1 I NUMERI COMPLESSI

IL PROBLEMA DELLA RADICE QUADRATA DI –1

E' noto che l'insieme Z^- dei numeri interi negativi è stato introdotto per avere la possibilità di risolvere il seguente problema:

Dato un numero naturale a, ed un numero naturale b<a, trovare un numero che sommato ad a fornisca b.

Tale problema equivale a risolvere l'equazione:

$$a+x=b$$

nel caso generale, e quindi anche nel caso in cui b sia minore di a.
E' evidente che in tal caso l'equazione non presenta alcuna soluzione nell'ambito dei numeri naturali $N=\{0,1,2,3\ldots\}$. Viceversa se estendiamo l'insieme dei numeri introducendo l'insieme dei numeri interi negativi $Z^-=\{-1, -2, -3\ldots\}$ vediamo che l'equazione precedente è perfettamente risolubile.

Ad esempio se a=5 e b=2 si ha:
$5+x=2 \Rightarrow x=-3$

Analogamente l'insieme dei numeri razionali Q è stato introdotto per potere risolvere l'equazione

$$ax=b$$

nel caso generale, e quindi anche quando b non sia un multiplo di a. E' evidente che in quest'ultimo caso l'equazione non presenta alcuna soluzione nel campo dei numeri interi.

Ad esempio se a=5 e b=2 non esiste alcun numero intero x tale che 5x=2. Viceversa se si estende il dominio dei numeri fino a comprendere anche le frazioni, ovvero numeri della forma a/b con a,b interi, allora l'equazione precedente ha soluzione x=2/5

Tutti i numeri che possono essere posti nella forma a/b, con a,b interi, sono detti RAZIONALI.
Poiché ogni numero intero a può essere scritto in forma di frazione (a=a/1), ne segue che i numeri razionali sono una estensione degli interi, ovvero un loro soprainsieme proprio.

Tuttavia i matematici pitagorici scoprirono che non tutti i numeri possono essere messi nella forma a/b. Ad esempio l'equazione

$$x^2=2$$

non ammette alcuna soluzione nel campo razionale.

Il perché è presto detto: Sia x=a/b, con a,b interi. Si hanno le seguenti possibilità: (p significa pari, d significa dispari)

	a	b
1	p	p
2	p	d
3	d	p
4	d	d

Il primo caso possiamo escluderlo, perché se fosse $x=\frac{p}{p}$ *dividendo successivamente per 2 sia il numeratore che il denominatore possiamo ricondurci ad uno degli altri tre casi. Il secondo caso,* $x=\frac{p}{d}$ *, dato che* $x^2=2$*, comporta:* $\frac{p^2}{d^2}=2$ *, ed essendo ogni numero pari un multiplo di 2, possiamo porre p=2k. Allora* $\frac{4k^2}{d^2}=2, \Rightarrow \frac{2k^2}{d^2}=1, \Rightarrow 2k^2=d^2$*. La precedente è impossibile, poiché a primo membro si ha un numero pari mentre a secondo membro si ha un numero dispari. In modo del tutto analogo si procede per dimostrare che sono impossibili anche gli altri due casi.*

Per consentire che equazioni del tipo precedente abbiano una soluzione si sono introdotti i numeri IRRAZIONALI. Ad esempio l'equazione precedente si ammette che abbia soluzione $x=\sqrt{2}$ **, definendo con questo simbolo quel numero il cui quadrato vale 2.**

L'insieme dei numeri razionali ed irrazionali viene detto insieme dei numeri REALI, ed indicato con R. Tuttavia i matematici si sono accorti che anche introducendo i numeri reali vi erano equazioni che non ammettevano soluzioni. Ad esempio:

$$\boxed{x^2=-1}$$

Ma i matematici sono persone che non si arrendono facilmente. Ed allora si sono detti: perché, per risolvere l'equazione precedente non adottiamo la stessa strategia che abbiamo adottato per la risoluzione della equazione $x^2=2$ **?**
In quel caso abbiamo allargato l'insieme dei numeri, introducendo dei nuovi numeri che avessero proprio la proprietà che occorreva, e li abbiamo indicati con i simboli $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$,...

