Newton, la Mela e la Luna

Gianpietro Favaro, Maggio 2012

L'episodio che descrive l'illuminazione che ebbe Newton dopo aver visto cadere una mela da un albero dalla sua casa di campagna e che gli permise di concepire la *legge di Gravitazione Universale*, sembra non sia reale.

Quello che probabilmente accadde nella sua mente durante l'*Annus Mirabilis* (1666, all'età di 24 anni), fu l'intuizione che il fenomeno che fa cadere i gravi sulla Terra è lo stesso che mantiene la Luna nell'orbita!

Questa idea andava comunque dimostrata e Newton procedette in questo modo.

Grazie agli studi di Galileo, era già noto a Newton che l'accelerazione dei gravi sulla superficie terrestre era di $9.8 m/s^2$ (le unità di misura al tempo erano differenti, ma poco importa) ed era anche noto che la distanza della Luna dalla Terra era di circa 60 raggi terrestri, ma questo valore non era abbastanza preciso.

Sulla base delle stesse informazioni, **aggiornate al giorno d'oggi**, seguiamo passo-passo i calcoli che eseguì Newton e che gli permisero di dedurre la legge che lega l'accelerazione di gravità alla distanza tra i corpi.

Ecco come operò.

Dati

Raggio della Terra = $6.5x10^6 m$

Distanza della Luna (media) = $380x10^6 m$

Periodo orbitale della Luna = 27giorni*24*60*60 = $2.33x10^6 s$

Accelerazione di gravità sulla superficie della Terra = $9.8 m/s^2$

Lunghezza dell'orbita lunare (circonferenza) = 2*π*Distanza della Luna = $2.39x10^9 m$

Per determinare l'azione della Terra sulla Luna, Newton usò un espediente: considerò che il moto della Luna, anzichè avvenire in modo continuo su un'orbita circolare (in prima approssimazione), procedesse, per così dire, a scatti. Si componesse, cioè, di due moti spezzettati nel tempo: uno rettilineo ed uniforme, lungo la tangente ed uno, uniformemente accelerato, sulla direttrice del raggio, dal punto di arrivo del moto precedente.

Affinchè il moto complessivo si sviluppi lungo una circonferenza (in prima approssimazione), occorre che il segmento di caduta libera, **dr**, raggiunga la distanza media Terra-Luna dopo che quest'ultima si era allontanata di moto rettilineo ed uniforme lungo la tangente, come se l'effetto attrattivo della Terra non si fosse espresso. Il movimento decomposto viene mostrato nella figura seguente.

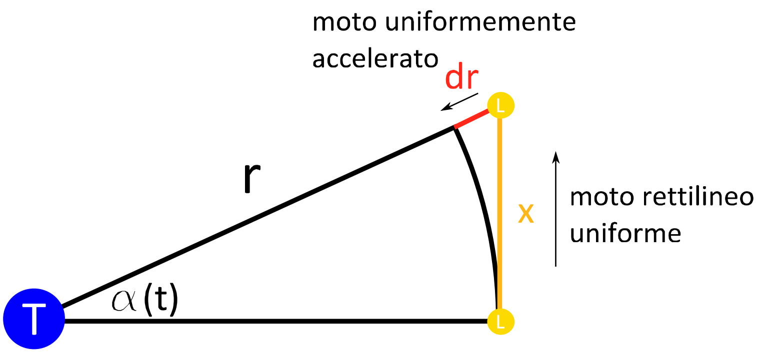

Figura 1: moto decomposto della Luna

Calcoliamo, innanzitutto, il tragitto tangenziale, approssimato, percorso dalla Luna in un secondo,

x=(Circonferenza dell'orbita lunare(m))/(Periodo orbitale della Luna(s)) = 1.02×10^3m, ossia circa 1Km (tratto rettilineo), confondendo la tangente con l'arco.

Calcoliamo adesso l'angolo al centro dell'orbita, supposta circolare, sotteso in un secondo.

In un secondo la Luna percorre un angolo lungo la sua orbita pari a:

360°/Periodo Orbitale(s)=154.32×10^{-6}°/s, ossia 154.32 milionesimi di grado sottesi in un secondo: un angolo decisamente molto piccolo.

