ELEMENTI DI ALGEBRA
Logica, Insiemi, Funzioni, Relazioni, Ordinamenti, Reticoli

LOGICA

1. Cos' è una proposizione logica?

E' una frase che possa essere qualificata come vera o falsa. Tali due valori vengono detti valori di verità della proposizione logica.

2. Cosa sono e quali sono i connettivi logici?

Sono operatori utilizzati per connettere proposizioni logiche fra loro (componenti) al fine di ottenere proposizioni derivate, il cui valore di verità dipende, oltre che dal valore delle proposizioni componenti, anche dagli operatori utilizzati.
Essi sono:

- $\neg$ NOT: E' un operatore unario, ovvero ad un solo operando, che nega una proposizione, trasformandola da vera a falsa e viceversa
- $\wedge$ AND: Operatore binario infisso, ovvero interposto fra due proposizioni A, B. Esso congiunge le due proposizioni producendone una terza la quale è vera solo se, e solo se, entrambe le componenti sono vere
- $\vee$ OR: Operatore binario infisso. Disgiunge due proposizioni producendone una terza che è vera quando almeno una delle componenti è vera.

- $\oplus$ EXOR: OR esclusivo. Operatore binario infisso. Interposto fra due proposizioni ne produce una terza che è vera quando l'una o l'altra (ma non entrambe) proposizione è vera.
- $\Rightarrow$ Implicazione: Operatore binario infisso. La proposizione $A\Rightarrow B$ è falsa solo se A è vera e B è falsa.
- $\Leftrightarrow$ EQUIVALENZA. Operatore binario infisso. La proposizione $A\Leftrightarrow B$ è vera solo se A,B hanno lo stesso valore di verità. Il simbolo dell'equivalenza è $\Leftrightarrow$ poiché equivale alla doppia implicazione. Vale a dire $A\Leftrightarrow B$ se e solo se $A\Rightarrow B$ e $B\Rightarrow A$

3. Cos'è una espressione logica?

E' una espressione costituita da VARIABILI LOGICHE, che rappresentano proposizioni logiche, da connettivi logici e da eventuali parentesi. Le parentesi servono a modificare l'ordine di valutazione, che, in assenza di parentesi viene valutato attribuendo agli operatori la priorità indicata nel precedente elenco. Ad esempio $\neg A\wedge B\vee C\Rightarrow A\vee C$
La precedente viene valutata come se fosse scritta:
$((((\neg A)\wedge B)\vee C)\Rightarrow(A\vee C))$
Se si vuole attribuire all'espressione di partenza un significato diverso occorrerà far uso di parentesi.

4. Che cosa sono le tautologie e le contraddizioni?

Una tautologia è una espressione logica che assume il valore VERO quale che sia il valore di verità attribuito alle sue variabili logiche. Analogamente una contraddizione assume sempre il valore FALSO

5. Che cos'è una implicazione?

E' una espressione logica avente la forma:

$A \Rightarrow B$
che si legge A implica B, oppure Se A allora B.
La proposizione A è detta ipotesi, B è detta tesi. Oppure A è detta condizione SUFFICIENTE per B. B è detta condizione NECESSARIA per A. Si noti infatti che da $A \Rightarrow B$ segue $\neg B \Rightarrow \neg A$ (se non si verifica B allora non si verifica A, ovvero B è necessaria per la validità di A)

6. Che cos'è una funzione proposizionale P(x)?
E' una frase che contiene l'incognita x la quale può assumere valori in un insieme D. La frase P(a) ottenuta sostituendo ad x un elemento a di D diventa una proposizione (vera o falsa).