Anche in questo caso introduciamo un nuovo numero che abbia la proprietà di risolvere l'equazione : $x^2=-1$, e lo indichiamo con i
Il numero i ha allora la proprietà:

$$\boxed{i^2=-1}$$

ed è detto unità immaginaria.
La precedente possiamo anche scriverla in questo modo:

$$\boxed{i=\sqrt{-1}}$$

convenendo, come si è detto, che la scrittura $a=\sqrt{b}$ significhi proprio $a^2=b$.

L'introduzione della unità immaginaria ci consente di risolvere immediatamente non solo l'equazione $x^2=-1$, ma anche tutte le equazioni del tipo

$$x^2=-a^2$$

Infatti scrivendo la precedente nella forma $x^2=(-1)(a^2)$ e prendendo la radice dei due membri si ha:

$$x=\sqrt{-1}\bullet a \Rightarrow x=i\bullet a$$

Possiamo dare un nome ai numeri che risolvono le equazioni del tipo $x^2=-a^2$ chiamandoli, con un po' di immaginazione, numeri immaginari. Allora:

I numeri immaginari sono numeri della forma a•i, essendo a un numero reale ed i l'unità immaginaria.

2 ASSE IMMAGINARIO E PIANO DI GAUSS

E' noto che i numeri reali possono mettersi in corrispondenza biunivoca con i punti di un'asse detto ASSE REALE.
Perché non facciamo la stessa cosa con i numeri immaginari?
Ovviamente essendo i numeri immaginari oggetti essenzialmente diversi dai numeri reali, li metteremo in corrispondenza con i punti di un altro asse detto ASSE IMMAGINARIO.

Notiamo che se il modulo a di un numero immaginario è zero il prodotto a•i vale zero. Per cui l'origine dei due assi, reale ed immaginario, coincide.
E' conveniente disegnare i due assi, reale ed immaginario, perpendicolari fra loro.

Il piano cartesiano precedente, costituito dai due assi: Re (asse reale) in relazione coi numeri reali, ed Im (asse immaginario) in relazione coi numeri immaginari, viene detto piano di Gauss o piano complesso.
Si conviene, naturalmente, che ogni punto a dell'asse immaginario sia in relazione biunivoca col numero immaginario $a \bullet i$

3 NUMERI COMPLESSI

A questo punto i matematici si sono detti: l'uso dei numeri immaginari ci ha consentito di risolvere equzioni del tipo: $x^2=-a^2$, ovvero $x^2+a^2=0$.
Consideriamo allora l'equazione $x^2+2bx+c=0$. Tale equazione (equivalente ad una generica equazione di secondo grado) ha soluzioni:

$$\boxed{x_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c}}$$

Infatti $x^2+2bx+c=0 \Rightarrow x^2+2bx=-c \Rightarrow x^2+2bx+b^2=b^2-c \Rightarrow (x+b)^2= b^2-c \Rightarrow x+b=\pm\sqrt{b^2-c} \Rightarrow$ $x=-b\pm\sqrt{\Delta}$, essendo $\Delta=b^2-c$ un numero noto come discriminante dell'equazione di secondo grado scritta nella forma $x^2+2bx+c=0$.

E' possibile che i numeri immaginari ci consentano di risolvere l'equazione anche nel caso in cui il discriminante Δ sia negativo?
Possiamo scrivere $\Delta=-(-\Delta)$. Allora si ha $x=-b\pm\sqrt{-(-\Delta)}=\sqrt{-1}\bullet\sqrt{-\Delta}=-b\pm i\bullet\sqrt{-\Delta}$
Notiamo che, se Δ è negativo, allora $-\Delta$ è positivo. Quindi $\sqrt{-\Delta}$ è un numero reale d.

Abbiamo ottenuto allora, come soluzione dell'equazione di secondo grado con discriminante negativo, numeri del tipo $-b\pm i\bullet d$, dati dalla somma di un numero reale $(-b)$ sommato (o sottratto) ad un numero immaginario (id).

