p - \frac{1}{\tau}q \\ \sqrt{2}u' = \tau p + \frac{1}{\tau}q \end{cases}.$$

Ritorniamo alle coordinate (x, u) invertendo la rotazione, per cui $\sqrt{2}p = x + u$ e $\sqrt{2}q = -x + u$. Sostituendo

$$x' = \frac{1}{2}\left(\tau x + \tau u + \frac{1}{\tau}x - \frac{1}{\tau}u\right) = \frac{\tau^2 + 1}{2\tau}x + \frac{\tau^2 - 1}{2\tau}u.$$

$$u' = \frac{1}{2}\left(\tau x + \tau u - \frac{1}{\tau}x + \frac{1}{\tau}u\right) = \frac{\tau^2-1}{2\tau}x + \frac{\tau^2+1}{2\tau}u.$$

Ricordando che $u = ct$ otteniamo

$$x' = \frac{\tau^2+1}{2\tau}\left(x - \frac{1-\tau^2}{\tau^2+1}\right) \quad ; \quad t' = \frac{\tau^2+1}{2\tau}\left(t + \frac{\tau^2-1}{c(\tau^2+1)}x\right).$$

Ponendo $v = \frac{1-\tau^2}{\tau^2+1}c$ il fattore $\frac{\tau^2+1}{2\tau}$ si scrive

$$v\tau^2 + v = c - c\tau^2 \Rightarrow \tau^2 = \frac{c-v}{c+v} \Rightarrow \frac{\tau^2+1}{2\tau} = \left(\frac{c-v}{c+v}+1\right)\frac{\sqrt{c+v}}{2\sqrt{c-v}} =$$

$$= \frac{2c}{c+v}\frac{\sqrt{c+v}}{2\sqrt{c-v}} = \frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Posto $\gamma = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ il fattore di contrazione, la trasformazione di Lorentz L assume l'usuale forma

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\gamma}(x - vt) \\ t' = \frac{1}{\gamma}(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases} . \tag{5}$$

Per $x = 0$ le (5) diventano $x' = -\frac{v}{\gamma}t$ e $t' = \frac{t}{\gamma}$ da cui $x' = -vt'$. Pertanto, v rappresenta effettivamente la velocità di S' rispetto ad S.

3 Conclusione

Tradizionalmente le trasformazioni di Lorentz vengono ricavate dai postulati della relatività ristretta mediante motivazioni fisiche. Tuttavia, il fatto che queste trasformazioni siano affini costituisce in genere un'assunzione a priori. Data cioè una trasformazione di primo grado, se ne determinano i coefficienti in modo che siano soddisfatte le richieste della relatività ristretta. Da questo punto di vista il trattare con trasformazioni affini costituirebbe un ulteriore postulato della relatività ristretta. Lo stesso Einstein procede in questo modo nella sua esposizione della relatività motivando fisicamente la linearità delle equazioni. Il contributo di Alexandrov qui esposto mostra invece che non è necessario postulare o motivare ulteriormente la scelta di trasformazioni di primo grado. Il fatto che le trasformazioni che collegano sistemi di riferimento inerziali siano affini è una conseguenza del postulato di invarianza della velocità della luce. Tale risultato è stato ottenuto interpretando geometricamente il postulato di invarianza della velocità della luce nell'invarianza dei coni di luce. In modo puramente geometrico-analitico si ottiene anche l'usuale espressione delle trasformazioni di Lorentz per le trasformazioni che preservino i coni di luce e l'orientamento.

Riferimenti bibliografici

[1] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrentev, Le Matematiche, Bollati Boringhieri, 1977.

[2] F. Borghero, F. Demontis, Relatività per principianti, Fondamenti di Relatività Ristretta e Generale con breve Compendio di Fisica Classica, UNICApress, 2021.

[3] L. Granieri (a cura di), Mathematical Pride 1, LaDottta editore, 2020.

[4] L. Granieri, Relativamente ristretta, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.

[5] J. Stachel (a cura di), L'anno memorabile di Einstein, Dedalo, 2001.

[6] K. Svozil, Conventions in relativity theory and quantum mechanics, Foundations of Physics volume 32, pag. 479-502 (2002).