7. Cosa sono i quantificatori?
Per indicare che la funzione P(x) diviene vera per ogni $x \in D$ scriviamo $\forall x P(x)$
Per indicare che esiste un $x \in D$ tale che P(x) è vera scriviamo $\exists x\, P(x)$
Sia $\forall x P(x)$ che $\exists x\, P(x)$ sono proposizioni, ovvero sono vere o false.
I due simboli $\forall, \exists$ vengono detti quantificatori (universale ed esistenziale)

8. Qual è la negazione di $\forall x P(x)$?
Negare che per ogni x vale P(x) significa ammettere che esiste un x per cui non vale P(x).
Allora: $\neg \forall x\, P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$
Analogamente: $\neg \exists x\, P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x) \notin$

INSIEMI

1. Cos'è un insieme?
E' un ente matematico A per il quale sia stata definita la proprietà di appartenenza.
Ovvero per ogni x vale una delle due:
$x \in A$ (x appartiene ad A)
$x \notin A$ (x non appartiene ad A)

2. Che cos'è l'insieme vuoto?
E' un insieme $\varnothing$ privo di elementi.

3. Quando due insiemi A,B sono uguali?
Quando un elemento x che appartiene ad A appartiene anche a B e viceversa. Ovvero: $A=B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
Dalla precedente definizione segue che due insiemi che differiscono solo per l'ordine degli elementi, oppure perché appare un elemento ripetuto, sono uguali secondo la teoria degli insiemi.
Ad esempio $\{1,1,2\}=\{1,2\}=\{2,1\}=\Leftrightarrow\{1,1,1,2,2,2\}$

4. Quando A è detto sottoinsieme di B?
Quando A è l'insieme vuoto, oppure quando ogni elemento di A è anche elemento di B.
$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \Rightarrow x \in B$
Si noti che, per definizione, l'insieme vuoto è un sottoinsieme di qualsiasi insieme.

5. Quando A è un sottoinsieme proprio di B?

Quando A è un sottoinsieme di B ed esiste un x appartenente a b e non appartenente ad A. Se A è un sottoinsieme proprio di B scriviamo: $A \subset B$

6. Cos'è l'intersezione di due insiemi?
E' l'insieme formato dagli elementi che appartengono sia all'uno che all'altro insieme.

7. Cos'è l'unione di due insiemi?
E' l'insieme formato dagli elementi che appartengono all'uno, all'altro o ad entrambi gli insiemi.

8. Cos'è la differenza A\ B fra due insiemi?
E' l'insieme formato dagli elementi di A che non siano elementi di B, ovvero dagli elementi di A meno gli elementi dell'intersezione.

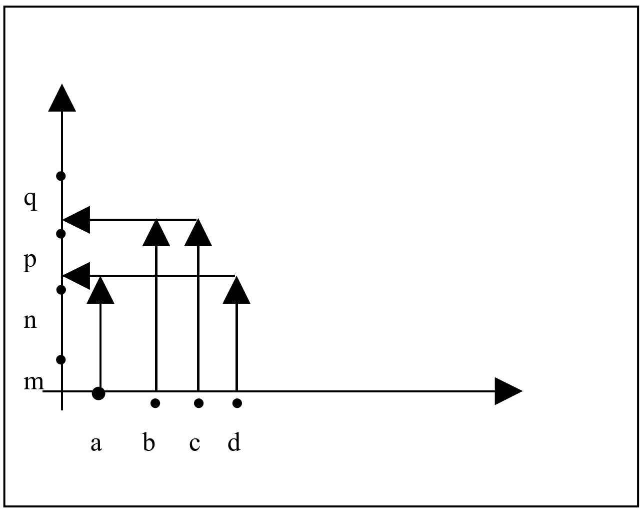
9. Cos'è la differenza simmetrica $A \Delta B$?
E' l'insieme formato dall'unione di A e B meno l'intersezione fra A e B.

10. Che cos'è il prodotto cartesiano di due insiemi?
E' l'insieme delle coppie ordinate (x,y) tali che $x \in A$ ed $y \in B$

11. Che cos'è l'insieme delle parti P(A)?
E' l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A.
Ad esempio se A={1,2,3} allora P(A)={Ø,{1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3},{1,2,3}}
Notiamo infatti che ogni insieme è sottoinsieme di se stesso. Se A ha n elementi allora l'insieme delle parti P(A) ha $2^{\wedge n}$ elementi

FUNZIONI

1. Dati due insiemi A,B, cos'è una funzione (o applicazione) da A in B?
E una legge che ad ogni elemento a di A (dominio) fa corrispondere uno ed un solo elemento di B che viene detto immagine di a ed indicato con f(a). In figura è indicato un esempio di funzione:



L'insieme A è costituito dagli elementi a,b,c,d. L'insieme B è costituito da m,n,p,q
Il punto n è immagine di a e di d. Il punto p è immagine di b e di c.