Non ci rimane che dare un nome a tali numeri. Li chiameremo <u>NUMERI COMPLESSI</u>, in quanto risultano appunto dalla somma (ovvero dal complesso) di due tipi di numeri, quelli reali e quelli immaginari.

Riassumendo:

Un numero complesso è un numero della forma:

$$a+ib$$

dove a è detta parte reale, e b è detta parte immaginaria.

Come si vede:

I numeri complessi risultano una <u>estensione dei numeri reali</u>, poiché quando la parte immaginaria b è zero il numero complesso si riduce ad un numero reale.

.

L'estensione delle normali operazioni algebriche ai numeri complessi è immediata. Si desidera naturalmente mantenere le normali proprietà associativa, commutativa e distributiva del prodotto rispetto alla somma.
Allora:

1) **Dati i numeri complessi $V_1=a_1+ib_1$, $V_2=a_2+ib_2$, la somma si calcola semplicemenete con:**
$V_1+V_2=a_1+ib_1+a_2+ib_2=a_1+a_2+ib_1+ib_2=a_1+a_2+i(b_1+b_2)$

$$\boxed{V_1+V_2=a_1+a_2+i(b_1+b_2)}$$

Es: $2+3i+3+4i=5+7i$

2) **La differenza si calcola in modo analogo.**

Es: $2+3i-(3+4i)=-1-i$

3) **Il prodotto si calcola utilizzando le normali regole dell'algebra (prodotto di binomi) con l'utilizzo della proprietà: $i^2=-1$.**

Segue: $(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=a_1a_2+ia_1b_2+ib_1a_2+i^2b_1b_2= a_1a_2+i\,a_1b_2+i\,b_1a_2-b_1b_2$

$$\boxed{V_1\bullet V_2=a_1a_2-b_1b_2+i(a_1b_2+b_1a_2)}$$

Es: $(2+3i)(3+4i)=6+8i+9i-12=-6+17i$

4) **Per il calcolo del rapporto notiamo che $(a+ib)(a-ib)=a^2-i^2b^2=a^2+b^2$.**

Questa è una proprietà molto interessante, perché consente di passare da un numero complesso ad un numero reale. Diamo allora un nome al numero complesso a–jb.

lesso V=a+ib, diciamo <u>CONIUGATO</u> di V il numero complesso a–ib

Allora se si desidera calcolare il rapporto fra $V_1=a_1+ib_1$ e $V_2=a_2+ib_2$, ovvero se si desidera calcolare $\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}$ basterà moltiplicare per il coniugato del denominatore, ottenendo:

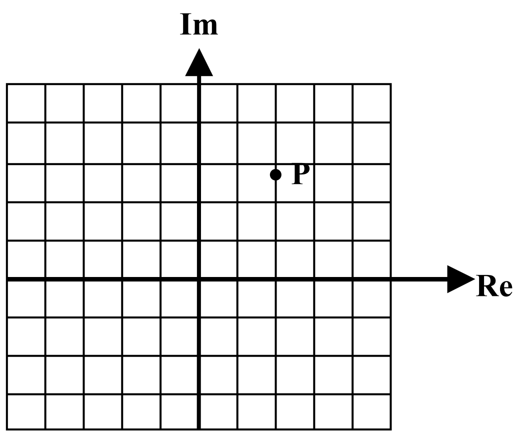
$$\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}\bullet\frac{a_2-ib_2}{a_2-ib_2}=\frac{a_1a_2-ia_1b_2+ib_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2+i(b_1a_2-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$$

$$\boxed{\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{a_1a_2+b_1b_2+i(b_1a_2-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}}$$

Es: $\frac{2+3i}{3+4i}=\frac{2+3i}{3+4i}\;\frac{3-4i}{3-4i}=\frac{6-8i+9i+12}{9-12i+12i+16}=\frac{18+i}{25}=\frac{18}{25}+i\frac{1}{25}$