Dobbiamo ora calcolare lo spazio percorso dalla Luna, **dr**, dalla fine del moto rettilineo e uniforme e che la riporta alla distanza **r** con un moto uniformemente accelerato.

Calcoliamo il valore di **dr**.

Il valore esatto si esprime secondo la formula (dalla geometria di fig. 1):

$$x = r \cdot \tan(\alpha) = (r + dr) \cdot \sin(\alpha)$$

da cui:

$$dr = \frac{(r \cdot \tan(\alpha) - r \cdot \sin(\alpha))}{\sin(\alpha)}$$

quindi:

Formula 1: $dr = r \cdot \dfrac{1 - \cos(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Tuttavia, poiché l'angolo è molto piccolo, il coseno si avvicina "pericolosamente" a 1, il numeratore si approssima a zero e l'errore che si commette nel calcolo pratico del quoziente è grande.

*Ad esempo: se il calcolo viene eseguito con una precisione di 13 cifre, il **coseno** restituisce il valore di 1 già con un angolo di 0.0000001°, mentre, ad esempio, il calcolo della **tangente**, essendo prossima a zero, risulta valido ancora con un angolo di 0.00000000000001° (=$174.532925199 \times 10^{-18}$). Inoltre, le operazioni matematiche, in particolare le somme e le sottrazioni, possono dare risultati inattesi quando si utilizza uno strumento di calcolo che ha una precisione finita: se, ad esempio, la precisione è di sole 4 cifre, il calcolo della differenza (1-0.00009) restituisce 1! Le moltiplicazioni e le divisioni soffrono meno di questo problema.*

In altre parole, nel calcolo del coseno per angoli piccoli, una volta saturata la precisione del dispositivo di calcolo, ad esempio raggiunto un valore del coseno pari a 0.9999, tutti gli angoli inferiori non potranno che restituire il valore di 1. La funzione trigonometrica della tangente, invece, per angoli piccoli restituisce valori prossimi a zero e quindi, grazie alla rappresentazione mantissa+esponente, la precisione può spingersi molto più in là. E' possibile, ad esempio, calcolare tan(0.00000000000001°)=174.5×10^{-18} senza particolari problemi.

Conviene usare allora una variante della formula esatta, che non usi il calcolo di coseni e che restituisce, però, un risultato migliore del calcolo diretto per angoli piccoli.

Dalla figura e dal teorema di Pitagora si ha che:

$$(r+dr)^2=r^2+2\cdot r\cdot dr+dr^2=r^2+r^2\cdot\tan^2(\alpha)$$

trascurando il termine dr^2, la relazione si riduce a:

$$r^2+2\cdot r\cdot dr=r^2+r^2\cdot\tan^2(\alpha)$$

Formula 2: $dr=\frac{r}{2}\cdot\tan^2(\alpha)$ valida per dr piccoli

Essendo la tangente prossima a zero e non dovendo effettuare somme o sottrazioni, la precisione del calcolo è migliore.

Il termine dr^2 può essere trascurato quando il termine dr si approssima a zero. Ad esempio, se dr=0.001, dr^2=0.000001.

Utilizzando la formula 2., risulta:

$dr=380\times10^6 m/2*\tan^2(154.32\times10^{-6})= 1.37\times10^{-3}m$

ossia, in un secondo la Luna percorre una distanza di circa 1Km e si *abbassa* verso la Terra di 1.4mm! Il termine dr^2 (1µm) è quindi trascurabile rispetto al raggio dell'orbita lunare (380000Km).

Con questa informazione è possibile calcolare l'**accelerazione** alla quale è soggetta la Luna mediante la formula (moto uniformemente accelerato):

$$dr=\frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$$

da cui, noto dr, si ottiene:

$$a=\frac{2\cdot dr}{t^2}$$

$a_L=2.76\times10^{-3}\ m/s^2$

Ora calcoliamo il rapporto tra l'accelerazione di gravità sulla superficie della Terra e alla distanza della Luna:

$a_T/a_L=9.8/2.76\times10^{-3}=3.55\times10^3$

Ed ora **ATTENZIONE**: il rapporto tra il quadrato del raggio dell'orbita lunare e il quadrato del raggio terrestre vale...:

$r_{oL}^2/r_T^2= 3.42\times10^3$

La differenza tra i due rapporti è inferiore al 4%.

ossia:

$$a_T/a_L = r_{oL}^2/r_T^2$$

Questo dimostrerebbe proprio che la forza di gravità diminuisce con l'inverso del quadrato della distanza.