2. Data una funzione $f:A \to B$, che cos'è l'immagine di A?
E' l'insieme dei punti di B che sono immagine di qualche punto di A. Tale insieme viene indicato con imf (immagine di A tramite f)

3. Quando una funzione è detta iniettiva?
Quando elementi diversi di A sono inviati su elementi diversi di B. La funzione dell'esempio non è iniettiva.

4. Quando una funzione è suriettiva?
Quando tutti gli elementi di B sono immagine di qualche elemento di A.

5. Quando una funzione e biiettiva?
Quando è sia iniettiva che suriettiva.

6. Cos'è una funzione composta?
Se abbiamo due applicazioni $f:A \to B$, $g:B \to C$, si dice funzione composta da f e g la funzione $g \circ f: A \to C$ data da $g(f(a))$ per ogni $a \in A$

7. Cos'è l'funzione inversa?
Se $f:A \to B$ è una funzione biiettiva allora ad ogni $a \in A$ corrisponde un unico $b \in B$, che si trova applicando f ad a. Ovvero $b=f(a)$.
Perciò possiamo definire la funzione $f^{-1}: B \to A$ tale che $\forall b \in B$ sia $f^{-1}(b)=a$, essendo a,b collegati dalla funzione f.

8. Se $f:A \to B$, e H è un sottoinsieme di B, cos'è la controimmagine di H?
E' l'insieme dei punti di A che hanno qualche immagine in H. Viene indicata con $f^{-1}(H)$.

9. Cosa succede componendo due funzioni f,g?
- Se f,g sono iniettive $g \circ f$ è iniettiva.
- se f,g sono suriettive, allora $g \circ f$ è suriettiva
- se $g \circ f$ è suriettiva allora g è suriettiva
- se $g \circ f$ è iniettiva allora f è iniettiva
- se f è biiettiva allora f^{-1} è biiettiva.

10. Cos'è la funzione caratteristica $\varphi: B \to \underline{2}$?
Se A è un sottoinsieme di B allora la funzione φ che per ogni $x \in B$ mi dice se x è immagine di qualche elemento di A, viene detta funzione caratteristica.
Si noti che l'insieme $\underline{2} = \{0,1\}$. Si pone $\varphi(x)=0$ se x non è immagine di qualche elemento di A), mentre $\varphi(x)=1$ se x è immagine di qualche elemento di A.

11. Cosa si intende con la scrittura B^A ?
Insieme di tutte le applicazioni da A in B.

12. Quando due insiemi sono equipotenti?

Quando esiste una corrispondenza biunivoca fra di loro. Per indicare la potenza di A scriviamo |A|. Per indicare che A,B sono equipotenti scriviamo:

|A| = |B |

Se esiste una corrispondenza iniettiva da A in B diremo che A ha una potenza minore od eguale a quella di B (|A|<=|B|). Se A ha una potenza minore di B ed A è diversa da B diremo che A ha una potenza strettamente minore di A e scriviamo |A|<|B|

13. Quando un insieme viene detto infinito?

Quando lo si può mettere in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

14. Quando un insieme viene detto numerabile?

Quando è infinito ed è equipotente con l'insieme dei numeri naturali N

15. Quando un insieme ha la potenza del continuo?

Quando è equipotente con l'insieme dei numeri reali R.