4 RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI NUMERI COMPLESSI

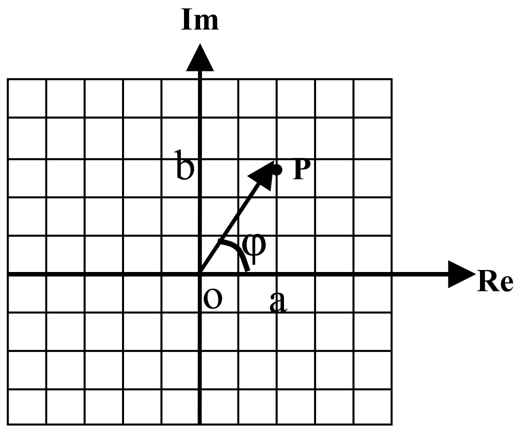
Il piano di Gauss ci consente di effettuare una comoda rappresentazione grafica dei numeri complessi. Infatti per rappresentare un numero del tipo a+ib su tale piano è immediato associarlo al punto di coordinate a,b. Ad esempio il numero complesso V=2+3i sarà associato al punto P indicato in figura:



Viceversa dato un punto qualsiasi del piano complesso, la sua ascissa ci fornirà la parte reale del numero complesso associato al punto, la sua ordinata ci fornirà la parte immaginaria del numero.

5 RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE DI UN NUMERO COMPLESSO

La rappresentazione di un numero complesso V=a+ib mediante un punto P sul piano complesso ci consente di associare il numero V al vettore $\overrightarrow{OP}$ che congiunge l'origine degli assi col punto P.



Tale rappresentazione è molto comoda, perché ci consente di definire il MODULO e l'ARGOMENTO di un numero complesso:

Definiamo MODULO m del numero complesso V=a+ib, il MODULO del VETTORE associato al numero complesso sul piano di Gauss. Utilizzando il teorema di Pitagora si ottiene:

$$m=|V|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Definiamo ARGOMENTO del numero complesso V=a+ib, l'argomento φ del VETTORE associato al numero complesso sul piano di Gauss, ovvero l'angolo formato da tale vettore con l'asse reale positivo.

Si ha:

$$\begin{cases} \varphi=\arctan(b/a) & \text{se } a\geq 0 \\ \varphi=\arctan(b/a)+180° & \text{se } a<0 \end{cases}$$

Nella precedente arctan è la funzione inversa della tangente, talora indicata con $\tan^{-1}$.

Indicando con m il modulo del numero complesso V=a+ib, e con φ il suo argomento si trova

$$\begin{array}{l} a=m\cos(\varphi) \\ b=m\sin(\varphi) \end{array}$$

6 FORMA TRIGONOMETRICA DI UN NUMERO COMPLESSO

Utilizzando le precedenti espressioni per a,b possiamo scrivere un numero complesso V nella seguente forma, detta forma <u>TRIGONOMETRICA</u>:

$$\boxed{V=m[\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)]}$$

Questa forma è particolarmente utile, perché ci consente di effettuare facilmente il prodotto di due numeri complessi:

$$\begin{aligned} V_1 \bullet V_2 &= m_1[\cos(\varphi_1+i\sin(\varphi_1)\bullet m_2[\cos(\varphi_2)+i\sin(\varphi_2)]= \\ &\quad m_1m_2[\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)+i\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2)+i\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)-\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)]= \\ &\quad m_1m_2[\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)-\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)+i(\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2)+\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2))] \end{aligned}$$

Ovvero, utilizzando le note formule di trigonometria (somma di archi) :

$$\boxed{V_1 \bullet V_2 = m_1m_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]}$$

La precedente mostra che il prodotto di due numeri complessi è un numero complesso che ha <u>come modulo il prodotto dei moduli</u>, e <u>come argomento la somma degli argomenti</u>.

Per quanto riguarda il RAPPORTO fra numeri complessi, essendo questo l'operazione inversa rispetto al prodotto, si avrà:

Il RAPPORTO di due numeri complessi è un numero complesso che ha <u>come modulo il rapporto dei moduli</u>, e <u>come argomento la differenza degli argomenti</u>.

