Principi di Programmazione Lineare

Dr. Luca Granieri

Indice

Introduzione **1**

1 Geometria di $\mathbb{R}^N$ e algebra lineare **5**
1.1 Cenni di topologia di $\mathbb{R}^N$ 5
1.2 Richiami di algebra lineare 7
1.2.1 Matrici e applicazioni lineari 9
1.3 Sistemi lineari 14
1.3.1 Il metodo di eliminazione di Gauss 14

2 La programmazione lineare **19**
2.1 Alcune nozioni di convessità 20
2.2 Il metodo del simplesso 24
2.3 L'algoritmo del simplesso 26
2.4 Giustificazione teorica del metodo del simplesso 29
2.4.1 Convergenza dell'algoritmo del simplesso 30
2.4.2 Riduzione in forma canonica 32
2.5 Il problema duale 34

Introduzione

In queste note ci occuperemo principalmente di problemi di ottimizzazione. Ovvero di cercare le strategie migliori per portare a termine un certo compito. Già Euclide si chiedeva quale fosse tra tutti i parallelogrammi di fissato perimetro quello che racchiudesse l'area maggiore. Come si può intuire facilmente, tale parallelogrammo è costituito dal quadrato. In effetti, assegnato un parallelogrammo è facile costruire un rettangolo con lo stesso perimetro ma con area maggiore (vedi figura (1)).

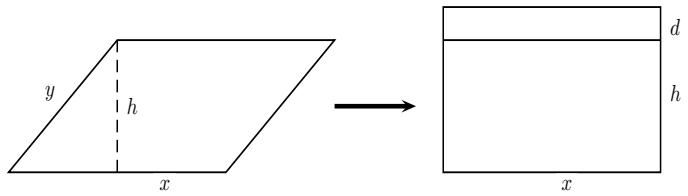

Figura 1: Prendendo $h + d = y$ il rettangolo ha stesso perimetro ma area più grande

Tra i rettangoli poi la scelta migliore è costituita dal quadrato. Ciò discende ad esempio dalla ben nota disugualianza tra la media geometrica e quella aritmetica

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}. \tag{1}$$

In effetti, il secondo membro della (1) rappresenta il semiperimetro se x, y sono le dimensioni del rettangolo, e dunque si tratta di una quantità fissata. Allora l'area massima si raggiunge quando nella (1) vale il segno di uguaglianza e questo si ottiene per $x = y$ ovvero per il quadrato.

Benchè molte proprietà di ottimizzazione siano conosciute sin dall'antichità, come ad esempio la proprietà isoperimetrica del cerchio, per un approccio sistematico a tali problemi dobbiamo attendere il XVII secolo con l'introduzione del calcolo infinitesimale e la nascita del *Calcolo delle Variazioni* che a tutt'oggi è un vasto e intenso campo di ricerca.

Recentemente, una nuova classe di problemi di ottimizzazione è stata originata dalla complessa organizzazione della società moderna che richiedeva modelli per ottimizzare la gestione delle risorse, le strategie economiche e belliche. In effetti, intorno agli anni '40, l'aeronautica militare degli Stati Uniti organizzò e finanziò il progetto *SCOOP* (Scientific Computation of Optimum Programs) nell'ambito del quale furono sviluppati molti studi, sia teorici che applicativi. Anche la scuola russa, naturalmente sviluppò molto queste questioni. In queste note ci occuperemo di alcuni di questi problemi noti come problemi di *Programmazione Lineare*. Per avere una idea più precisa consideriamo il seguente esempio

Esempio 1 (Organizzazione della produzione)**.** *Per fabbricare due articoli A e B sono necessarie due macchine M_1, M_2. La prima impiega 5 minuti nella costruzione dell'articolo A e 6 minuti nella costruzione di B, mentre la seconda impiega 7 minuti per l'articolo A e 2 per B. Entrambe le macchine possono essere usate solo per 8 ore al giorno. Sapendo che l'articolo A fornisce un*

guadagno di 126 *euro e l'articolo* B *di* 90 *euro, si determini il numero più conveniente di articolo* A *e* B *da produrre giornalmente per ottenere il massimo guadagno possibile.*

Detti x, y *rispettivamente le quantità di* A *e di* B *da produrre, il nostro problema è quello di massimizzare la funzione* $R(x, y) = 126x + 90y$. *Tuttavia, poichè le due macchine producono i diversi articoli in diverso tempo dovremo richiedere che* $5x + 6y \leq 480$ *e che* $7x + 6y \leq 480$. *Certamente poi potremo supporre che* $x, y \geq 0$. *Dunque il nostro modello di Programmazione Lineare è il seguente*

$$\begin{cases} \max\ R(x, y) = 126x + 90y \\ x, y \geq 0 \\ 5x + 6y \leq 480 \\ 7x + 6y \leq 480 \end{cases}$$

Ora, i vincoli del problema individuano una regione compatta (chiusa e limitata) del piano, si veda la figura (2). Inoltre la funzione $R(x, y)$ *è continua e pertanto il Teorema di Weierstrass ci assicura che una strategia ottimale esiste. Ma come determinare tale soluzione? Per dare una risposta che sia utile sul piano applicativo sfrutteremo il fatto che l'insieme compatto individuato dai vincoli non è un insieme qualunque ma è un poligono convesso. Infatti si può dimostrare che il massimo della funzione* $R(x, y)$ *deve essere raggiunto in uno dei punti estremali di tale regione convessa, ovvero in uno dei vertici del poligono* K *della figura (2). Il lettore potrà verificare che il massimo viene raggiunto nel vertice di coordinate* $(60, 30)$ *corrispondente ad un ricavo massimo di euro* 10.260 *euro e che non è possibile guadagnare di più.*

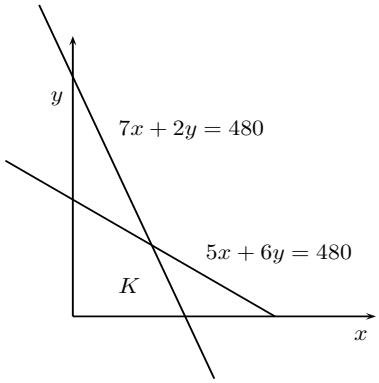

Figura 2: I vincoli individuano un poligono convesso K

Il Capitolo 2 sarà dedicato a giustificare tale procedura nonchè a sviluppare un metodo che possa essere fruttuoso anche dal punto di vista numerico.

Esempio 2. *Un allevatore di bovini può comperare per la propria due tipi di mangimi* m_1, m_2 *che costano per unità di prodotto rispettivamente* 10 *euro e* 4 *euro. Ogni giorno la mandria ha bisogno di:*

- 60 *Kg. dell'elemento nutrizionale* A,
- 84 *Kg. dell'elemento nutrizionale* B,
- 72 *Kg. dell'elemento nutrizionale* C

e che i mangimi contengono per unità di prodotto tali elementi nutrizionali nelle quantità:

$\cdots$	A	B	C
m_1	$3Kg.$	$7Kg.$	$3Kg.$
m_2	$2Kg.$	$2Kg.$	$6Kg.$

Si chiede di trovare la combinazione dei due mangimi che assicuri la presenza degli elementi nutrizionale necessari e che dia la minor spesa giornaliera.

Indicati rispettivamente con x, y le quantità di mangime m_1, m_2 da acquistare, la funzione obiettivo da rendere minima è $Z = 10x + 4y$. Poichè la combinazione di mangimi deve soddisfare il fabbisogno giornaliero della mandria perveniamo al problema

$$\begin{cases} \min\ Z(x,y) = 10x + 4y \\ x, y \geq 0 \\ 3x + 2y \geq 60 \\ 7x + 2y \geq 84 \\ 3x + 6y \geq 72 \end{cases}$$

L'insieme dei vincoli è indicato in figura (3). Anche se si tratta di una regione non limitata,

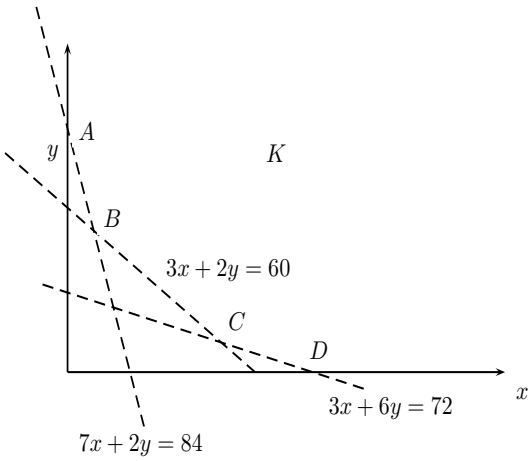

Figura 3: I vincoli individuano la regione convessa K

poichè siamo interessati ai minimi della funzione obiettivo, sarà sufficiente testare Z nei punti $A(0,42), B(6,21), C(18,3), D(24,0)$ in modo analogo all'esempio precedente. Il valore minimo è raggiunto precisamente nel punto $B(6,21)$ dove la funzione obiettivo vale 144.

Un'altra applicazione importante dei modelli di programmazione lineare è data dal seguente

Esempio 3 (Problema del trasporto)**.** *Siano dati un nunmero m di magazzini ed un numero n di negozi. Ogni negozio avrà un certo fabbisogno di merce, mentre ogni magazzino avrà una certa disponibilità di merce. Il problema è allora quello di consegnare le merci richieste ai negozi in modo da minimizzare il costo di trasporto.*

Cerchiamo dunque di scrivere un modello del problema. Indichiamo con

- $a_i, \quad i = 1, \cdots m$ *l'ammontare di merce disponibile nel magazzino i-esimo,*
- $b_j \quad j = 1, \cdots n$ *il fabbisogno di merce del negozio j-esimo,*
- $x_{ij} \quad i = 1, \cdots m, j = 1, \cdots n$ *l'ammontare di merce che dal magazzino i-esimo viene consegnata al negozio j-esimo.*

Assumendo che la merce disponibile nei magazzini soddisfi il fabbisogno deo negozi abbiamo

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall i = 1, \cdots m, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \forall j = 1, \cdots n. \tag{3}$$

Dalle (2) si ricava la condizione di compatibilità

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{4}$$

Naturalmente potremo assumere che $x_{ij} \geq 0$. *Se* c_{ij} *è il costo per unità di merce relativo al trasporto della merce dal magazzino* i*-esimo al negozio* j*-esimo, il costo da minimizzare sarà dato da*

$$C = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} c_{ij} x_{ij}.$$

Pertanto perveniamo al seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{cases} \min C = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} c_{ij} x_{ij}, \\ x_{ij} \geq 0, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall i = 1, \cdots m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \forall j = 1, \cdots n. \end{cases}$$

Capitolo 1

Geometria di $\mathbb{R}^N$ e algebra lineare

In questo capitolo ci proponiamo di studiare funzioni lineari in più variabili

$$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}.$$

Tali funzioni sono strettamente legate alla nozione di matrice.

1.1 Cenni di topologia di $\mathbb{R}^N$

Prima di tutto è necessario discutere brevemente alcune proprietà geometriche dello spazio $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo la definizione di convergenza per una successione di numeri reali $(x_n) \subset \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\nu \geq 1\ t.c.\ \forall n \geq \nu,\ |x_n - x| < \varepsilon.$$

In altri termini, la successione converge ad un limite se da un certo indice in poi i termini della successione e il limite sono arbitrariamente 'vicini'. Se poi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$, f è continua in x_0 se

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ t.c.\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

In soldoni ciò significa che i valori della funzione sono arbitrariamente 'vicini' se i rispettivi punti lo sono a sufficienza. I concetti di convergenza e continuità si possono definire ogni qualvolta si sia in grado di dare un significato alla parola 'vicino'. Questo è possibile se ad esempio si ha a disposizione una funzione distanza. Nel caso della retta reale la distanza tra due punti $x, y \in \mathbb{R}$ è data da $|x - y|$. Nel caso dello spazio $\mathbb{R}^N$ sarà allora naturale considerare la distanza Euclidea indotta dal Teorema di Pitagora. Dunque se $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ indichiamo col simbolo di norma la sua distanza dall'origine:

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}. \tag{1.1}$$

Allora la distanza tra due punti $x, y \in \mathbb{R}^N$ sarà data da

$$\|x - y\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2}.$$

La norma soddisfa le proprietà:

1. (Omogeneità) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
2. (Disuguaglianza triangolare) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

3. (Positività) $\|x\| \geq 0$.

4. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

La nozione di distanza ci permette di introdurre i concetti di convergenza e continuità. Così, se x_n, x sono punti di $\mathbb{R}^N$ diremo che

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\nu \geq 1 \text{ t.c. } \forall n \geq \nu,\ \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Mentre se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, diremo che f è continua in un punto x_0 se

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ t.c. } \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Se $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $r > 0$, la nozione di norma ci permette ancora di introdurre l'insieme

$$B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^N\ :\ \|x - x_0\| < r\}$$

che è detto palla aperta di centro x_0 e raggio $r > 0$.

Definizione 4 (Interno e insiemi aperti)**.** *Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^N$. Un punto $x_0 \in A$ si dice interno se esiste una palla aperta $B(x_0, r) \subset A$. L'insieme dei punti interni di A è indicato con il simbolo $\overset{o}{A}$. L'insieme A si dice aperto se $A = \overset{o}{A}$. Per definizione l'insieme vuoto si considera aperto.*

Esempio 5. *La palla aperta $B(x_0, r)$ è un insieme aperto. Infatti si consideri un qualsiasi $y \in B(x_0, r)$. Prendiamo allora la palla $B(y, \lambda)$ e poniamo $d = \|y - x_0\|$. Per ogni $x \in B(y, \lambda)$, usando la disuguaglianza triangolare otteniamo che*

$$\|x - x_0\| \leq \|x - y\| + \|y - x_0\| \leq \lambda + d.$$

Scegliendo $0 < \lambda < r - d$ oteniamo che $B(y, \lambda) \subset B(x_0, r)$. Pertanto, ogni punto della palla è interno e quindi la palla è aperta.

Si può verificare che $A = \overset{o}{A}$ è il più grande insieme aperto contenuto in A.

Esercizio 6. *Si verifichi che*

1. *$\emptyset, \mathbb{R}^N$ sono aperti.*

2. *L'unione qualsiasi di insiemi aperti è ancora un insieme aperto.*

3. *L'intersezione finita di insiemi aperti è ancora un insieme aperto.*

Definizione 7 (Insiemi chiusi e chiusura)**.** *Un sottoinsieme C di $\mathbb{R}^N$ si dice chiuso se il suo complementare è aperto. Si dice chiusura di A, e si indica con $\overline{A}$, il più piccolo insieme chiuso contenente A.*

E' immediato verificare che A è chiuso se e soltanto se $A = \overline{A}$. Inoltre segue immediatamente che

$$A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}.$$

Esercizio 8. *Si verifichi che*

1. *$\emptyset, \mathbb{R}^N$ sono chiusi.*

2. *L'intersezione qualsiasi di insiemi chiusi è ancora un insieme chiuso.*

3. *L'unione finita di insiemi chiusi è ancora un insieme chiuso.*

Le 3 proprietà dell'esercizio 6, o 8, definiscono quella che si chiama una topologia su $\mathbb{R}^N$. I concetti di convergenza e continuità sono essenzialmente dei concetti topologici in quanto si possono caratterizzare in termini di insiemi aperti e chiusi.

La chiusura di un insieme si può caratterizzare in termini di convergenza

Proposizione 9. *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. $x \in \overline{A}$,
2. $\forall r > 0, A \cap B(x,r) \neq \emptyset$,
3. $\exists (x_n) \subset A$ *t.c.* $x_n \to x$, *per* $n \to +\infty$.

Dimostrazione. Sia $x \in \overline{A}$. Se per assurdo $A \cap B(x,r) = \emptyset$, per qualche $r > 0$, allora avremmo che $A \subset B(x,r)^c$ e quindi la contraddizione $x \in \overline{A} \subset B(x,r)^c$. Sia ora vera la 2). Allora, per ogni $n \geq 1$ possiamo scegliere

$$x_n \in A \cap B(x, 1/n).$$

E' immediato allora verificare che $x_n \to x$, per $n \to +\infty$. Infine, sia vera la 3). Se per assurdo fosse $x \in \overline{A}^c$ allora, essendo un insieme aperto, sarebbe $B(x,r) \subset \overline{A}^c$ per qualche $r > 0$. Allora si avrebbe $B(x,r) \cap A = \emptyset$. Poichè $x_n \to x$, si può trovare un indice $n \geq 1$ tale che $\|x_n - x\| \leq r$ da cui si otterrebbe la contraddizione $x_n \in A \cap B(x,r)$. □

Definizione 10 (Frontiera)**.** *Si dice frontiera, o bordo, di A l'insieme*

$$F(A) = \overline{A} \setminus \overset{o}{A}.$$

Esercizio 11. *Si verifichi che la frontiera è un insieme chiuso. Inoltre si verifichi che*

$$\overline{B(x_0,r)} = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ \|x - x_0\| \leq r\}, \quad F(B(x_0,r)) = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ \|x - x_0\| = r\},$$

e quindi che la palla chiusa $\overline{B}(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ \|x - x_0\| \leq r\}$ *è un insieme chiuso .*

Definizione 12 (Limitatezza e compattezza)**.** *Un insieme A si dice limitato se esiste una palla $B(0,r)$ tale che $A \subset B(0,r)$. Dunque se esiste un numero $M > 0$ tale che*

$$\forall x \in A, \ \|x\| \leq M.$$

Diremo poi che A è compatto se è chiuso e limitato.

Analogamente a quanto visto per le funzioni di una variabile valgono i seguenti risultati.

Teorema 13 (di Weierstrass)**.** *Sia $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se A è compatto allora la f è dotata di massimo e di minimo.*

1.2 Richiami di algebra lineare

Una classe importante di funzioni di più variabili è costituita dalle applicazioni lineari. Cominciamo con l'introdurre alcuni concetti di algebra lineare che ci saranno utili in seguito. Il lettore interessato a maggiori dettagli potrà consultare ad esempio [3] o anche [6]. Intanto ricordiamo che lo spazio $\mathbb{R}^N$ è dotato di una struttura di spazio vettoriale in quanto è possibile definire la somma e il prodotto per uno scalare mediante le leggi

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \ x + y := (x_1 + y_1, \ldots, x_N + y_N), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda x := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_N),$$

che godono delle usuali proprietà algebriche. Spesso chiameremo dunque i punti di $\mathbb{R}^N$ vettori.

Definizione 14. *Dati $v_1, \ldots, v_r$ r-vettori di uno spazio vettoriale V, si dice che un vettore $v \in V$ è combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_r$ se esistono r-scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tali che*

$$v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i.$$

Si dice spazio generato dai vettori $v_1, \ldots, v_r$, e lo indicheremo con $L(v_1, \ldots, v_r)$, l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori $v_1, \ldots, v_r$.

Definizione 15 (Lineare indipendenza)**.** *I vettori $v_1, \ldots, v_r \in V$ si dicono linearmente indipendenti se comunque si prendano $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0.$$

In caso contrario, se cioè la combinazione lineare $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$ si può annullare anche se qualcuno dei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ non è nullo, diremo che i vettori $v_1, \ldots, v_r \in V$ sono linearmente dipendenti.

Definizione 16 (Dimensione)**.** *Uno spazio vettoriale V si dice di dimensione finita se esiste un sistema finito di vettori $(v_1, \ldots, v_r)$ tali che $L(v_1, \ldots, v_r) = V$. Un sistema di vettori linearmente indipendenti tali che $L(v_1, \ldots, v_r) = V$ si dice base. Ogni spazio di dimensione finita ammette almeno una base e tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi. Tale numero è detto dimensione dello spazio.*

La dimensione finita di uno spazio vettoriale si può anche caratterizzare come il massimo numero possibile di vettori linearmente indipendenti.

Esempio 17. *Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ i vettori $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$. Tali vettori sono linearmente indipendenti. Infatti se prendiamo due qualsiasi numeri $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ abbiamo*

$$\lambda e_1 + \mu e_2 = 0 \Rightarrow (\lambda, 0) + (0, \nu) = 0 \Rightarrow (\lambda, \mu) = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Inoltre se $x = (x_1, x_2)$ è un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^2$ abbiamo

$$x = (x_1, x_2) = x_1(1, 0) + x_2(0, 1) = x_1 e_1 + x_2 e_2.$$

Dunque $L(e_1, e_2) = \mathbb{R}^2$. Dunque i vettori (e_1, e_2) formano una base di $\mathbb{R}^2$ detta base canonica. Allo stesso modo si può verificare che i vettori

$$e_1 = (1, 0 \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1 \ldots, 0),\ \ldots,\ e_N = (0, 0 \ldots, 1),$$

formano una base di $\mathbb{R}^N$ detta base canonica.

Se $v_1, \ldots, v_r$ è una base di V, essendo $L(v_1, \ldots, v_r) = V$, ogni vettore $v \in V$ si può esprimere come combinazione lineare degli elementi della base. Ovvero

$$v = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i. \tag{1.2}$$

L'espressione in (1.2) è in realtà l'unica possibile e i coefficienti λ_i vengono detti coordinate del vettore v rispetto alla base $(v_1, \ldots, v_r)$. Per ogni $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ le coordinate x_i sono riferite naturalmente alla base canonica di $\mathbb{R}^N$.

1.2.1 Matrici e applicazioni lineari

Siano V e V' due spazi vettoriali di dimensione rispettivamente N e M. Siano $(e_1, \dots, e_N)$ e $(e'_1, \dots, e'_M)$ rispettivamente due basi di V e V'.

Definizione 18 (Applicazioni lineari)**.** *Una funzione $f : V \to V'$ si dice lineare se per ogni $u, v \in V$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ risulta*

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \lambda f(v).$$

Si indicherà con $\mathcal{L}(V, V')$ l'insieme delle applicazioni lineari di V in V'.

Osserviamo che se f è lineare allora $f(0) = 0$. Inoltre, si può verificare facilmente che la condizione di linearità vale per ogni combinazione lineare finita, ovvero

$$f\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(u_i).$$

Pertanto, ogni $f \in \mathcal{L}(V, V')$ sarà univocamente determinata dal valore che la f assume sui vettori della base. Infatti se $u \in V$, indicate con u_i le coordinate di u avremo che

$$f(u) = f\left(\sum_{j=1}^{N} u_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{N} u_j f(e_j),$$

e quindi è sufficiente conoscere i valori $f(e_i)$ per individuare la funzione lineare f per intero. Ora, $f(e_j) \in V'$ e quindi avrà diritto alle sue coordinate, diciamo a_{ij}, $i = 1, \dots, M$ per cui

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{M} a_{ij} e'_i. \tag{1.3}$$

Restano così individuati $M \times N$ numeri reali $\{a_{ij} \in \mathbb{R} : i = 1, \dots, M;\ j = 1, \dots, N\}$, o come si suol dire una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{MN} \end{pmatrix}$$

ad M righe e N colonne. Nel seguito scriveremo brevemente

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,M \\ j=1,\dots,N}}$$

dove i, j denotano rispettivamente l'indice di riga e quello di colonna. Spesso scriveremo semplicemente $A = (a_{ij})$ ogni volta che gli indici sono chiari dal contesto. Indicheremo poi con il simbolo $\mathcal{M}(N, M)$ l'insieme delle matrici ad N righe e M colonne e con $\mathcal{M}(N)$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine N, ovvero quelle con N righe ed N colonne. Osserviamo che $\mathcal{M}(N, M)$ è dotato di una struttura di spazio vettoriale. Se infatti $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}(N, M)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, si definiscono le matrici somma e prodotto per uno scalare mediante:

$$A + B = (c_{ij}), \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \quad \lambda A = (d_{ij}), \quad d_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Se le dimensioni della matrice sono opportune si può definire l'importante nozione di prodotto tra matrici.

Definizione 19 (Prodotto righe per colonne)**.** *Siano $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(N, M)$ e $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}(M, P)$. Allora si definisce la matrice $AB \in \mathcal{M}(N, P)$ mediante:*

$$AB = (c_{ik})_{\substack{i=1,\dots,N \\ k=1,\dots,P}} \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{M} a_{ij} b_{jk}.$$

Il prodotto righe per colonne soddisfa le usuali proprietà algebriche ogni qualvolta che possa essere definito (dimensioni delle matrici opportune).

Dall'espressione $f(e_j) = \sum_{i=1}^{M} a_{ij} e'_i$ in (1.3) segue che

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{N} x_j \left(\sum_{i=1}^{M} a_{ij} e'_i \right) = \sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{j=1}^{N} x_j a_{ij} \right) e'_j.$$

Allora, identificando ogni vettore con le sue coordinate, possiamo scrivere:

$$f(x) = Ax.$$

Se poi consideriamo ad esempio il caso $V = \mathbb{R}^N$ e $V' = \mathbb{R}^M$, ad ogni matrice $A \in \mathcal{M}(M, N)$ corrisponde un'aplicazione lineare $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ definita tramite il prodotto righe per colonne e viceversa ad ogni applicazione lineare corrisponde una certa matrice individuata dalla relazione (1.3).