16. Quali sono le principali proprietà relative alla potenza di un insieme?

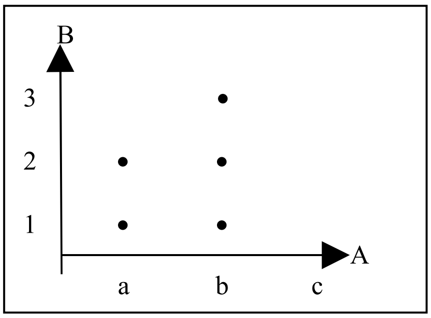
- Se A è un sottoinsieme di B allora |A|<=|B|.
- Se B è numerabile ed $A \subseteq B$ allora A è finito oppure numerabile.
- Ricordiamo che con P(A) indichiamo l'insieme potenza di A, ovvero l'insieme dei sottoinsiemi di A. Si ha |A|<|P(A)| per ogni insieme A. Ovvero la cardinalità di un insieme è sempre strettamente minore della cardinalità del suo insieme potenza.
- La cardinalità dell'insieme dei numeri naturali è strettamente minore della cardinalità dell'insieme dei numeri reali, ovvero: |N|<|R|
- IPOTESI DEL CONTINUO: Se A è numerabile e B è continuo ed $A \subseteq B \subseteq C$, allora B è numerabile o continuo.
- L'insieme Q dei numeri razionali è numerabile.
- Se A è finito e B infinito allora la cardinalità del prodotto scalare $A \times B$ coincide con la cardinalità di B
- Se A1,A2,..An sono numerabili allora il prodotto scalare $A1 \times A2 \times \ldots An$ è numerabile. Lo stesso per l'insieme unione.
- In analogia se A1,A2,..An sono continui allora il prodotto scalare degli insiemi e l'unione degli insiemi sono continui.
- Se A è infinito allora $|A|=|A \times A|$
- Se A,B sono infiniti ed equipotenti allora la potenza dell'unione è uguale alla potenza di ciascun insieme.
- L'insieme I=[0,1] costituito da tutti i numeri reali dell'intervallo [0,1] è continuo (cioè ha la potenza del continuo).

RELAZIONI

1. Cos'è una relazione?

Dati due insiemi A,B , detti rispettivamente Dominio e Codominio, una relazione R è un qualsiasi sottoinsieme del prodotto scalare $A \times B$, ovvero è un insieme di coppie ordinate del tipo (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$.

Ad esempio se $A=\{a,b,c\}$ e $B=\{1,2,3\}$ una possibile relazione è l'insieme delle seguenti coppie ordinate: $R=\{(a,1), (a,2),(b,1,),(b,2),(b,3)\}$.
Tale relazione è rappresentabile con un grafico del tipo:



Il grafico è stato ottenuto associando ogni elemento di A con un punto dell'asse A, e ogni elemento di B con un punto dell'asse B. Ogni punto del grafico è allora associabile ad una coppia ordinata (x,y) con x appartenente ad A ed y appartenente a B.

Se R è una relazione sull' insieme $A \times B$ scriviamo aRb per indicare che la coppia ordinata (a,b) appartiene ad R.
Notare che le funzioni sono particolari relazioni. Nelle funzioni non accade mai che ci sia qualche elemento $a \in A$ che non sia associato a qualche elemento di b. Inoltre non accade mai che qualche elemento $a \in A$ sia associato a più elementi di B.
Quella indicata dal grafico precedente non è una funzione, dal momento che l'elemento c di A non è associato ad alcun elemento di B ed inoltre l'elemento a è associato a due elementi di b e l'elemento b è associato addirittura a tre elementi di B.

2. Cos'è una relazione inversa?

Data la relazione R_{AB} , la relazione inversa R^{-1} è la relazione appartenente a $B \times A$ costituita da tutte le coppie (b,a) tali che $(a,b) \in R$.

3. Cos'è la relazione diagonale su A?

E' la relazione Δ costituita da tutte le coppie (a,a) essendo $a \in A$

4. Come è definita la composizione fra relazioni?

Se R_{AB} è una relazione fra gli insiemi A,B ed S_{BC} è una relazione fra B e C, la composizione fra R ed S (ovvero $R \bullet S$)è l'insieme delle coppie (a,c), con $a \in A$ e $c \in C$, tali che esiste un $b \in B$ tale che $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in S$

5. Quando una relazione R gode della proprietà riflessiva?

Se per ogni $a \in A$ la coppia $(a,a) \in R$

6. Quando R gode della proprietà di simmetria?

Quando se $(a,b) \in R$ anche (b,a) appartiene ad R

7. Quando R gode della proprietà di antisimmetria?

Quando per ogni $(a,b) \in R$,con $a \neq b$, la coppia (b,a) NON appartiene ad R.

8. Quando gode della proprietà transitiva?

Se le coppie (a,b) e (b,c) appartengono alla relazione, allora anche la coppia (a,c) deve appartenere alla relazione.

9. Cos'è una relazione di equivalenza sull'insieme A?

E' una relazione su $A \times A$ che gode delle proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva.