Es: Sia $V=\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{2+3i}{3+4i}$. **Si ha:** φ_1**=arctan(3/2)=56,3°;** φ_2**=arctan(4/3)=53.1°**

Da cui: $\varphi=\varphi_1-\varphi_2=3.2°$

Si noti che in precedenza avevamo ricavato: V=$\dfrac{18}{25}+i\dfrac{1}{25}$**, da cui** φ**=arctan(1/18)=3.18°, risultato compatibile col precedente, a meno delle inevitabili approssimazioni.**

7 FORMULA DI DE MOIVRE E RADICI ENNESIME DELL'UNITA'

La formula del prodotto ricavata nel paragrafo precedente:

$$V_1\bullet V_2=m_1m_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

applicata al caso $V_1=V_2=V$ **fornisce:** $V^2=m^2[\cos(2\varphi)+i\sin(2\varphi)$.
Moltiplicando ancora per V, si trova $V^3=m^3[\cos(3\varphi)+i\sin(3\varphi)]$
Ed, in generale (n≥1) $V^n=m^n[\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)]$

<u>Se il numero complesso V ha modulo unitario</u>, cioè se si trova, nel piano di Gauss, su una circonferenza centrata sull'origine e di raggio unitario, si ottiene:

$$\boxed{V^n=\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)}$$

Potenza ennesima di un numero complesso di modulo unitario.

La precedente è detta <u>FORMULA DI DE MOIVRE</u>; e consente di ricavare facilmente le <u>radici ennesime</u> dell'unità. Ricerchiamo le soluzioni dell'equazione $x^n=a$**, essendo a un numero reale. Ricercando per x una soluzione complessa, ovvero una soluzione del tipo** $x=m[\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)]$**, si ha:** $x^n=m^n[\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)]$**. Allora:**

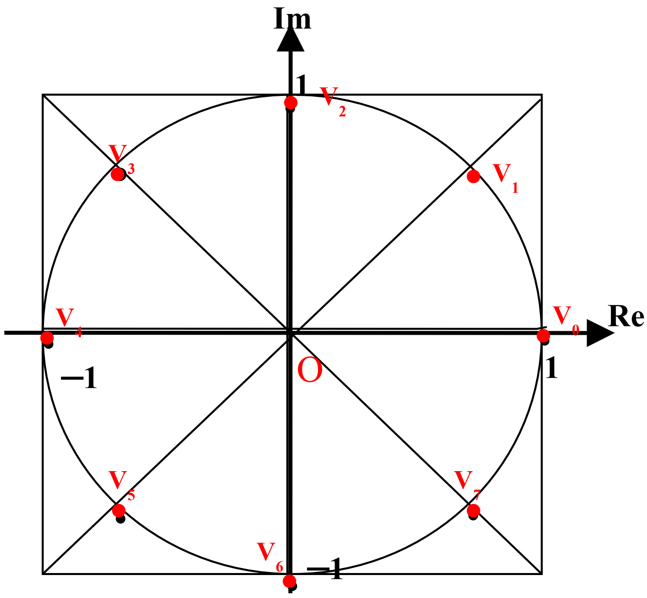
$$m^n[\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)]=a$$

I moduli dei due membri devono essere uguali. Segue che $m^n=a$**, ovvero** $m=\sqrt{a}$**. Inoltre, poiché il secondo membro è un numero reale anche il primo membro dovrà esserlo. Segue che** $\sin(n\varphi)$ **deve annullarsi. <u>Ciò accade sicuramente quando</u>** $\varphi=\varphi_0=0$ **<u>(prima soluzione).</u>**

Ma accade anche quando nφ=360. Infatti il seno di 360° è nullo. Ovvero accade per $\varphi=\varphi_1=360/n$. Accade anche per $\varphi=\varphi_2=2\bullet 360/n=2\bullet\varphi_1$. Accade anche per $3\varphi_1$ e così via. Quanti sono gli angoli diversi fra loro che soddisfano la relazione cercata? φ_1 si ottiene dividendo l'angolo giro per n (indice della radice). Allora $n\varphi_1=360$. Dopo avere sommato n angoli pari a φ_1 si torna al punto di partenza. Il numero di angoli diversi fra loro è allora n–1. A ciascuno di tali angoli corrisponde una radice diversa del numero a. Considerando allora anche la radice con $\varphi=0$ (radice reale) si deduce che

Le radici ennesime del numero reale a, nel campo complesso, sono n. Tali radici giacciono su una circonferenza di raggio $\sqrt[n]{a}$ e formano fra di loro un angolo pari a 360°/n. La prima di tali radici è reale.