Alle matrici quadrate si può associare un numero reale $det(A)$ detto determinante che gioca un ruolo importante in molte questioni. Per le matrici di ordine due esso è la differenza tra il prodotto della diagonale principale e di quella secondaria ovvero

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Nel caso di matrici generiche $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}(N)$ esso può essere calcolato ad esempio con la regola di Laplace che consiste dapprima nello scegiere una riga, o una colonna (in genere si sceglie quella che contiene il maggior numero di zeri), diciamo la r-esima. Allora

$$det(A) = \sum_{i=1}^{N} a_{ri} M_{ri} = \sum_{i=1}^{N} a_{ir} M_{ir},$$

dove $M_{ri} = (-1)^{r+i} det(A_{ri})$ con A_{ri} la matrice che si ottiene da A sopprimendo la r-esima riga e la i-esima colonna.

La matrice $I \in \mathcal{M}(N)$ definita da

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero quella che ha termini non nulli e tutti pari ad 1 solo e soltanto lungo la diagonale principale è detta matrice identità. In effetti si verifica:

$$\forall A \in \mathcal{M}(N), \ AI = A = IA.$$

Proposizione 20 (Proprietà del determinante)**.** *Siano $v_1, \cdots, v_N \in \mathbb{R}^N$ e $A = (v_1, \cdots, v_N) \in \mathcal{M}(N)$ la matrice con le colonne costituite dai vettori $v_i, i = 1, \cdots N$. Allora, per ogni $u_i, v_i \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha*

1. *(linearità)*

$$det(v_1, \cdots, \lambda u_i + \mu v_i, \cdots, v_N) = \lambda det(v_1, \cdots, \lambda u_i, \cdots, v_N) + \mu det(v_1, \cdots, \mu v_i, \cdots, v_N),$$

2. *(alternanza)* $det(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_j, \cdots, v_N) = -det(v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_i, \cdots v_N)$,
3. $det(v_1, \cdots, v_i, \cdots, \lambda v_i, \cdots, v_N) = 0$,
4. *(Cauchy-Binet) per ogni* $A, B \in \mathcal{M}(N)$ *si ha* $det(AB) = det(A)det(B)$,
5. $det(I) = 1$.

Una matrice $A \in \mathcal{M}(N)$ si dice invertibile se esiste una matrice A^{-1} tale che

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A.$$

Qualora esista, la matrice inversa è unica.

Teorema 21. *Una matrice quadrata è invertibile se e soltanto se il suo determinante è diverso da zero.*

Dimostrazione. Supponiamo che A sia invertibile. Allora

$$AA^{-1} = I \Rightarrow 1 = det(AA^{-1}) = det(A)det(A^{-1}) \Rightarrow det(A) \neq 0.$$

Viceversa, se $det(A) \neq 0$, definiamo la matrice $A^{-1} = (b_{ij})$ dove

$$b_{ij} = \frac{M_{ji}}{det(A)}. \tag{1.4}$$

Dunque abbiamo che

$$\left(AA^{-1}\right)_{ij} = \sum_{h=1}^{N} a_{ih} b_{hj} = \frac{1}{det(A)} \sum_{h=1}^{N} a_{ih} M_{jh}.$$

Ora osserviamo che la quantità $\sum_{h=1}^{N} a_{ih} M_{jh}$, vale $det(A)$ se $i = j$ (regola di Laplace), mentre vale 0 se $i \neq j$, poichè in tal caso corrisponde al determinante della matrice che si ottiene da A sotituendo la j-esima riga con la i-esima. □

La nozione di determinante è utile anche per determinare la lineare dipendenza di vettori.

Teorema 22. *Dati* $v_1, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^N$ *essi sono linearmente indipendenti se e soltanto se la matrice che ha per colonne i-esime le coordinate di* v_i *ha determinante diverso da zero.*

Come è noto, lo spazio $\mathbb{R}^N$ è anche dotato di un prodotto scalare tra vettori definito da

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{N} x_i y_i.$$

Si dice allora che la norma definita in (1.1) è indotta dal prodotto scalare in quanto

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Esercizio 23. *Il prodotto scalare verifica le proprietà*

1. *(Simmetria)* $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
2. *(Linearità)* $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$.

3. *(Positività)* $\langle x, x\rangle \geq 0$.

4. $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Una importante relazione tra il prodotto scalare e la norma è la seguente disuguaglianza di Schwarz

Proposizione 24 (Disuguaglianza di Schwarz)**.**

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Dimostrazione. Poniamo $A = \|x\|^2, B = |\langle x, y\rangle|, C = \|y\|^2$. Possiamo assumere che i vettori x, y non siano ortogonali, poichè altrimenti la disuguaglianza è senz'altro vera. Poniamo allora $\alpha = \frac{B}{\langle x,y\rangle}$, per cui $\alpha\langle x, y\rangle = B$. Inoltre osserviamo che $\alpha^2 = 1$. Ora, per ogni $r \in R$ abbiamo

$$0 \leq \langle x - \alpha r y, x - \alpha r y\rangle = \langle x, x\rangle - \alpha r\langle y, x\rangle - \alpha r\langle x, y\rangle + \alpha^2 r^2\langle y, y\rangle =$$

$$= \|x\|^2 - 2\alpha r\langle x, y\rangle + r^2\|y\|^2 = A - 2rB + Cr^2.$$

Dunque abbiamo trovato che

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad Cr^2 - 2Br + A \geq 0. \tag{1.5}$$

Se $C = 0$ allora la proposizione è verificata. Se dunque $C > 0$, la parabola individuata da (1.5) si mantiene sempre nel semipiano superiore. Allora dev'essere

$$4B^2 - 4AC \leq 0 \Rightarrow B^2 \leq AC \Rightarrow |\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2 \Rightarrow |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

□

Definizione 25 (Sistemi ortonormali)**.** *Due vettori $x, y \in \mathbb{R}^N$ si dicono ortogonali se $\langle x, y\rangle = 0$. Un sistema di vettori $v_1, \ldots, v_r$ si dice ortonormale se i vettori sono a due a due ortogonali tra loro e $\|v_i\| = 1$.*

Evidentemente, la base canonica $(e_1, \ldots, e_N)$ è un sistema ortonormale di $\mathbb{R}^N$.

Proposizione 26. *I vettori di un sistema ortonormale sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Siano $v_1, \ldots, v_r$ i vettori del sistema ortonormale. Consideriamo allora una qualsiasi combinazione lineare dei vettori che sia nulla:

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = 0.$$

Fissiamo un indice $j = 1, \ldots, r$ e moltiplichiamo scalarmente per il vettore v_j. Dalle proprietà del prodotto scalare otteniamo

$$0 = \langle v_j, \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i\rangle = \sum_{i=1}^{r}\langle v_j, \lambda_i v_i\rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i\langle v_j, v_i\rangle = \lambda_j.$$

□

Definizione 27 (Autovalori e autovettori)**.** *Sia $A \in \mathcal{M}(N)$. Si dice che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore della matrice A se esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^N$ diverso da zero tale che*

$$Av = \lambda v. \tag{1.6}$$

Il vettore v che soddisfa la (1.6) viene detto autovettore corrispondente all'utovalore λ.

Osserviamo che se v è un autovettore allora ogni suo multiplo αv è un autovettore per ogni $\alpha \neq 0$. Inoltre si verifica immediatamente che se v, w sono due autovettori corrispondenti all'autovalore λ, allora anche la loro somma $v + w$ è un autovalore. Dunque l'insieme degli autovalori costituisce uno spazio vettoriale,o meglio un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^N$. La relazione (1.6) può essere scritta anche nella forma

$$(A - \lambda I)\, v = 0.$$

Pertanto, dire che v è un autovettore di A equivale a chiedere che la matrice $A - \lambda I$ non sia invertibile (altrimenti avremmo $v = 0$). Tenuto conto del Teorema 1.4 abbiamo che $\lambda \in R$ è un autovalore se e soltanto se $det\,(A - \lambda I) = 0$, ovvero se λ è una soluzione reale dell'equazione caratteristica

$$det\,(A - \lambda I) = 0.$$

Poichè $A \in \mathcal{M}(N)$, l'equazione caratteristica è una equazione algebrica di grado N nell'incognita λ. Dunque la matrice A ammette al più N autovalori. L'esistenza di autovalori è garantita se la matrice A è simmetrica.

Definizione 28 (Matrici simmetriche)**.** *Data una matrice $A = (a_{ij})$ si dice matrice trasposta di A la matrice $A^t = (a_{ji})$ che si ottiene da A scambiando le righe con le colonne. Una matrice A si dice simmetrica se $A = A^t$, ovvero se $a_{ij} = a_{ji}$.*

Dalla regola di Laplace segue subito che $det(A) = det(A^t)$.

Teorema 29. *Sia $A \in \mathcal{M}(N)$ una matrice simmetrica. Allora tutte le soluzioni dell'equazione caratteristica sono reali.*

Dunque una matrice simmetrica ammette almeno un autovalore. Abbiamo osservato che gli autovettori formano un sottospazio vettoriale la cui dimensione si può dimostrare essere uguale alla molteplicità algebrica dell'autovalore.

Una matrice $A \in \mathcal{M}(N)$ è legata alla sua trasposta dalla fondamentale relazione

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N,\ \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^t y\rangle. \tag{1.7}$$

Infatti, se $A = (a_{ij})$ abbiamo che

$$\langle Ax, y\rangle = \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N} a_{ki}x_i\right) y_k = \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N} a_{ki}x_i y_k\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N} a_{ki}x_i y_k\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N} a_{ki}y_k\right) x_i = \sum_{i=1}^{N}\left(A^t y\right)_i x_i = \langle A^t y, x\rangle.$$

La simmetria della matrice è legata anche alla lineare indipendenza degli autovalori.

Teorema 30. *Sia $A \in \mathcal{M}(N)$ una matrice simmetrica. Allora ad autovalori distinti corrispondono autovettori linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ due autovalori distinti. Consideriamo allora due autovettori v, w corrispondenti a λ e μ. Dunque

$$Av = \lambda v, \quad Aw = \mu w.$$

Allora

$$\lambda\langle u, w\rangle = \langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle = \mu\langle v, w\rangle,$$

da cui otteniamo che

$$(\lambda - \mu)\langle v, w\rangle = 0.$$

Poichè $\lambda \neq \mu$ deduciamo che i vettori v, w sono ortogonali. Allora per la Proposizione 26 essi sono linearmente indipendenti. □

1.3 Sistemi lineari

Se $A \in \mathcal{M}(M, N)$, e $b \in \mathbb{R}^M$, si dice sistema lineare l'equazione

$$Ax = b. \tag{1.8}$$

Ogni $x \in \mathbb{R}^N$ che soddisfa (1.8) si dice soluzione del sistema lineare. Se $b = 0$ il sistema si dice omogeneo. Un sistema si dice compatibile o incompatibile a seconda che ammetta o meno soluzioni. La matrice A è detta matrice dei coefficienti.

Teorema 31 (di Cramer)**.** *Sia $A \in \mathcal{M}(N)$. Allora il sistema (1.8) ammette una unica soluzione quale che sia $b \in \mathbb{R}^N$ se e soltanto se $det(A) \neq 0$.*

Naturalmente, tale soluzione è data da $x = A^{-1}b$. Inoltre, se $A = (v_1, \cdots, v_N) \in \mathcal{M}(N)$, indicata con A_i la matrice ottenuta da A sostituendo il vettore v_i con il vettore b, la soluzione può essere calcolata tramite la formula di Cramer

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}, \ \forall i = 1, \cdots, N.$$

Nelle ipotesi del Teorema di Cramer il sistema omogeneo ammette la sola soluzione nulla.

Definizione 32. *Sia $A \in \mathcal{M}(M, N)$. Una sottomatrice $p \times q$ di A è la matrice costituita da elementi comuni a p righe e q colonne. Si dice rango di A, o caratteristica, il numero massimo degli ordini delle sue sottomatrici quadrate invertibili, ovvero con determinante diverso da zero. Indicheremo tale numero con il simbolo $r(A)$.*

Dunque $r(A) \leq \min(M, N)$.