10. Cos'è una partizione di un insieme?

E' una famiglia P_i di insiemi disgiunti fra loro, tali che l'unione dei P_i è uguale ad A.

11. Cos'è una classe di equivalenza di un elemento $a \in A$?

E' l'insieme, indicato con [a] di tutti gli elementi della classe A che sono in relazione con a.

Esempio:
Consideriamo una relazione di equivalenza sull'insieme A={1,2,3}
Tale relazione potrebbe essere l'insieme formato dalle seguenti coppie:
R={(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(1,3)}
Notiamo infatti che tale relazione gode delle proprietà

- riflessiva (per ogni elemento di a allora (a,a) appartiene alla relazione)
- simmetrica (se (1,2) appartiene ad R, anche (2,1) appartiene ad R.
- transitiva (se (1,2) e (2,3) appartengono ad R, allora anche (1,3) appartiene ad R

La classe di equivalenza dell'elemento 1 è [1]={1,2,3}
La classe di equivalenza dell'elemento 2 è [2]={2,1,3}
Notiamo che l'insieme [2] è uguale all'insieme [1], poiché possiede gli stessi elementi.
Infine la classe di equivalenza dell'elemento 3 è: [3]={3}
L'insieme avente per elementi le classi di equivalenza di una relazione di equivalenza è detto insieme quoziente (ed indicato con A/R).
Nel caso della relazione precedente l'insieme quoziente è
A/R= A partizionato da R={[1],[3]}
Notare che nell'insieme quoziente, come in tutti gli insiemi, non vi sono elementi ripetuti.
Perciò non abbiamo inserito [2] dato che [2]=[1].

12. In che senso una relazione di equivalenza su A fornisce una partizione dell'insieme A?

Nel senso che se consideriamo due elementi a,b di A e consideriamo le classi di equivalenza [a], [b] tali insiemi sono uguali oppure che sono disgiunti.
Inoltre l'unione di tutte le classi di equivalenza degli elementi $a_1,a_2,..a_n$ di A, ovvero $[a_1]U[a_2]U[a_3]....U[a_n]$ fornisce proprio l'insieme A.

Infatti consideriamo la classe di equivalenza dell'elemento 1, ovvero [1].
Se tale classe contiene l'elemento 2, allora [2] deve contenere l'elemento 1 (per la simmetria)
Viceversa se 2 non appartiene ad [1] allora [2] non può contenere l'elemento1.

Considerando solo le classi di equivalenza distinte si ha allora che la loro unione fornisce l'insieme A di partenza e che tali insiemi sono disgiunti. Ovvero costituiscono una partizione di A.

13. E’ lecito dire che ogni partizione su A definisce una relazione di equivalenza?
Si. Basta dire che sono in relazione tutti gli elementi che sono nello stesso insieme.
Ad esempio dato l’insieme A={1,2,3,4,5} definiamo la partizione P={ {1}, {2,3}. {4,5} }
La relazione transitiva è
R={ (1,1) (2,2) (3,3) (4,4) (5,5) (2,3) (3,2) (4,5) (5,4) }
Tale relazione è riflessiva (per ogni a$\in$A la coppia (a,a) è in R)
Simmetrica: se(a,b) sono in relazione, anche (b,a) sono in relazione
Transitiva: Se (a,b) e (b,c) sono in relazione allora anche (a,c) sono in relazione. Nel nostro caso non accade mai che vi siano due coppie del tipo (a,b) e (b,c).
Le classi di equivalenza sono:
[1]={1}
[2]={2,3}
[3]={2,3}
[4]={4,5}
[5]={4,5}
Quelle distinte sono {1},{2,3},{4,5} e costituiscono la partizione di A da cui siamo partiti.