In figura sono ad esempio mostrate, con dei punti in colore, le radici ottave di 1



Tali radici, sono

0) 1
1) $\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2$
2) **i**
3) $-\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2$
4) **–1,**
5) $-\sqrt{2}/2-i\sqrt{2}/2$
6) **–i**
7) $\sqrt{2}/2-i\sqrt{2}/2$

Nota

Qual è l'importanza delle radici ennesime dell'unità?
Si verifica facilmente che tale insieme forma un GRUPPO rispetto alla moltiplicazione fra numeri complessi. Infatti:
1)L'operazione di moltiplicazione fra complessi è associativa ed inoltre è interna al gruppo, ovvero dati due qualsiasi a,b appartenenti al gruppo, il prodotto ab appartiene al gruppo.
2) Esiste l'elemento neutro, ovvero quell'elemento u che moltiplicato per un qualsiasi elemento a del gruppo dà come risultato a. Tale elemento è la radice $V_0=1$.
3)Ogni elemento a ha il suo inverso. Ovvero per ogni a esiste un elemento b tale che ab=u. L'inverso di a viene indicato con a^{-1}. Ad esempio dato l'elemento $V_1=$ l'inverso è $v_1^{-1}=v_7=$
Infatti $V_1 \cdot V_7=2/4+2/4=1$.

8 FORMULA DI EULERO E FORMA ESPONENZIALE DI UN NUMERO COMPLESSO

Una delle più belle formule della matematica è la seguente, nota come formula di Eulero:

$$\boxed{e^{i\varphi}=\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)}$$

La giustificazione di tale formula utilizza l'importante formula di Mac Lauren, dimostrata in altra parte del testo, che consente di espandere in serie una funzione indefinitamente derivabile, come segue:

$$f(x)= f(0)+ x\, f'(x)+ \frac{x^2}{2!} f''(x)+ \frac{x^3}{3!} f'''(x)+ \ldots$$

Nella precedente f(0) indica il valore di f(x) per x=0; f'(x) indica la derivata prima di f(x), f''(x) indica la derivata seconda e così via. Il punto esclamativo indica, come al solito, il fattoriale di un numero, ovvero il prodotto di tutti i naturali compresi fra 1 ed il numero.
Utilizzando la precedente si ricava:

1) $e^x = 1+ x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \ldots$

2) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

3) $sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$

Dalle precedenti si ottiene:

1') $e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$

2') $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

3') $i\,sin(x) = ix - i\frac{x^3}{3!} + i\frac{x^5}{5!} - i\frac{x^7}{7!} \ldots$

(abbiamo tenuto in conto che i^2=–1, i^3=–i, i^4=(–1)(–1)=1, …)

Come si vede sommando i secondi membri delle ultime due si ottiene il secondo membro della prima. Questo significa che anche la somma dei primi membri delle ultime due deve essere uguale al primo membro della prima. Il teorema è allora dimostrato.

Utilizzando la formula di Eulero un numero complesso:

V=m [cos(φ)+i sin(φ)] può allora mettersi nella forma:

$$\boxed{V = me^{i\varphi}}$$

forma esponenziale di
un numero complesso

Nella precedente m è il modulo del numero complesso e φ è il suo argomento.