Teorema 33 (Rouchè-Capelli)**.** *Sia $A \in \mathcal{M}(M, N)$, $b \in \mathbb{R}^M$. Considerata la matrice completa $\hat{A}$ ottenuta da A aggiungendo il vettore colonna b, il sistema (1.8) ammette soluzione se e soltanto se $r(\hat{A}) = r(A)$.*

1.3.1 Il metodo di eliminazione di Gauss

I risultati precedentemente esposti sui sistemi lineari sono poco adatti alle esigenze numeriche. Ad esempio può non essere molto agevole stabilire al calcolatore se effettivamente il determinante di una matrice è nullo. In effetti dalla relazione $det(\lambda A) = \lambda^N det(A)$, se ad esempio $det(A) = 1$ e $N = 30$ abbiamo che $det(10^{-1}A) = 10^{-30}$.

Dunque, sarà utile introdurre una procedura algoritmica che ci permetta di stabilire se un sistema è compatibile o no e allo stesso tempo consenta di calcolare le soluzioni. Uno di questi procedimenti è il metodo di eliminazione di Gauss.

Cominciamo con il considerare un sitema lineare a *gradini*, ovvero un sistema lineare di m equazioni nelle incognite $x_1, \cdots x_n$ con $m \leq n$ della forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad & \cdots \quad + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \quad & \cdots \quad + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ a_{mm}x_m + \quad & \cdots \quad + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \tag{1.9}$$

con $a_{11}a_{22} \cdots a_{mm} \neq 0$. La matrice dei coefficienti è del tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Nel caso $m = n$, l'ultima equazione di (1.9) è soddisfatta dal solo valore $x_n = b_n/a_{nn}$. Sostituendo tale valore nella penultima equazione si trova un unico valore per x_{n-1}. I valori x_n, x_{n-1} così ottenuti, sostituiti nella terz'ultima equazione dano luogo ad un unico valore x_{n-2}. Procedendo in questo modo si ottiene un'unica soluzione di (1.9). Quindi *un sistema a gradini di n equazioni in n incognite è sempre compatibile ed ammette un'unica soluzione.*

Se $m < n$ il sistema (1.9) può essere scritto nella forma equivalente:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + \quad a_{1m}x_m &= b_1 - (a_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n) \\ a_{22}x_2 + \cdots + \quad a_{2m}x_m &= b_2 - (a_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n) \\ &\vdots \\ a_{mm}x_m &= b_m - (a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Dando valori arbitrari $t_{m+1}, \cdots, t_n \in \mathbb{R}$ alle incognite $x_1, \cdots, x_n$ si ottiene un sistema a gradini di m equazioni in m incognite

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + \quad a_{1m}x_m &= b_1 - (a_{1m+1}t_{m+1} + \cdots + a_{1n}t_n) \\ a_{22}x_2 + \cdots + \quad a_{2m}x_m &= b_2 - (a_{2m+1}t_{m+1} + \cdots + a_{2n}t_n) \\ &\vdots \\ a_{mm}x_m &= b_m - (a_{mm+1}t_{m+1} + \cdots + a_{mn}t_n) \end{aligned} \tag{1.11}$$

che ammette un' unica soluzione. Pertanto il sistema (1.9) di partenza ammette infinite soluzioni al variare dei parametri $t_{m+1}, \cdots, t_n \in \mathbb{R}$. In particolare esprimeremo questo fatto dicendo che il sistema (1.9) ammette ∞^{n-m} soluzioni. Ora, dal modo in cui si calcolano tali soluzioni si deduce che ogni soluzione di (1.9) si esprime mediante una n-pla

$$(S_1(t_{m+1}, \cdots, t_n), S_2(t_{m+1}, \cdots, t_n), \cdots, S_n(t_{m+1}, \cdots, t_n)) \tag{1.12}$$

in cui gli S_i sono polinomi di primo grado nei parametri $t_{m+1}, \cdots, t_n$. La (1.12) si dice soluzione generale del sistema (1.9). In particolare, vediamo che un sistema a gradini è sempre compatibile.

Due sistemi lineari nelle incognite $x_1, \cdots x_n$ con $m \leq n$ si dicono *equivalenti* se possiedono le stesse soluzioni. Il metodo di eliminazione di Gauss consiste nel sostituire il sistema assegnato con sistemi ad esso equivalenti mediante passaggi successivi fino a raggiungere la forma a gradini. Possiamo identificare le seguenti operazioni elementari sulle equazioni di un sistema che conducono a sistemi equivalenti:

1. Scambiare tra loro due equazioni del sistema.

2. Moltiplicare un' equazione per uno scalare non nullo.

3. Sostituire una equazione con quella ottenuta sommando ad essa un multiplo di un'altra equazione.

A queste operazioni corrispondono naturalmente altrettante operazioni elementari sulla matrice completa del sistema:

1. Scambiare tra loro due righe della matrice.

2. Moltiplicare una riga della matrice per uno scalare non nullo.

3. Sostituire una riga della matrice con quella ottenuta sommando ad essa un multiplo di un'altra riga.

Sia dunque assegnato il sistema

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \cdots & +a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \tag{1.13}$$

Se una delle sue equazioni è del tipo $0 = b_i$ allora essa sarà soddisfatta se $b_i = 0$ e in tal caso potremo cancellarla dal sistema, altrimenti il sistema è incompatibile. Dunque possiamo supporre che tutti i primi membri delle equazioni del sistema siano non nulli. Inoltre, possiamo certamente assumere che $a_{i1} \neq 0$ per qualche $i = 1, \cdots, m$. Ciò può essere sempre fatto scambiando eventualmente due incognite tra loro. Con l'operazione 1) possiamo ottenere $a_{11} \neq 0$. Con l'operazione 2) possiamo poi assumere che $a_{11} = 1$. Sommando alle successive equazioni la prima moltiplicata rispettivamente per $-a_{21}, -a_{31}, \cdots, -a_{m1}$ (operazione 3)) si ottiene un nuovo sistema

$$\begin{array}{rcl} x_1 + a'_{12}x_2 + & \cdots & +a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{22}x_2 + & \cdots & +a'_{2n}x_n = b'_2 \\ & \vdots & \\ a'_{m2}x_2 + & \cdots & +a'_{mn}x_n = b'_m \end{array} \tag{1.14}$$

Se qualcuna delle equazioni del sistema (1.14) è del tipo $0 = 0$ la omettiamo. Se invece compare un'equazione della forma $0 = b'_i$ con $b'_i \neq 0$ allora il sistema è incompatibile e il procedimento si arresta. Dunque possiamo supporre che tutti i primi membri del sistema (1.14) siano non nulli. A questo punto procediamo sul sitema senza più considerare la prima equazione e operando sulle rimanenti equazioni come nel caso precedente. Tale procedure può così essere iterara fino a che non si ottiene l'incopatibilità del sistema o la sua riduzione in forma a gradino, da cui si ottiene la soluzione generale del sistema. Nella pratica è preferibile operare sulla matrice completa del sistema piuttosto che sulle equazioni.

Esempio 34.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 1. \end{array}$$

Eseguiamo le operazioni elementari sulle righe della matrice completa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & -8 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il sistema a gradini è il seguente

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3 & x_3 & = 1 \\ x_2 + \dfrac{2}{3} & x_3 & = 0 \\ & x_3 & = 1, \end{array}$$

che ammette l'unica soluzione $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$.

Esempio 35.

$$\begin{aligned} x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 &= 7. \end{aligned}$$

Operando sulle righe della matrice completa abbiamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il sistema corrispondente è

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \quad x_3 \quad &= 2 \\ x_3 \quad &+ 2x_4 = 3. \end{aligned}$$

Scambiando x_2 con x_3 otteniamo il sistema a gradini

$$\begin{aligned} x_1 - \quad x_3 \quad &+ 2x_2 = 2 \\ x_3 \quad &+ 2x_4 = 3. \end{aligned}$$

Pertanto la soluzione generale del sistema è data da

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5 - 2t - 2s, t, 3 - 2s, s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Esempio 36.

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Operando sulle righe della matrice completa abbiamo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La terza riga corrisponde all'equazione inconpatibile $0 = 1$. Il sistema pertanto è incompatibile.

Capitolo 2

La programmazione lineare

Riprendiamo il problema di programmazione lineare discusso nell'introduzione:

$$\begin{cases} \max\ R(x,y) = 126x + 90y \\ x, y \geq 0 \\ 5x + 6y \leq 480 \\ 7x + 6y \leq 480 \end{cases} \tag{2.1}$$

Se $x \in \mathbb{R}^N$ diremo che $x \geq 0$ se $x_i \geq 0$ per ogni $i = 1, \cdots, N$. Con le notazioni introdotte nel capitolo precedente, posto $c = (126, 90) \in \mathbb{R}^2$, $b = (480, 480) \in \mathbb{R}^2$ e considerata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 6 \end{pmatrix},$$

il problema (2.1) si scrive nella forma

$$\begin{cases} \max\ \langle c, x \rangle \\ x \geq 0 \\ Ax \leq b. \end{cases}$$

Anche il problema del trasporto

$$\begin{cases} \min\ C = \sum\limits_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} c_{ij} x_{ij}, \\ x_{ij} \geq 0, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall i = 1, \cdots m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \forall j = 1, \cdots n, \end{cases} \tag{2.2}$$

rientra in questo formalismo. Infatti, se poniamo

- $b = (a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots b_n) \in \mathbb{R}^{m+n}$,
- $x = (x_{11}, \cdots, x_{1n}, x_{21}, \cdots, x_{2n}, \cdots, x_{m1}, \cdots, x_{mn}) \in \mathbb{R}^{nm}$,
- $\underline{1} = (1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^n$,
- $\underline{0} = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$,
- $e_i,\ i = 1, \cdots, n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$,

e consideriamo la matrice $A \in \mathcal{M}(m+n, nm)$ definita da

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} & \cdots & \cdots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \cdots \underline{0} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{0} & \cdots & \cdots \underline{0} & \underline{1} & \\ e_1 & e_1 & \cdots & \cdots & e_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_n & e_n & \cdots & \cdots & e_n \end{pmatrix},$$

Allora anche il problema (2.2) si può scrivere come

$$\begin{cases} \min \langle c, x \rangle \\ x \geq 0 \\ Ax = b. \end{cases}$$

Dunque dal punto di vista matematico, considereremo il problema di programmazione lineare come quello di ottimizzare la funzione prodotto scalare, che da ora in poi chiameremo funzione obiettivo, $\langle c, x \rangle$ con $x \geq 0$ soggetta a vincoli del tipo

$$Ax \geq b, \ Ax \leq b, \ Ax = b.$$

Intanto, cominciamo con l'osservare che ogni applicazione lineare $f : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ è continua. Infatti, se $A \in \mathcal{M}(N, M)$, possiamo pensare A individuata da N vettori riga $a_i \in \mathbb{R}^M$. Usando la disuguaglianza di Schwarz abbiamo

$$\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^{N} (Ax)_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \langle a_i, x \rangle^2 \leq \sum_{i=1}^{N} \|a_i\|^2 \|x\|^2,$$

da cui segue la continuità. Indicato allora con $K \subset \mathbb{R}^N$ l'insieme individuato dai vincoli, segue che K è chiuso. Dunque abbiamo la seguente

Proposizione 37. *Se K è limitato allora il problema di programmazione lineare ammette almeno una soluzione.*

Naturalmente, nelle applicazioni siamo interessati a trovare esplicitamente le soluzioni di un problema di programmazione o almeno ad una loro approssimazione numerica. A questo scopo utilizzeremo il fatto che l'insieme $K \subset \mathbb{R}^N$ non è un chiuso qualsiasi ma è un politopo convesso.