14. Cos’è l’insieme quoziente di una relazione di equivalenza R?
E’ l’insieme costituito che costituisce la partizione di A individuata dalla relazione di equivalenza R. Viene indicato con A/R (A partizionato da R)

15. Cos’è la funzione canonica ?

Consideriamo una qualsiasi funzione F:A$\rightarrow$B.
Consideriamo la partizione di A che si ottiene raggruppando nello stesso insieme P_i gli elementi di A che hanno la stessa immagine.
Tale partizione individua, per quanto detto prima, una relazione di equivalenza R.
(due elementi di a sono in relazione R se hanno la stessa immagine: la relazione è sicuramente riflessiva, simmetrica e transitiva)
La funzione che ad ogni a $\in$A associa l’insieme quoziente di a, ovvero l’insieme di tutti i punti che hanno la stessa immagine) è detta funzione canonica. Tale funzione viene indicata con π(A)

ESEMPI
Sia A={a,b,c,d} e siano R={(a,b) (b,b) (c,a) (d,b)}
S={(a,a) (a,b) (a,c) (c,c) (b,d)} due relazione su A.
1) Determinare R•S (composizione di R ed S)
Soluzione:
Si è detto che R•S è l’insieme di tutte le coppie (a,c) tali che per qualche b si ha: (a,b)$\in$R (b,c)$\in$S.

Allora R•S={(a,d), (b,d)(c,a) (c,b) (c,c) (d,d) }
2) Determinare la composizione S•R.
Tale composizione è l’insieme delle coppie (a,c) tali che per qualche b sia (a,b)$\in$S (b,c)$\in$R
S•R={(a,b) (a,a) (c,a) (b,b)}

3) Determinare R^{-1}

R^{-1}, inversa di R, è la relazione {{(b,a) (b,b) (a,c) (b,d)}}

6) determinare $R \cap S$ (R intersezione S)

Occorre individuare gli elementi comuni agli insiemi R ed S. L'unico elemento comune è (a,b). Allora $R \cap S$={(a,b)}

^^

ORDINAMENTI

1. Quando una relazione viene detta relazione d'ordine?

Una relazione si dice d'ordine quando è riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Per indicare che A è ordinato dalla relazione d'ordine $\leq$ scriviamo $(A,\leq)$.

La proprietà di antisimmetria significa che per ogni coppia x,y per cui valga $x\leq y$, vale anche $y\leq x$ solo se x=y. Ovvero se vale $x\leq y$ ed x è diversa da y allora non vale $y\leq x$.

L'usuale relazione d'ordine $\leq$ sull'insieme degli interi relativi Z è una relazione d'ordine, infatti essa gode della proprietà di riflessività, antisimmetria e transitività.

La relazione a|b (a divide b) su N* (naturali senza lo zero) è una relazione di ordine (per ogni $x\in$ N* si ha la riflessività, l'antisimmetria e la transitività della relazione)

La relazioni sull'insieme delle parti P(A) data da $a\subseteq b$ è una relazione d'ordine.

2. Quando due elementi di un insieme $(A,\leq)$ sono confrontabili?

Gli elementi x,y appartenti ad $(A,\leq)$ sono confrontabili quando vale una delle due: $x\leq y$ oppure $y\leq x$

3. Quando un insieme A è totalmente ordinato ?

Quando esiste una relazione d'ordine su A e quando due qualsiasi elementi di A sono confrontabili secondo tale relazione.

Ad esempio l'insieme N non è totalmente ordinato per la relazione a|b (a divide b) poiché non tutte le coppie (x,y) sono confrontabili (la coppia 0,0 non è confrontabile, cioè non si può dire se vale 0 divide 0)

4. Quando un elemento m di un insieme ordinato $(A,\leq)$ è detto minimo?

L'elemento m si dice minimo se vale la relazione $m\leq x$ per qualsiasi elemento x di A.

In analogia viene definito il massimo M ($x\leq M$, per ogni x appartenente ad A),

5. Quando un insieme è ben ordinato?

Quando ogni suo sottoinsieme ha un minimo.

6. Cosa sono il minorante e l'estremo inferiore?

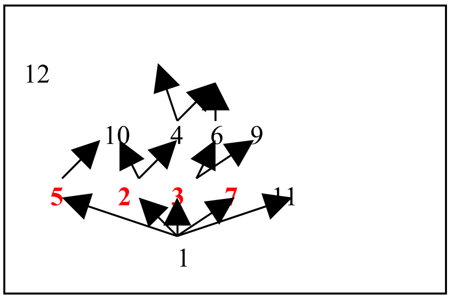
Sia $(A,\leq)$ un insieme ordinato e B un suo sottoinsieme.

Un elemento di A viene detto minorante di B se è $\leq$ rispetto qualsiasi elemento di B.