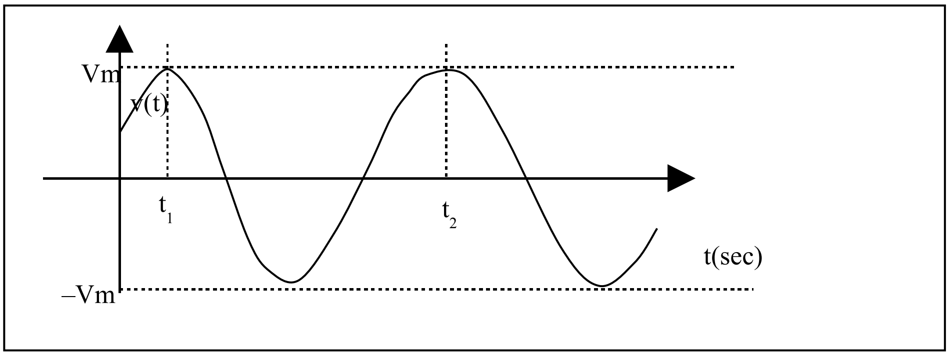
9 UTILITA' DEI NUMERI COMPLESSI

L'utilità dei numeri complessi è illimitata, sia nel campo della matematica pura che nel campo della matematica applicata, ovvero nel campo della tecnica. Nel campo della matematica pura i numeri complessi consentono di risolvere difficili problemi di teoria dei numeri di cui non ci occupiamo. Occupiamoci invece delle applicazioni tecniche dei numeri complessi. Anzitutto vediamo le applicazioni nella elettrotecnica ed elettronica.

I segnali più importanti in elettrotecnica ed elettronica sono i segnali sinusoidali (segnali alternati). Questo non solo perché la tensione di rete, con cui si alimentano tutti gli elettrodomestici, è una tensione alternata (di valore efficace 220 Volt), ma soprattutto perché:

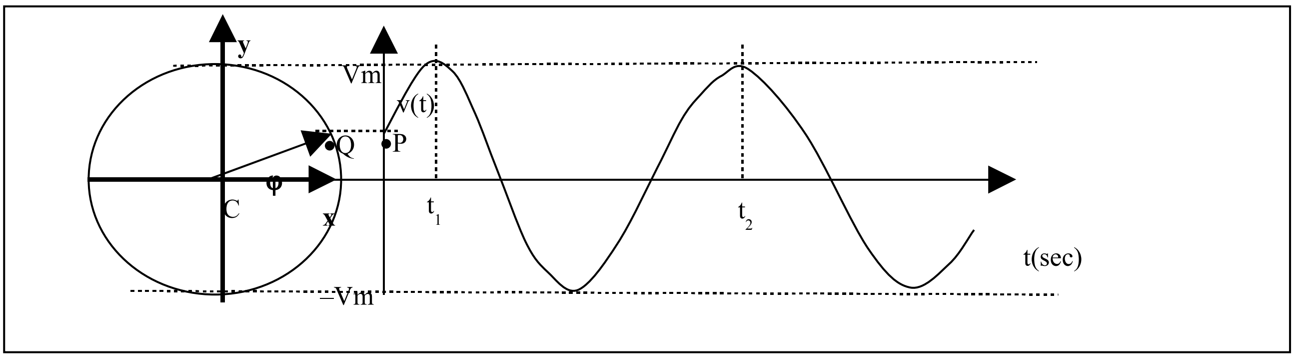
Si dimostra che qualsiasi segnale periodico può ottenersi come sovrapposizione di infiniti segnali sinusoidali con frequenza multipla rispetto alla frequenza del segnale di partenza.

Tali segnali sono detti ARMONICHE, ed il teorema che assicura quanto detto si chiama teorema di FOURIER. Ma vediamo i particolari:
Una funzione sinusoidale ha un grafico temporale del tipo indicato in figura:



Come si vede la funzione è periodica, ovvero ripete i propri valori ad intervalli di tempo regolari detti PERIODI. In figura è mostrato il periodo $T=t_2-t_1$. L'inverso del periodo è la <u>frequenza</u>, e si misura in <u>Hertz</u>. In Europa, ad esempio, la tensione di rete è una tensione sinusoidale con frequenza 50 Hz.
I valori della funzione sono compresi fra un valore massimo positivo, indicato con Vm, ed un valore minimo negativo, indicato con –Vm. Il valore medio della funzione è nullo.
Il valore massimo è in relazione al <u>valore efficace</u>. Quest'ultimo fornisce la media dei quadrati dei valori della curva in un periodo, preso sotto radice, ed è in relazione agli effetti termici che si ottengono quando una tensione alternata è applicata ai capi di un conduttore, con conseguente passaggio di corrente alternata nel medesimo.