2.1 Alcune nozioni di convessità

Siano $x, y \in \mathbb{R}^N$. Il segmento congiungente i punti x, y è dato da:

$$[x, y] := \{ty + (1-t)x \ : \ t \in [0, 1]\}.$$

Definizione 38 (Convessità)**.** *Un insieme $K \subset \mathbb{R}^N$ si dice convesso se, contenendo due punti x, y, contiene anche il segmento $[x, y]$.*

Esempio 39. *La sfera chiusa, o aperta, è convessa. Infatti, consideriamo due punti x, y appartenenti alla sfera $B(x_0, r)$. Preso un punto $p = ty + (1-t)x \in [x, y]$ abbiamo:*

$$\|p - x_0\| = \|ty + (1-t)x - x_0\| = \|ty + (1-t)x - tx_0 + (1-t)x_0\| \leq$$

$$\leq (1-t)\|x - x_0\| + t\|y - y_0\| < tr + (1-t)r = r.$$

Esercizio 40. *Si mostri che l'intersezione di insiemi convessi è ancora un insieme convesso.*

La nozione di convessità gioca un ruolo importante in molte questioni di ottimizzazione. La sfera ha ad esempio la notevole proprietà di racchiudere il massimo volume a superficie fissata. La dimostrazione in dimensione due si può dare in termini geometrici come mostrato da Steiner. In dimensioni più alte richiede strumenti più sofisticati. La figura (2.1) mostra che ci si può ridurre a considerare gli insiemi convessi. La seconda figura (2.2) mostra invece che ci si può limitare

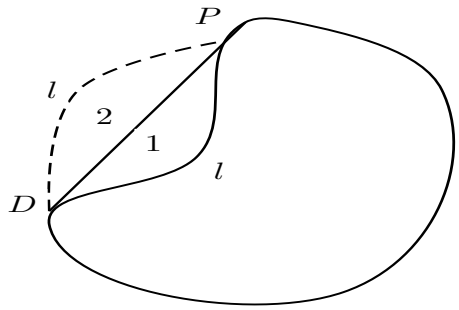

Figura 2.1: Operando una riflessione il perimetro resta lo stesso ma l'area aumenta

a studiare le curve che a parità di lunghezza racchiudono la massima area tra la curva ed una retta. Infine, l'ultima figura (2.3) mostra che la curva migliore è un arco di circonferenza. Ponendo

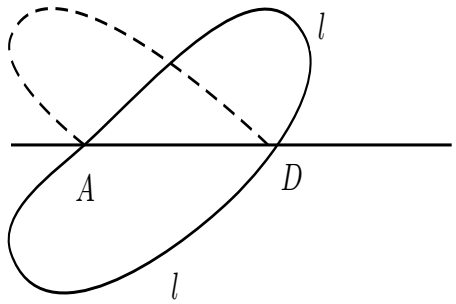

Figura 2.2: L'area delle sezioni individuate dalla retta deve essere la stessa. Altrimenti, operando una riflessione si può aumentare l'area a parità di perimetro.

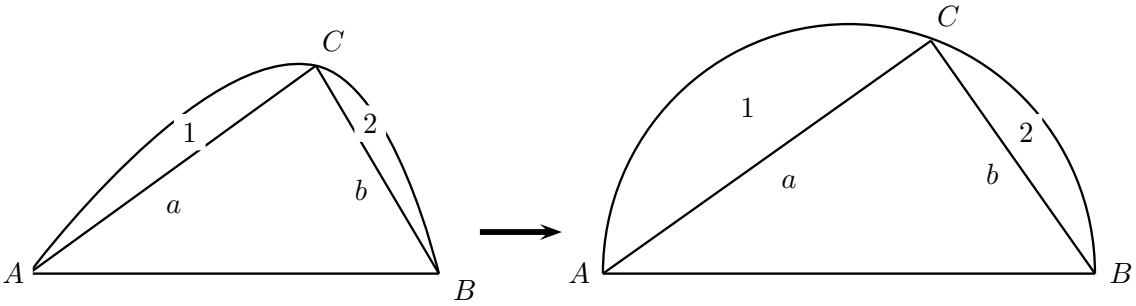

Figura 2.3: Considerando i triangoli inscritti, la massima area si ottiene per il triangolo rettangolo, ovvero per un arco di circonferenza.

$\lambda = (1-t),\ \mu = t$ allora un punto $p \in [x, y]$ si può scrivere come

$$p = \lambda x + \mu y, \quad \lambda, \mu \geq 0, \quad \lambda + \mu = 1.$$

Dunque p è combinazione lineare convessa dei punti x, y in accordo con la seguente

Definizione 41 (Combinazioni convesse)**.** *Si dice che un punto $x \in \mathbb{R}^N$ è combinazione lineare convessa dei punti $x_1, \cdots, x_d$ se esistono d scalari $\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tali che*

$$x = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \geq 0 \ (i = 1, \cdots, d) \quad \sum_{i=1}^{d} \lambda_i = 1.$$

Dunque, *un insieme è convesso se e soltanto se contiene le combinazioni lineari convesse dei suoi punti.*

Definizione 42 (Inviluppo convesso)**.** *Sia $X \subset \mathbb{R}^N$. Si dice inviluppo convesso di X, che denoteremo con $co(X)$, l'insiemme di tutte le combinazioni lineari convesse di X.*

Dunque, se $K \subset \mathbb{R}^N$ è convesso, allora $K = co(K)$.

Esempio 43. *Il triangolo della geometria elementare è l'inviluppo convesso dei suoi vertici.*

Definizione 44 (Punti estremali)**.** *Sia $K \subset \mathbb{R}^N$ un convesso. Si dice che $x \in K$ è un punto estremale se*

$$\forall x_1, x_2 \in K, \ x \in [x_1, x_2] \Rightarrow (x = x_1) \vee (x = x_2).$$

Indicheremo con $ex(K)$ l'insieme dei suoi punti estremali.

Ad esempio, i vertici di un poligono convesso sono punti estremali.

Proposizione 45. *Sia $K \subset \mathbb{R}^N$ un convesso chiuso. Allora ogni punto estremale di K è un punto di frontiera.*

Dimostrazione. Sia $x \in K$ un punto estremale e supponiamo per assurdo che $x \in \overset{\circ}{K}$. Allora $x \in B(x, r) \subset \overline{B}(x, r) \subset K$ per qualche $r > 0$. Si prenda allora $y \in F(B(x, r))$. Dunque anche il punto $2x - y \in F(B(x, r))$. Essendo x un punto estremale avremmo la contraddizione

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}(2x - y) \Rightarrow x = y.$$

□

Definizione 46 (Iperpiani e semipiani)**.** *Siano $c \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Un iperpiano P è un insieme della forma*

$$P := \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ \langle c, x \rangle = \lambda\}.$$

Indicheremo poi con P^+, P^- i rispettivi semipiani chiusi superiore e inferiore:

$$P^+ := \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ \langle c, x \rangle \geq \lambda\}, \quad P^- := \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ \langle c, x \rangle \leq \lambda\}.$$

Teorema 47 (Separazione di convessi)**.** *Siano $A, B \subset \mathbb{R}^N$ due convessi non vuoti e disgiunti. Se A è compatto e B è chiuso, allora esiste un iperpiano che separa strettamente A e B. Vale a dire che esistono $\lambda \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}^N$ tali che*

$$\forall x \in A, \ \forall y \in B \quad \langle c, x \rangle < \lambda < \langle c, y \rangle.$$

Il seguente risultato mostra il notevole fatto che un convesso compatto si può ricostruire a partire soltanto dai suoi punti estremali.

Teorema 48 (Krein-Milman)**.** *Ogni insieme convesso compatto $K \subset \mathbb{R}^N$ coincide con la chiusura dell'inviluppo convesso dei suoi punti estremali:*

$$K = \overline{co(ex(K))}. \tag{2.3}$$

Dimostrazione. Possiamo limitarci a considerare il caso $K \neq \emptyset$. Procederemo ora per induzione sulla dimensione N dello spazio mostrando che $ex(K) \neq \emptyset$ e che vale la (2.3). Per $N = 1$ abbiamo che $K = [a, b]$. Dunque i punti estremali di K sono gli estremi dell'intervallo a, b e sicuramente vale la (2.3). Dunque supponiamo l'asserto vero per $N - 1$ e dimostriamolo per N. Intanto osserviamo che è sempre vera l'inclusione

$$\overline{co(ex(K))} \subset K.$$

Dunque resta da provare l'altra inclusione. Supponiamo per un momento che $ex(K) \neq \emptyset$. Sia dunque $x \in K$ e supponiamo per assurdo che $x \notin \overline{co(ex(K))}$. Applicando il Teorema di separazione agli insiemi $\{x\}$ e $\overline{co(ex(K))}$ troviamo $\lambda \in R$, $c \in \mathbb{R}^N$ tali che

$$\forall y \in \overline{co(ex(K))} \quad \langle c, x\rangle < \lambda < \langle c, y\rangle.$$

Posto $m = \inf\{\langle c, y\rangle \ : \ y \in K\}$, consideriamo l'insieme

$$K_0 = \{x \in K \ : \ \langle c, x\rangle = m\}.$$

Essendo K compatto, sicuramente $K_0 \neq \emptyset$. Inoltre K_0 è chiuso e $K_0 \cap ex(K) = \emptyset$. Infatti, se $z \in K_0 \cap ex(K) = \emptyset$, allora $z \in \overline{co(ex(K))}$ e quindi avremmo la contraddizione

$$\langle c, z\rangle \leq \langle c, x\rangle < \langle c, z\rangle.$$

D'altra parte, $dim(K_0) = N - 1$ e dunque per l'ipotesi induttiva abbiamo che $ex(K_0) \neq \emptyset$. Osserviamo ora che ogni punto esteremale di K_0 è estremale anche per K. Infatti, sia $z \in ex(K_0)$ e supponiamo che $z = \alpha x + \beta y$ con $\alpha, \beta \in]0, 1[, \alpha + \beta = 1$ e $x, y \in K$. Se fosse ad esempio $\langle c, x\rangle > m$ avremmo

$$m = \langle c, z\rangle = \alpha\langle c, x\rangle + \beta\langle c, y\rangle > \alpha m + \beta m = m.$$

Dunque dev'essere $\langle c, x\rangle = m$ e quindi $x \in K_0$. Allo stesso modo si verifica che anche $y \in K_0$, contraddicendo il fatto che z è estremale per K_0. Allora segue necessariamente che $z = x$ oppure $z = y$ e quindi z è estremale per K (tale ragionamento può essere riproposto fissando un $c \neq 0$ per provare che $ex(K) \neq \emptyset$). In definitiva abbiamo ottenuto la contraddizione

$$ex(K_0) \subset K_0 \cap ex(K) = \emptyset$$

e con ciò il teorema è completamente dimostrato. □

Sia ora K l'insieme individuato dai vincoli di un problema di programmazione lineare. Abbiamo già osservato che K è chiuso. Inoltre, si verifica facilmente che K è convesso. Infatti, sia ad esempio $K = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ Ax \leq b\}$ e $x, y \in K$. Allora, considerata una combinazione convessa di x e y abbiamo

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay \leq \lambda b + \mu b = b.$$

Tuttavia, K è un convesso speciale, essendo individuato dall'intersezione finita di semipiani chiusi. Pertanto, K risulta essere un politopo convesso, ossia l'inviluppo convesso di un numero finito di punti (un poligono nel piano e un poliedro nello spazio).

Teorema 49. *Sia $K \subset \mathbb{R}^N$ intersezione finita di semispazi chiusi. Allora K ha un numero finito di punti estremali. Inoltre se K è limitato allora è un politopo convesso.*

Dimostrazione. Sia $K = \bigcap_{i=1}^d P_i^{\pm} \neq \emptyset$. Procediamo per induzione sulla dimensione dello spazio. Per $N = 1$ allora K è un punto, una semiretta o un intervallo. In ogni caso i punti estremali sono in numero finito. Ora, vero per $N - 1$ dimostriamolo per N. Se $x \in ex(K)$ osserviamo che x deve appartenere a qualche iperpiano P_i. Infatti, se così non fosse, per ogni $i = 1, \cdots d$ avremmo

$$x \in B(x, r_i) \subset P_i^{\pm} \Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^d B(x, r_i) \subset \bigcap_{i=1}^d P_i^{\pm} = K,$$

e quindi x sarebbe un punto interno. Dunque $x \in ex(K) \cap P_i$. Ora verifichiamo che

$$ex(K) \cap P_i = ex(K \cap P_i).$$

In effetti, se $z \in ex(K) \cap P_i$ supponiamo che sia $z = \lambda x + \mu y$ combinazione lineare di $x, y \in K \cap P_i$. Essendo z estremale per K abbiamo che $z = x$ oppure $z = y$, da cui segue l'inclusione $ex(K) \cap P_i \subset ex(K \cap P_i)$. Viceversa, sia $z \in ex(K \cap P_i)$ e supponiamo che sia $z = \lambda x + \mu y$ combinazione lineare di $x, y \in K$. Se $P_i = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ \langle c, x \rangle = t\}$, abbiamo

$$t = \langle c, z \rangle = \lambda \langle c, x \rangle + \mu \langle c, y \rangle.$$

Poichè $x, y \in P_i^{\pm}$ allora necessariamente $x, y \in P_i$ e dunque, dall'estremalità di z segue che $z = x$ oppure $z = y$. D'altronde, essendo $dim(K \cap P_i) = N - 1$, per ipotesi induttiva abbiamo che $ex(K \cap P_i)$ ha un numero finito di punti estremali per ogni $i = 1, \cdots d$, e quindi anche $ex(K)$ ha un numero finito di punti estremali. Se infine K è limitato, Il Teorema di Klein-Milman ci assicura che è un politopo convesso, poichè $co(ex(K))$ è chiuso essendo i punti estremali in numero finito. □

Proposizione 50. *Sia K convesso ed $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione lineare. Allora i valori assunti da f in un segmento di K sono compresi tra i valori che la funzione assume agli estremi.*

Dimostrazione. Siano $p, q \in K$ e sia $x = \lambda p + \mu y \in [p, q]$. Supponiamo che per esempio sia $f(p) \leq f(q)$. Dalla linearità di f deduciamo che $f(x) = \lambda f(p) + \mu f(q)$, da cui seguono le disuguaglianze

$$f(p) = \lambda f(p) + \mu f(p) \leq \lambda f(p) + \mu f(q) = f(x),$$

$$f(x) = \lambda f(p) + \mu f(q) \leq \lambda f(q) + \mu f(q) = f(q).$$

□

Pertanto, gli eventuali punti di massimo o di minimo della funzione lineare f saranno raggiunti nei punti estremali di K. Se dunque K è l'insieme convesso individuato dai vincoli del problema di programmazione lineare, il Teorema 49 ci assicura che i punti estremali sono in numero finito e pertanto sarà sufficiente testare la funzione obiettivo nei punti estremali. Tale procedura, come delineata nell'introduzione, può essere piuttosto laboriosa, specialmente se il numero dei vincoli è grande. Dunque, anche in vista delle applicazioni, si rende necessaria una procedura più effeciente per la determinazione delle soluzioni di un problema di programmazione lineare. Nella prossima sezione illustreremo il metodo del simplesso introdotto da Dantzig.