Tuttavia, poiché la stima del raggio terrestre e della distanza della Luna al tempo di Newton, soffrivano di gravi errori, il suo calcolo fallì e, con grande amarezza, non potè pubblicare i risultati. Si accontentò di tenere la sua idea in un cassetto.
Quando, anni dopo, gli astronomi furono in grado di dare stime della distanza della Luna più corrette, Newton rifece i calcoli e sicuramente dovette rimanere paralizzato davati alla coincidenza dei risultati!

Riproviamo ora su intervalli di un minuto anziché di un secondo, per ridurre gli errori di calcolo delle funzioni trigonometriche per angoli piccoli.

Periodo orbitale della Luna in minuti=27*24*60=38.88x10^3 min

Angolo dell'orbita percorso in un minuto=(360°/Periodo orbitale della Luna)=9.26x10^{-3} °

dr=r/2*$\tan^2$ (9.26x10^{-3} °)=4.96m, segmento di caduta libera.

Accelerazione alla distanza della Luna=2/(60^2)*dr=**2.76x10^{-3}** identico al valore calcolato nell'intervallo di un secondo.

Otteniamo quindi lo stesso risultato del caso precedente.

Ripetiamo il calcolo utilizzando, stavolta, la Terra e Giove, soggetti alla forza di gravità del Sole.

Dati

Distanza Terra-Sole=150x10^9m

Distanza Giove-Sole=780x10^9m

Periodo orbitale di Giove=4333giorni*24*60=6.24x10^6 min

Periodo orbitale della Terra=365giorni*24*60=525.6x10^3 min

Angolo percorso da Giove nell'orbita, **in un minuto**=360°/6.24x10^6 '=57.70x10^{-6} °

Angolo percorso da Terra nell'orbita, **in un minuto**=360°/525.6x10^3 '=684.93x10^{-6} °

Dalla Formula 2:

dr_G=(Distanza Giove-Sole)/2*Tan(57.70x10^{-6} °)^2=0.40m[1]

dr_T=(Distanza Terra-Sole)/2*Tan(684.93x10^{-6} °)^2=10.72m

La “caduta libera” verso il Sole avviene in 60s.

Accelerazione del Sole su Giove=a_G=2/(60^2)*dr_G=219.71x10^{-6} m/s^2

Accelerazione del Sole sulla Terra=a_T=2/(60^2)*dr_T=5.95x10^{-3} m/s^2

Rapporto delle accelerazioni=a_T/a_G=**27.10**

Inverso del quadrato dei rapporti delle distanze=$(r_G/r_T)^2$=**27.04**

Non sembra essere una coincidenza!

Vale ancora la regola: $(a_T/a_G)=(r_G/r_T)^2$

Ultima prova, per confermare, con Saturno.

Dati

Distanza Saturno-Sole=1.4295x10^{12}m

Periodo orbitale di Saturno=10756giorni*24*60=15.49x10^6 min

Angolo percorso da Saturno nell'orbita, in un minuto=360°/15.49x10^6 min=23.24x10^{-6}

dr_S=(Distanza Saturno-Sole)/2*$\tan^2$(23.24x10^{-6} °)=0.12m

Accelerazione del Sole su Saturno=a_S=2/(60^2)*dr_S=65.34x10^{-6} m/s^2

Rappporto delle accelerazioni=a_T/a_S=**91.12**

Inverso del quadrato dei rapporti delle distanze=$(r_S/r_T)^2$=**90.82**

1 In un minuto Giove si “abbassa” dalla tangente di 40cm!

LA FORZA DI GRAVITA' E' PROPORZIONALE ALL'INVERSO DEL QUADRATO DELLA DISTANZA!

Domanda: osserviamo che in tutti questi calcoli non è mai stata utilizzata la massa dei corpi coinvolti.
In realtà la massa ha un effetto sul calcolo: attraverso quale parametro fa sentire questo effetto?

Gianpietro Favaro, 2012