Possiamo pensare che la sinusoide fornisca, istante per istante, l'ordinata di un punto Q che si muova di moto uniforme, in senso antiorario, su una circonferenza di raggio Vm e centro C posto sull'asse x che supponiamo avente la stessa direzione dell'asse t, come indica la figura:



A sua volta il punto Q è associabile ad un vettore $\overrightarrow{CQ}$ il quale ruota in senso antiiorario con velocità angolare $\omega=2\pi/T$.
All'istante t=0 il punto Q si trova nella posizione indicata in figura, e forma un angolo φ con l'asse x. L'angolo φ è detto FASE della sinusoide.

A questo punto il vettore $\overrightarrow{CQ}$ si può rappresentare con un numero complesso, e questo <u>consente di rappresentare tutte le grandezze presenti in un circuito in regime sinusoidale (tensioni, correnti ed impedenze dei componenti) con numeri complessi.</u>

Dal momento che l'algebra dei numeri complessi è abbastanza semplice, lo studio del circuito risulta quasi immediato.

Esercizi

Argomenti:
Operazioni con i numeri immaginari
Operazioni coi numeri complessi
Modulo e fase di numeri complessi
Potenze intere di numeri complessi
Radici ennesime di numeri complessi

Calcolare:
a) i^7
b) $(-2i)^8$
c) $(i)^4$

Calcolare:
(1+i)(1-2i)

(1+i)-(1-2i)
(1+i)/(1-2i)

Calcolare modulo e fase dei numeri complessi:
1+i
1-2i
–3+2i

Calcolare le potenze:
$(1+i)^4$
$(1-2i)^4$
$(-2-3i)^2$

Calcolare le radici:
sqrt(4,1+i)
sqrt(5,1-2i)

Soluzioni 1

1a) $i^7=i^6i=(i^2)^3i=(-1)^3i=-i$
1b) $(-2i)^8=(-2)^8i^8=2^8(-1)^8=2^8$
1c) $(i)^4=^4(i^2)^2=(-1)^2=4$

Soluzioni 2

2a) (1+i)(1-2i)=1-2i+i+2=3-i
2b) (1+i)-(1-2i)=1+i-1+2i=3i
2c) (1+i)/(1-i)=(-1/5)+(3i/5)

Soluzioni 3

3a) V=-3+2i; m=; φ=arctan(b/a)=arctan(1/1)=45°=π/4
3b) V=1-2i; m=; φ=arctan(-2)=-63,4°=-1.1 rad
3c) V=-3+2i; m==; φ=arctan(-2/3)+180°=146,3°=2,55 rad

Soluzioni 4

4a) $(1+i)^4=?$
Esprimiamo 1+i in forma trigonometrica:
m= ; φ=arctan(1)=45°=π/4 rad
1+i=cis(π/4)
Allora $(1+i)^4$=cis() =4(cosπ+i sinπ)=-4
4b) $(1-2i)^4=?$
Esprimiamo V=1-2i in forma trig.
m= ; φ=arctan(-2)=-63,4°=-1,1 rad
V=cis(-1,1)
V^4=cis(-4.4)=25 cis(1.88)

4c) $V=(-2-3i)^2=(2+3i)^2$
A=2+3i; m_A=; φ_A=arctan(3/2)=0.98 rad
V=cis(1.96)=13cis(1.96)

Soluzioni 5

5a) A=
1+i)=A^5=m^5cis(5φ)
cis(π/4)=m^5cis(5φ)
m=;   5φ=π/4
φ1=π/20;
Ponendo =2π/4 si ha φ2=π/20+;φ3=π/20+2; φ4=π/20+3

5b) A=
1-2i=A^5
B=1-2i; m=, φ=arctan(-2)=-1.1 rad
Allora B=cis(-1.1)
cis(-1.1)=m^5cis(5φ)
5φ=-1.1 ⇒φ=$φ_1$= -1.1/5=-0.22;
Le altre quattro radici si trovano sommando a $φ_1$ multipli di =2π/5