2.2 Il metodo del simplesso

Per poter applicare il metodo del simplesso è necessario formulare in modo differente il problema di programmazione lineare. In particolare, il nostro scopo è quello di riformulare il problema in termini puramente algebrici. Un primo passo è quello di rappresentare i vincoli tramite le soluzioni di un sistema lineare.

Proposizione 51. *Ogni problema di programmazione lineare si può sempre ricondurre alla forma*

$$\begin{cases} \max \ \langle c, x \rangle \\ x \geq 0 \\ Ax = b. \end{cases} \tag{2.4}$$

Dimostrazione. Intanto osserviamo che $-\min f = \max(-f)$. Supponiamo ora che nei vincoli ci sia una equazione del tipo

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \leq b, \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, n. \tag{2.5}$$

Verifichiamo che l'equazione (2.5) si può sostituire con l'equazione

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + x_{n+1} = b, \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, n+1. \tag{2.6}$$

Infatti, se $(x_1, \cdots, x_n)$ risolve (2.5) allora basta porre $x_{n+1} = b - (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)$ per avere $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ soluzione di (2.6). Viceversa, se $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ è soluzione di (2.6) allora

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b - x_{n+1} \leq b,$$

e quindi $(x_1, \cdots, x_n)$ è soluzione di (2.5). Allo stesso modo, un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \geq b, \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, n,$$

potrà essere sostituita con una della forma

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n - x_{n+1} = b, \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, n+1.$$

Dunque, a patto di aumentare la dimensione dello spazio, i vincoli potranno essere posti nella forma $x \geq 0$, $Ax = b$. Ora, per non modificare i valori della funzione obiettivo, sarà sufficiente sostituire il vettore di partenza $c \in \mathbb{R}^N$ con il vettore $(c_1, \cdots, c_N, 0, \cdots, 0)$. □

Il metodo del simplesso consiste in un algoritmo che consente di passare da un punto estremale dell'insieme dei vincoli K ad uno migliore. Per fare questo occorre caratterizzare algebricamente i punti estremali in termini delle soluzioni del sistema lineare $Ax = b$. Ricordiamo che il rango di una matrice corrisponde al numero massimo di colonne linearmente indipendenti.

Definizione 52 (Soluzioni di base)**.** *Sia $A \in \mathcal{M}(m, n)$ con $m \leq n$ e sia $h = r(A)$. Fissate h colonne linearmente indipendenti, diciamo le prime h, se il sistema $Ax = b$ è compatibile, si dice soluzione di base del problema di programmazione lineare (2.4) ogni elemento dell'insieme dei vincoli che abbia le ultime $n - h$ coordinate nulle. Se qualcuna delle prime n coordinate è nulla il punto si dice soluzione di base degenere.*

La nozione di soluzione di base consente di identificare algebricamente i punti estremali dell'insieme dei vincoli K.

Teorema 53. *Ogni soluzione di base di (2.4) è un punto estremale per l'insieme dei vincoli K.*

Dimostrazione. Sia $x = (x_1, \cdots, x_h, 0, \cdots, 0)$ una soluzione di base. Supponiamo per assurdo che x non sia un punto estremale, ovvero che esistano $a, b \in K$ tali che x sia un punto interno di $[a, b]$. Pertanto avremo che $x = \lambda a + \mu b$ con $\lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1$. Poichè x ha le ultime $n - h$ coordinate nulle segue che per ogni $i = h + 1, \cdots, n$

$$\lambda a_i + \mu b_i = 0 \Rightarrow a_i = b_i = 0.$$

Pertanto, a, b sono due soluzioni di base relative alle stesse h colonne linearmente indipendenti. Allora necessariamente $a = b$, contraddicendo il fatto che x è interno al segmento $[a, b]$. □

Teorema 54. *Ogni punto estremale dell'insieme dei vincoli K è una soluzione di base di (2.4).*

Dimostrazione. Supponiamo che sia $x = (x_1, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0)$, $k \leq n$, un punto estremale. Indicate con A_i, $i = 1, \cdots, n$, le colonne della matrice A abbiamo che x è soluzione dell'equazione

$$x_1A_1 + \cdots + x_kA_k = b.$$

Verifichiamo che i vettori colonna A_i con $i = 1 \cdots, k$ sono linearmente indipendenti. A tal fine consideriamo una qualsiasi combinazione lineare nulla

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i = 0$$

e poniamo $z = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k, 0, \cdots, 0)$. Allora z verifica l'equazione $Az = 0$. Fissato $\varepsilon > 0$, consideriamo i punti $y_1 = x + \varepsilon z$ e $y_2 = x - \varepsilon z$ che verificano l'equazione $Ay = b$. Ora, a patto di prendere ε abbastanza piccolo, abbiamo che $y_1, y_2 \in K$. D'altra parte abbiamo che

$$x = \frac{1}{2}(x + \varepsilon z) + \frac{1}{2}(x - \varepsilon z).$$

Poichè x è estremale, deduciamo che dev'essere $z = 0$, ovvero che $\lambda_i = 0$, per ogni $i = 1, \cdots, k$. Essendo poi $r(A) = h$ possiamo concludere che necessariamente $k \leq h$ e quindi che x è una soluzione di base. □

2.3 L'algoritmo del simplesso

Descriviamo ora una procedura algoritmica che consente di passare da una soluzione di base ad un'altra in cui il valore della funzione obiettivo sia maggiore. Supponiamo che il nostro problema di programmazione lineare abbia i vincoli tutti del tipo

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i,$$

con $b_i \geq 0$. Come osservato in precedenza, il problema di programmazione lineare si può porre nella forma

$$\begin{cases} \max\ c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ x \geq 0, \quad i = 1, \cdots, n+m, \\ a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \tag{2.7}$$

Mostreremo in seguito che ogni problema di programmazione lineare si può ricondurre alla forma canonica in cui i vincoli sono espressi come in (2.7). Su tale forma applicheremo il metodo del simplesso. Osserviamo intanto che il sistema, avendo m equazioni, (2.7) ha sicuramente rango m. Dunque una soluzione di base è costituita dal vettore $(0, \cdots, 0, b_1, \cdots, b_m)$, in corrispondenza del quale la funzione obiettivo assume il valore nullo. Introduciamo l'ulteriore equazione

$$-c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n + z = 0$$

nel sistema la cui matrice completa è

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots 0 & 0 & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & b_m \\ -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per passare ad una'altra matrice si opera come segue:

1. Fra tutti i termini strettamente negativi dell'ultima riga si considera il più piccolo, diciamo $-c_h$.

2. Fra gli elementi della h-esima colonna si considerano i termini strettamente positivi e i rapporti $\frac{b_j}{a_{jh}}$.

3. Se il più piccolo di tali rapporti $\frac{b_q}{a_{pq}}$ è strettamente positivo, allora si individua il termine a_{pq} che chiameremo *pivot*.

4. Mediante la procedura di eliminazione di Gauss, si rende uguale ad 1 il coefficiente di x_q nella p-esima equazione e uguale a zero in tutte le altre.

Tale procedimento va ripetuto fino a quando non si verifica una delle due situazioni

- Tutti gli elementi dell'ultima riga sono positivi, nel qual caso l'ultimo termine della matrice è il valora massimo assunto dalla funzione obiettivo.
- C'è una colonna (escluse le ultime due) composta di termini tutti strettamente negativi, nel qual caso la funzione obiettivo non è limitata superiormente.

Se il punto 3) della precedente procedura non è soddisfatto, bisogna ricorrere ad un sistema leggermente più complicato:

1. Per ogni $-c_s < 0$ si considerano le $a_{js} > 0$ con $j = 1, \cdots, m$ e poi i rapporti $\frac{b_j}{a_{js}} \geq 0$ prendendone il più piccolo per ogni colonna.
2. Si moltipla ognuno di questi rapporti (il più piccolo per ogni colonna) per il corrispondente $-c_s$ e fra questi prodotti si sceglie quello minore che corrisponderà ad una riga p e ad una colonna q.
3. Si rende uguale ad 1 il coefficiente di x_q nella p-esima equazione e uguale a zero in tutte le altre.

Vediamo ora alcuni esempi, rimandando alla prossima sezione la giustificazione dei metodi usati.

Esempio 55. *consideriamo il seguente problema*

$$\begin{cases} \max\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 \\ x \geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 1 \\ 3x_1 + 6x_3 \leq 4 \end{cases} \tag{2.8}$$

Introducendo le variabili ausiliarie possiamo scrivere i vincoli in forma canonica

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad i = 1, \cdots, 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_5 = 1 \\ 3x_1 + 6x_3 + x_6 = 4 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + z = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

La matrice corrispondente è

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La prima soluzione di base è $(0, 0, 0, 5, 1, 4)$. *Il più piccolo termine negativo dell'ultima riga è* -4. *Nella corrispondente colonna i termini positivi sono* 3 *e* 6. *Allora consideriamo i rapporti* 4/6 *e* 5/3 *di cui il più piccolo è* 4/6. *Dunque il* pivot *è individuato dall'elemento* a_{33}. *Dunque passiamo alle matrici*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 2/3 \\ -3 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 & 7/3 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 2/3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1 & 8/3 \end{pmatrix}.$$

La nuova soluzione di base è $(0, 0, 2/3, 3, 7/3, 0)$*, in cui la funzione obiettivo vale* $8/3$*. Nell'ultima riga dobbiamo considerare il termine* -1*. I rapporti da considerare sono dunque* $4/3, 7/6, 3/2$ *di cui il più piccolo è* $7/6$*. Dunque il nuovo pivot è* a_{21}*. Dunque otteniamo le nuove matrici*

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/6 & 0 & 7/6 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 2/3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1 & 8/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 & -1/4 & -7/12 & 0 & 29/12 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/6 & 0 & 7/6 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1/4 & 1/12 & 0 & 1/12 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1/2 & 5/6 & 1 & 23/6 \end{pmatrix}.$$

Poichè nell'ultima riga i termini sono tutti positivi, il procedimento si arresta e $23/6$ *è il valore massimo raggiunto dalla funzione obiettivo. La relativa soluzione di base è*

$$(7/6, 0, 1/12, 29/12, 0, 0).$$

Dunque la soluzione del nostro problema di partenza è $x = (7/6, 0, 1/12)$*.*

Esempio 56. *Consideriamo il seguente problema di programmazione lineare già posto in forma canonica*

$$\begin{cases} \max\ \frac{3}{4}x_1 - 20x_2 + \frac{1}{2}x_3 - 6x_4 \\ x \geq 0, \quad i = 1, \cdots, 7 \\ \frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 + x_6 = 0 \\ x_3 + x_7 = 1 \end{cases}$$