Naturalmente vi possono essere diversi minoranti. Viene detto estremo inferiore il massimo fra i minoranti. In analogia viene definito l'estremo superiore.

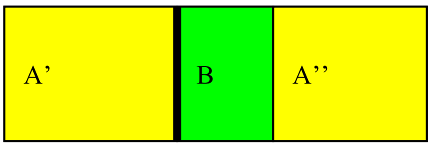
Consideriamo ad esempio un albero che rappresenti la relazione x|y (x divide y) sull'insieme A={1,2,3…12}

Tale albero è il seguente:



Da tale diagramma si vede che 1 è un elemento minimo , poiché vale 1|x per ogni x appartenete ad A.
Tolto l'elemento 1 gli elementi (5,2,7,11) sono minimali, poiché, tolto l'uno, non esiste alcun elemento di x∈A tale che x divida uno degli elemento minimali precedenti.

Le catene massimali sono {1,2,4,8} {1,2,4,12} {1,2,6,12} {1,3,6,12} {1,2,10} {1,3,9} {1,5,10} {1,7} {1,11}
se consideriamo il sottoinsieme S di A, dato dagli interi fra 2 e 7 gli elementi minimali di S sono 2,3,5,7 e non esiste minimo di S
S={2,3,5,7} è un sottoinsieme di A. L'unico minorante di S è 1
(i minoranti di un sottoinsieme B dell'insieme A sono quegli elementi che sono "minori" di ogni elemento di B)
Tale elemento è anche l'estremo inferiore di S in A.
L'insieme A non è completo poiché non ha massimo (non ha cioè alcun elemento che sia "maggiore" di tutti gli altri.

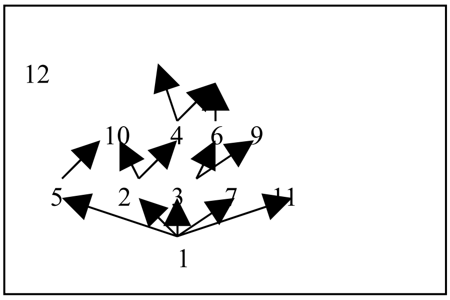


Ad esempio l'insieme A sia l'insieme dei punti colorati in giallo (figura). L'insieme B sia l'insieme dei punti colorati in verde.
La relazione p≤ q sia vera se l'ascissa di p è minore od uguale all'ascissa di q.
Allora tutti i punti dell'insieme A', ed i punti del bordo sinistro di B, sono dei minoranti di B secondo la relazione predetta. I punti del bordo sinistro, oltre ad essere dei minoranti sono anche punti di minimo per B, poiché appartengono a B.
I punti del bordo sinistro di B sono estremi inferiori di B poiché forniscono il massimo fra i minoranti di B.

7. Quando un insieme (A,≤) viene detto completo?
Quando ogni suo sottoinsieme ha un minimo ed un massimo.

ESEMPI:
Sia A l'insieme degli x razionali compresi nell'insieme $1<x\leq 4$.
Tale insieme è ordinato dalla usuale relazione ≤ fra numeri reali.
Studiamo tale relazione.
- e una relazione di ordine totale?
Due qualsiasi elementi di A devono essere confrontabili. Ciò accade.
- A ha un massimo ed un minimo?
A ha un massimo (4) ma non ha un minimo.
- A è ben ordinato?
No. Se si prende il sottoinsieme B = insieme degli elementi compresi fra 1 (escluso) e 2 (incluso) tale sottoinsieme non ha un minimo.
- Quali sono i minoranti di A in R.
A è un sottoinsieme di R. Minoranti sono quegli elementi di R minori di qualsiasi elemento di A. Cioè i numeri reali minori od uguali ad 1.
Segue che 1 è l'estremo inferiore essendo il massimo fra i minoranti
- A è completo?
Un insieme è completo quando ogni suo sottoinsieme ha un minimo ed un massimo. L'insieme A non è completo poiché non ha un minimo.