La matrice da considerare è la seguente

$$\begin{pmatrix} 1/4 & -8 & -1 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3/4 & 20 & -1/2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il termine più negativo è $-3/4$ *e i rispettivi rapporti valgono entrambi zero. Ora, se continuassimo ad usare la stessa strategia dell'esempio precedente, scegliendo* a_{11} *come pivot avremmo la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & -32 & -4 & 36 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3/2 & -15 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -7/2 & 33 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque la funzione obiettivo non è cresciuta. Ora, continuando ad applicare lo stesso procedimento consideriamo il pivot a_{22} *pervenendo alla matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & -84 & -12 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/8 & -15/4 & -1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 18 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in cui la funzione obiettivo è sempre nulla. Scegliendo il pivot a_{13} *otteniamo*

$$\begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 1 & -21/2 & -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ -3/64 & 1 & 0 & 3/16 & 1/16 & -1/8 & 0 & 0 \\ -1/8 & 0 & 0 & 21/2 & 3/2 & -1 & 1 & 1 \\ 1/4 & 0 & 0 & -3 & -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5/2 & 56 & 1 & 0 & 2 & -6 & 0 & 0 \\ -1/4 & 16/3 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 & 0 \\ 5/2 & -56 & 0 & 0 & -2 & 6 & 1 & 1 \\ -1/2 & 16 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} -5/4 & 28 & 1/2 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1/6 & -4 & -1/6 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -7/4 & 44 & 1/2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/4 & -8 & -1 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3/4 & 20 & -1/2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto abbiamo riottenuto la matrice di partenza. Tale circolo vizioso dunque giustifica l'adozione di una procedura più complicata. In effetti, considerando nell'ultima riga anche l'elemento negativo $-1/2$*, il pivot da considerare è* a_{33}*. Allora si ottiene*

$$\begin{pmatrix} 1/4 & -8 & 0 & 9 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & -12 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3/4 & 20 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Ora, nell'ultima dobbiamo considerare $-3/4$ *individuando il pivot* a_{21} *da cui*

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 15/2 & 1 & -1/2 & 3/4 & 3/4 \\ 1 & -24 & 0 & 6 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 21/2 & 0 & 3/2 & 5/4 & 5/4 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, il massimo della funzione obiettivo è $5/4$ *che è raggiunto dalla soluzione di base*

$$(1, 0, 1, 0, 3/4, 0, 0).$$

Allora la soluzione del nostro problema di partenza è $(1, 0, 1, 0)$*.*

2.4 Giustificazione teorica del metodo del simplesso

In questa sezione vogliamo giustificare i procedimenti adottati negli esempi precedenti.

Proposizione 57. *Il metodo del simplesso trasforma un problema di programmazione lineare in forma canonica in un problema ad esso equivalente ancora in forma canonica. In particolare, l'ultimo elemento della matrice del sistema è il valore, maggiore del precedente, assunto dalla funzione obiettivo nella nuova soluzione di base.*

Dimostrazione. Intanto osserviamo che applicando il metodo del simplesso trasformiamo il sisitema lineare mediante trasformazioni ammissibili, dunque ottenendo un sistema equivalente. Resta da verificare che è ancora in forma canonica. Se il pivot è l'elemento a_{hk}, allora Un nuovo sitema di variabili di base è costituito da x_k e dalle precedenti variabili tranne la x_h. Infatti, la variabile x_k ha coefficiente 1 nella h-esima riga e zero in tutte le altre, mentre le altre colonne di base sono rimaste invariate fatta eccezione per quella relativa ad x_h. Vediamo ora come si trasforma la colonna dei termini noti. La prima operazione è quella di dividere la riga h-esima per il pivot (positivo). Tale operazione lascia positivi i termini noti. L'eliminazione di x_h dalle altre equazioni produce la trasformazione

$$\begin{pmatrix} b_1 - \frac{b_h}{a_{hk}} a_{1k} \\ \cdots \\ b_{h-1} - \frac{b_h}{a_{hk}} a_{h-1,k} \\ \frac{b_h}{a_{hk}} \\ b_{h+1} - \frac{b_h}{a_{hk}} a_{h+1,k} \\ \cdots \\ b_m - \frac{b_h}{a_{hk}} a_{mk} \\ z_0 + \frac{b_h}{a_{hk}} c_k \end{pmatrix}.$$

Ora, per i termini $a_{ik} \leq 0$ non si pone alcun problema. Se invece $a_{ik} > 0$ allora abbiamo

$$\frac{b_h}{a_{hk}} \leq \frac{b_i}{a_{ik}} \Rightarrow b_i \geq \frac{b_h}{a_{hk}} a_{ik},$$

poichè abbiamo scelto il rapporto più piccolo. Pertanto tutti i termini noti restano positivi. (L'ultimo termine noto è positivo proprio per la scelta di c_k). Inoltre, la funzione obiettivo resta espressa in termini delle variabili non di base e l'ultimo termine della matrice è il valore assunto dalla funzione obiettivo nella nuova soluzione di base. □

Proposizione 58. *Se, applicando il metodo del simplesso, tutti i tetrmini dell'ultima riga (tranne l'ultima colonna) sono positivi allora il valore assunto dalla funzione obiettivo è quello massimo.*

Dimostrazione. L'ultima riga della matrice del sistema corrisponde all'equazione

$$z = c_1 x_1 + \cdots + c_{n+m} x_{n+m} + z_0.$$

Se tutti i termini c_i sono negativi, allora chiaramente il valore massimo per la funzione obiettivo z è raggiunto nel valore di z_0. □

Proposizione 59. *Escludendo l'ultima colonna, se esiste un termine $-c_s < 0$ nell'ultima riga tale che nella rispettiva colonna ogni $a_{is} < 0$, allora la funzione obiettivo non è limitata superiormente.*

Dimostrazione. Supponiamo che $x_1, \cdots, x_m$ siano le variabili di base. Pertanto $s \neq 1, \cdots m$. L'ultima riga fornisce l'equazione

$$z_0 = z - c_{m+1} x_{m+1} - \cdots - c_s x_s - \cdots - c_{m+n} x_{m+n}.$$

Se poniamo $x_i = 0$ per $I = m+1, \cdots, m+n,\ i \neq s$ otteniamo una soluzione ammissibile del nostro problema a patto di richiedere che

$$\begin{cases} x_1 = b_1 - a_{1s} x_s \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_m = b_m - a_{ms} x_s \end{cases}$$

Attribuendo a x_s un qualsiasi valore positivo, si ottiene allora una soluzione ammissibile del nostro problema. Ora, l'equazione relativa alla funzione obiettivo è diventata

$$z = z_0 + c_s x_s.$$

Dando ad x_s valori arbitrariamente grandi, si ottiene che la funzione z non è limitata superiormente. □

2.4.1 Convergenza dell'algoritmo del simplesso

Affrontiamo ora il problema di vedere se l'algoritmo del simplesso precedentemente discusso giunge ad una delle due condizioni di arresto in numero finito di passi.

Lemma 60. *Se tutti i termini noti del sistema dei vincoli sono nulli, applicando il metodo del simplesso restano nulli. Se invece qualcuno dei termini noti è diverso da zero, applicando il metodo del simplesso resta almeno un termine noto diverso da zero.*

Dimostrazione. La prima affermazione è ovvia. Per quanto riguarda la seconda, se il termine noto non nullo si trova nella riga del pivot, allora questo è diviso per il pivot e quindi resta non nullo. Altrimenti, se il termine noto della riga del pivot è nullo, allora applicando il metodo del simplesso tutti gli altri termini noti restano invariati. □

Lemma 61. *Se, dopo aver applicato per un numero finito di volte il metodo del simplesso ad un problema di programmazione lineare in forma canonica con almeno un termine noto non nullo, si perviene ad una situazione di arresto, allora con le stesse operazioni si perviene ad una situazione di arresto anche per il problema ottenuto dal precedente ponendo tutti i termini noti uguali a zero.*

Dimostrazione. E' sufficiente osservare che gli elementi della matrice diversi dall'ultima colonna sono modificati attraverso elementi che non stanno nella colonna dei termini noti. Inoltre nei due problemi si possono usare gli stessi pivot. Poichè le situazioni di arresto non coivolgono la colonna dei termini noti, cambiando quest'ultima le situazioni di arresto si ripresentano. □

Teorema 62. *Per ogni problema di programmazione in forma canonica esiste una successione finita di passi in cui applicando il metodo del simplesso il problema giunge ad una delle situazioni finali di arresto.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione sul numero dei vincoli. Nel caso di un unico vincolo, per il Lemma 61 possiamo supporre che il termine noto sia non nullo. Applicando il metodo del simplesso, per il Lemma 60 il termine noto resta non nullo. Pertanto la funzione obiettivo assume valori sempre strettamente crescenti in corrispondenza delle diverse soluzioni di base. Ora, poichè queste ultime sono in numero finito, tale procedimento deve terminare: o la funzione obiettivo raggiunge il suo massimo o è illimitata superiormente.

Supponiamo ora il teorema vero per $m-1$ vincoli e dimostriamolo per m vincoli. Osserviamo che se come prima ad ogni passo la funzione obiettivo assume valori strettamente crescenti allora il processo deve terminare. Distinguiamo le possibilità:

1. Tutti i termini noti sono strettamente positivi,

2. Tutti i termini noti sono nulli,

3. Alcuni termini noti sono nulli e altri no.

Nel caso 1) applicando il simplesso la funzione obiettivo assume un valore strettamente maggiore del precedente. Nel caso 2) si sostituisce un termine noto con uno non nullo e si ricade nel caso 3). Se per quest'ultimo si raggiunge una situazione di arresto allora per il Lemma 61 anche il problema di partenza giungerà all'arresto. Resta pertanto da studiare il caso 3). Supponiamo che le prime r equazioni abbiano termini noti nulli e le restanti $m-r$ termini noti non nulli. Dunque abbiamo il sistema di vincoli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n + x_{n+r} = b_r \\ a_{r+1,1}x_1 + \cdots + a_{r+1,n}x_n + x_{n+r+1} = b_{r+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases} \tag{2.10}$$

Consideriamo il problema ausiliario (A) che si ottiene considerando le sole prime r equazioni. Tale problema è ancora in forma canonica ed ha come variabili di base le prime r variabili di base del problema di partenza. Poichè $r < m$ il problema (A) giunge ad una situazione di arresto. Riprendiamo ora il nostro problema ed applichiamo le stesse trasformazioni che hanno condotto (A) ad una situazione di arresto. Intanto il problema resta in forma canonica, i termini noti non cambiano e la funzione obiettivo subisce le stesse trasformazioni che ha avuto nel problema (A). Ora, se i coefficienti della funzione obiettivo nel problema (A) sono tutti positivi, allora lo sono anche per il nostro problema e quindi la funzione obiettivo ha raggiunto il suo massimo anche per il problema di partenza. Se invece nell'ultima riga di (A), escludendo al solito l'ultima colonna, c'è un termine strettamente negativo con la relativa colonna di termini tutti negativi allora distinguiamo due sottocasi. Se, dopo tutte le trasformazioni, i restanti elementi della stessa colonna del problema di partenza sono negativi, allora siamo nella situazione di arresto in cui la funzione obiettivo è illimitata superiormente. Altrimenti, essendo i termini noti invariati, si può ancora applicare il metodo del simplesso trovando un valore della funzione obiettivo strettamente maggiore del precedente. □

2.4.2 Riduzione in forma canonica

Da quanto visto nelle sezioni precedenti, ogni problema di programmazione lineare si può ricondurre allo studio di un sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ -c_1x_1 - \cdots - c_nx_x + z = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

con $x_i \geq 0$ e $b_i \geq 0$. In effetti, se qualcuno dei termini noti è negativo basterà cambiare di segno la relativa equazione. Il problema è dunque quello di determinare una soluzione di base da cui iniziare il metodo del simplesso. A tal fine si introducono delle variabili artificiali $x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}$ e il problema ausiliario (A):

$$\begin{cases} \min W = x_{n+1} + \cdots + x_{n+m} \\ x \geq 0 \\ a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ -c_1x_1 - \cdots - c_nx_x + z = 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

Affinchè il problema (A) risulti in forma normale è sufficiente osservare che si può scrivere

$$W = b_1 + \cdots + b_m - (a_{11} + \cdots a_{m1})x_1 - \cdots - (a_{1n} + \cdots + a_{nm})x_n.$$

Osserviamo che $W \geq 0$. Inoltre, se $\min W > 0$ allora il sistema dei vincoli di (2.11) non è compatibile. Dunque se (2.11) è compatibile, applicando il simplesso al problema (A), necessariamente troveremo che $\min W = 0$. Ora, nell'applicare il metodo del simplesso a W il pivot verrà sempre scelto nelle prime n colonne. Dunque le restanti m colonne, tranne la $n+h$-esima, non variano. A questo punto possiamo considerare il problema (A') di rendere minima la funzione

$$W' = x_{n+1} + \cdots + x_{n+h-1} + x_{n+h+1} + \cdots + x_{n+m}$$

con i vincoli del problema (A) modificato dal passo del simplesso omettendo la $(n+h)$-esima colonna che non corrisponde più ad una variabile di base. Possiamo allora ripetere il procedimento sul problema (A') in cui non appare più la variabile artificiale x_{n+h}. In questo modo perveniamo a formulazioni equivalenti del problema di partenza in cui possiamo evitare di calcolare le colonne delle variabili artificiali. Iterando la procedura si arriva ad una situazione di arresto per (A). Se il minimimo è diverso da zero allora il problema di partenza è incompatibile. Se il minimo è zero allora il problema assume nella corrispondente soluzione di base il valore zero. Allora, se si ha un sistema di variabili di base estratte dalle prime n, il problema di partenza è in forma canonica e si può applicare ad esso il metodo del simplesso. Altrimenti, se è rimasta una variabile di base artificiale x_j essa assumerà il valore zero nella corrispondente soluzione di base. Ora, se nell'equazione in cui x_j compare con coefficiente 1, le prime n variabili assumono il valore zero allora tale equazione è superflua e può essere eliminata. Altrimenti, se c'è un elemento $a_{kj} \neq 0$ con $1 \leq k \leq n$, con le solite operazioni si può far diventare la variabile x_k di base al posto della x_j. Il problema resta in forma normale giacchè i termini noti non cambiano essendo pari a zero il termine noto dell'h-esima riga.