^^
Esempio 2:
Sia dato l'insieme A dato dagli interi fra 1 e 12 (estremi inclusi).
La relazione d'ordine sia $a\leq b \Leftrightarrow$ a divide b.
Studiamo tale relazione. Tracciamo il diagramma della relazione:



si vede che 1 è un minimo. Togliendo da A tale elemento gli elementi minimali sono2,3,5,7,11. Togliendo ancora tali elementi gli elementi minimali sono 4,6,9,10.
allora il minimo è 1 e non esiste il massimo poiché nessun numero divide tutti i numeri rimanenti.
Gli elementi 10,8,12,9,7,11 sono massimali distinti (sono punti massimi di una catena del tipo: $a_1|a_2|a_3\ldots|a_n$)

Esempio 3
Su N sia definita la relazione $x \leftarrow y$ se e solo se $x\leq y$ ed x,y hanno lo stesso numero di cifre.

- dimostrare che è una relazione d'ordine
Essa è riflessiva (x è minore od oguale a se stesso ed ha lo stesso numero cifre)
E' anche antisimmetrica (Se $x<=y$ ed $x\neq y$, non vale $y<=x$)
E' anche transitiva ($x<=y$ ed $y<=z$ implica $x<=z$)
- E' ben ordinato?
Ogni suo sottoinsieme deve avere un minimo.
Il che significa che esiste un x appartenente al sottoinsieme tale che x<= ad ogni elemento dell'insieme. Ma ciò non accade ad esempio per l'insieme $\{2,14\}$
Infatti 2 e 14 non sono confrontabli.
- Quali sono gli elementi minmali?
Sono i più piccoli fra quelli aventilo stesso numero di cifre (1,10,100.)
I massimali sono i più grandi fra quelli aventi lo stesso numero di cifre (9,99,999…)
Poiché vi sono più elementi minimali e più elementi massimali, non vi è né un minimo, né un massimo.

^^^¡^^^^^

RETICOLI

1. Cos'è un reticolo?

Un insieme ordinato $(R,\leq)$ è un RETICOLO se tutti gli insiemi del tipo $\{x,y\}$ con x,y che soddisfano alla relazione R, hanno estremo superiore ed inferiore in R.

Ad esempio l'insieme dei naturali, ordinato dalla ordinaria relazione $\leq$ è un reticolo.

(dati due interi non necessariamente consecutivi, x, y, tali che $x\leq y$ allora x è l'estremo inferiore (è minore od uguali a tutti i numeri dell'insieme $\{x,x+1,x+2,\dots y\}$) ed y è l'estremo superiore.

Anche l'insieme N ordinato dalla relazione | è un reticolo. ($x|y\equiv$x divide y)

Dato un reticolo R indichiamo con $x\uparrow y$ l'estremo INFERIORE dell'insieme $\{x,y\}$
Dati due interi x,y che soddisfano alla relazione d'ordine $x|y$, l'estremo inferiore $x\uparrow y$ è il MCD fra i due numeri.
Se $x\uparrow y$ è l'estremo inferiore fra x ed y si ha
$x\uparrow y\leq x$ ed $x\uparrow y\leq y$

L'insieme delle parti P(A) ordinato dalla relazione "essere incluso" è un reticolo.
L'estremo inferiore a due qualsiasi elementi x,y appartenenti a P(A) si ottiene intersecando x ed y

2. Cosa afferma il principio di dualità?

Se P è una proposizione vera per un qualsiasi reticolo, la proposizione duale, ottenuta scambiando >= con <= e ↑ con ↓ è anch'essa vera per qualsiasi reticolo.
Alcune proprietà vere per ogni reticolo sono:
1) x↓y= y↓x (commutatività)
2) x↓(y↓z)=(x↓y) ↓z (associatività)
3) x↓(x↑z)=x (assorbimento)

3. Quando un reticolo viene detto distributivo?

Quando vale la proprietà distributiva:
x↑(y↓z)=(x↑y)↓(x↑z)

4. Quando un reticolo viene detto limitato?

Quando possiede sia un minimo (che viene indicato con 0) che un massimo (che viene indicato con 1).

5. Cos'è il complemento di un elemento a di un reticolo limitato?

E' un elemento b tale che a↑b=0 (estremo inferiore uguale al minimo del reticolo)
ed a↓b=1 (estremo superiore uguale al massimo del reticolo)

6. Come viene detto un reticolo distributivo complementato?

Viene detto reticolo di Boole.