Esempio 63. *Si consideri il problema*

$$\begin{cases} \min 10x + 4y \\ x, y \geq 0 \\ 3x + 2y \geq 60 \\ 7x + 2y \geq 84 \\ 3x + 6y \geq 72. \end{cases}$$

Trasformando i vincoli in equazioni e il problema in forma massimizzante abbiamo

$$\begin{cases} -\max -10x - 4y \\ x, y, x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ 3x + 2y - x_1 = 60 \\ 7x + 2y - x_2 = 84 \\ 3x + 6y - x_3 = 72. \end{cases}$$

Poichè il problema non è ancora in forma canonica introduciamo le variabili artificiali giungendo al problema ausiliario

$$\begin{cases} \min W = x_4 + x_5 + x_6 \\ x, y, x_1.x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \\ 3x + 2y - x_1 + x_4 = 60 \\ 7x + 2y - x_2 + x_5 = 84 \\ 3x + 6y - x_3 + x_6 = 72 \\ 10x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

Per avere il precedente problema in forma canonica dobbiamo esprimere la funzione W in termini delle variabili non di base, ovvero

$$W = 216 + 13x + 10y - x_1 - x_2 - x_3.$$

Poichè W va resa minima perveniamo al problema

$$\begin{cases} x, y, x_1.x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \\ 3x + 2y - x_1 + x_4 = 60 \\ 7x + 2y - x_2 + x_5 = 84 \\ 3x + 6y - x_3 + x_6 = 72 \\ 10x + 4y + z = 0 \\ -13x - 10y + x_1 + x_2 + x_3 + w = -216. \end{cases}$$

Abbiamo dunque la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ 7 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 84 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 72 \\ 10 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -13 & -10 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -216 \end{pmatrix}.$$

Nelle successive matrici ometteremo le colonne relative alle variabili artificiali x_4, x_5, x_6. Prendiamo come pivot a_{21} ottenendo

$$\begin{pmatrix} 0 & 8/7 & -1 & 3/7 & 0 & 24 \\ 1 & 2/7 & 0 & -1/7 & 0 & 12 \\ 0 & 36/7 & 0 & 3/7 & -1 & 36 \\ 0 & 8/7 & 0 & 10/7 & 0 & -120 \\ 0 & -44/7 & 1 & -6/7 & 1 & -60 \end{pmatrix}.$$

Prendiamo il pivot a_{32} si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1/3 & 2/9 & 16 \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 1/18 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1/12 & -7/36 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4/3 & 2/9 & -128 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & -2/9 & -16 \end{pmatrix}.$$

Il nuovo pivot è a_{14}, da cui

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 & 2/3 & 48 \\ 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/6 & 18 \\ 0 & 1 & 1/4 & 0 & -1/4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -2/3 & -192 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque abbiamo ottenuto che il valore minimo di W è zero e quindi il problema originario è senz'altro compatibile. Inoltre, osserviamo che esso è scritto in forma canonica con variabili di base x, y, x_2. Possiamo allora applicare il metodo del simplesso prendendo il pivot a_{15}. Si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -9/2 & 3/2 & 1 & 72 \\ 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -7/8 & 3/8 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -144 \end{pmatrix}.$$

Pertanto il minimo del nostro problema è il valore 144 *raggiunto nella soluzione di base* $(6, 21, 72)$. *La soluzione del problema di partenza è dunque* $(6, 21)$.

2.5 Il problema duale

Consideriamo il seguente problema di programmazione lineare che chiameremo problema primale

$$\begin{cases} \min \langle c, x\rangle \\ x \geq 0 \\ Ax = b. \end{cases} \tag{\mathbf{P}}$$

Il problema duale associato a **P** è il seguente

$$\begin{cases} \max \langle b, y\rangle \\ A^t y \leq c. \end{cases} \tag{\mathbf{D}}$$

Si osservi che nel problema duale **P** non si richiede la positività delle soluzioni.

Lemma 64. *Siano K l'insieme dei vincoli di **P** e H l'insieme dei vincoli di **D**. Allora*

$$\forall x \in K, \forall y \in H \quad \langle b, y\rangle \leq \langle c, x\rangle.$$

Dimostrazione. Siano $x \in K$, $y \in H$. Dalla (1.7) deduciamo che

$$\langle b, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^t y\rangle \leq \langle c, x\rangle,$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $y \in H$ e dal fatto che $x \geq 0$. □

Dal Lemma 64 segue un primo confronto tra i due problemi

$$\mathbf{D} \leq \mathbf{P}. \tag{2.13}$$

Il seguente risultato fornisce una condizione affinchè in (2.13) valga il segno di uguaglianza.

Lemma 65 (Condizione di ottimalità)**.** *Se esistono $x_0 \in K$ e $y_0 \in H$ tali che*

$$\langle b, y_0\rangle = \langle c, x_0\rangle$$

*allora x_0 è soluzione di **P**, mentre y_0 è soluzione di **D**. Inoltre **P** = **D**.*

Dimostrazione. Sia $y \in H$. Per il Lemma 64 abbiamo che

$$\langle b, y\rangle \leq \langle c, x_0\rangle = \langle b, y_0\rangle.$$

Pertanto y_0 è soluzione di **D**. Similmente, se $x \in K$

$$\langle c, x_0\rangle = \langle b, y_0\rangle \leq \langle c, x\rangle$$

e quindi x_0 è soluzione di **P**. □

Teorema 66 (Dualità)**.** *Se uno dei due problemi **P** e **D** ammette soluzione allora anche l'altro problema ammette soluzione e **P** = **D**.*

Dimostrazione. Supponiamo che il problema **P** ammetta la soluzione $x_0 \in K$ trovata applicando il metodo del simplesso. Per applicare il metodo del simplesso dobbiamo aggiungere m variabili artificiali e, giacchè non abbiamo nessuna condizione su b, dovremo ad esempio cambiare di segno le prime k equazioni. Dunque, la matrice di partenza per il metodo del simplesso è

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} & -1 & 0 & \cdots & 0 & -b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{k1} & \cdots & -a_{kn} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -b_k \\ a_{k+1,1} & \cdots & a_{k+1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m \\ c_1 & \cdots & c_n & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poichè il problema ammette soluzione si giunge alla situazione finale la cui ultima riga sarà del tipo

$$R' = (r_1, \cdots, r_n, s_1, \cdots, s_m, -\langle c, x_0\rangle).$$

Ad ogni passo, il metodo del simplesso sostituisce una riga con una combinazoine lineare delle altre righe. Dette R_i le righe di partenza avremo che

$$R' = R_{m+1} + d_1 R_1 + \cdots + d_m R_m,$$

Dove il primo coefficiente è 1 giacchè il pivot non è mai nell'ultima riga. Osserviamo che

$$s_i = -d_i,\ i = 1, \cdots, k, \quad s_i = d_i,\ i = k+1, \cdots, m.$$

Allora, per ogni $i = 1, \cdots n$ abbiamo che

$$r_i = c_i + s_1 a_{1i} + \cdots + s_m a_{mi}. \tag{2.14}$$

Poichè $r_i \geq 0$, deduciamo che

$$-s_1 a_{1i} - \cdots - s_m a_{mi} \leq c_i \tag{2.15}$$

Poniamo allora $y_0 = (-s_1, \cdots, -s_m)$. La condizione (2.15) ci dice che $A^t y_0 \leq c$ ovvero che $y_0 \in H$. D'altra parte

$$-\langle c, x_0\rangle = s_1 b_1 + s_m b_m = -\langle b, y_0\rangle.$$

Allora per il Lemma 2.13 y_0 è una soluzione di **D** e inoltre **P** = **D**. Viceversa, supponiamo ora che sia il problema duale **D** ad avere soluzione. Osserviamo che si può scrivere

$$\begin{cases} \max\ \langle b, y\rangle \\ A^t y \leq c. \end{cases} = \begin{cases} -\min\ \langle -b, y\rangle \\ \bar{y} \geq 0 \\ A^t y + I\bar{y} = c, \end{cases}$$

per un opportuno $\bar{y}$. Dividendo parta negativa e positiva $y = y^+ - y^-$ abbiamo

$$\begin{cases} -\min \langle -b, y^+ \rangle + \langle b, y^- \rangle \\ \bar{y} \geq 0 \\ A^t y^+ - A^t y^- + I\bar{y} = c. \end{cases}$$

Posto $z = (y^+, y^-, \bar{y})$, $\bar{b} = (-b, b, 0)$ e considerata la matrice $B = (-A^t | A^t | -I)$ il problema si può scrivere nella forma

$$\begin{cases} -\min \langle \bar{b}, z \rangle \\ z \geq 0 \\ Bz = -c. \end{cases} \tag{2.16}$$

Per la prima parte del teorema, il problema duale di (2.16) ammette soluzione. D'altronde, tale problema duale corrisponde a

$$\begin{cases} -\max \langle -c, x \rangle = \min \langle c, x \rangle \\ B^t x \leq \bar{b}. \end{cases}$$

Tuttavia, osserviamo che

$$B^t x \leq \bar{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -A \\ A \\ -I \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -Ax \leq -b \\ Ax \leq b \\ -x \leq 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto abbiamo ottenuto proprio il problema primale

$$\begin{cases} \min \langle c, x \rangle \\ x \geq 0 \\ Ax = b. \end{cases}$$

□

Riprendiamo ora l'Esempio 2

$$\begin{cases} \min Z(x, y) = 10x + 4y \\ x, y \geq 0 \\ 3x + 2y = 60 \\ 7x + 2y = 84 \\ 3x + 6y = 72 \end{cases}$$

dove nei vincolo possiamo considerare i segni di uguaglianza giacchè le soluzioni si trovano nei punti estremali (fig. **??**). Supponiamo che un venditore contatti l'allevatore dell'esempio facendogli un'offerta per comprare da lui i tre elementi nutrizionali necessari al sostentamento della mandria. Indichiamo con y_1, y_2, y_3 i prezzi proposti dal venditore per i tre elementi nutrizionali. Dunque il venditore avrà interesse a rendere massima la funzione $W = 60y_1 + 84y_2 + 72y_3$. Tuttavia, affinchè sia accettata, la sua offerta deve essere conveniente per l'allevatore. Pertanto giungiamo al problema

$$\begin{cases} \max Z(x, y) = W = 60y_1 + 84y_2 + 72y_3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \\ 3y_1 + 7y_2 + 3y_3 \leq 10 \\ 2y_1 + 2y_2 + 6y_3 \leq 4 \end{cases}$$

Dunque il venditore deve risolvere il problema duale di quello dell'allevatore.

Bibliografia

[1] F. Arfini, I modelli di programmazione matematica per l'analisi della politica agricola comune, 2000.

[2] R. B. Bland, Programmazione lineare e allocazione delle risorse, Le Scienze no. 156, 1981.

[3] J. P. Cecconi, G. Stampacchia, Analisi Matematica, 2 Volume, funzioni di più variabili, Liguori editore, 1983.

[4] V. Comincioli, Problemi e Modelli Matematici nelle Scienze Applicate, Casa Editrice Ambrosiana, 1993.

[5] S. I. Gass, Linear Programming, Methods and Applications, Mc Graw-Hill, 1975.

[6] S. Lang, Algebra Lineare, Bollati Boringhieri, 1970.