ELEMENTI DI ANALISI COMPLESSA

Introduzione

I seguenti appunti vogliono introdurre l'**analisi nel campo complesso**, ovvero l'estensione dei concetti di **funzione**, **limite**, **derivata**, **integrale**, **serie**, al campo complesso. Tale estensione si rivela molto feconda poiché consente di risolvere facilmente una serie di problemi che nel campo reale hanno difficile soluzione. Data la vastità dell'argomento gli appunti si limitano ad una disamina dei concetti e dei metodi principali, puntando più sulla semplicità e chiarezza espositiva che non sul rigore.

Il fine è introdurre tali argomenti senza produrre traumi nel lettore, anzi facendogli capire la bellezza e l'utilità degli argomenti esposti.

L'argomento potrà essere approfondito utilizzando qualche ottimo testo quale il Murray Spiegel: Variabili complesse. Serie Schaum's [Mac Graw-Hill].

L'esposizione è indirizzata principalmente a fungere da base per lo studio della funzione zeta di Riemann. Sono perciò trascurati argomenti importanti come la **rappresentazione conforme** o le **applicazioni fisiche**. Il lettore potrà trovare tali argomenti nel testo suddetto.

FUNZIONE COMPLESSA

Una funzione nel campo complesso è una legge che associa ad una variabile complessa z, uno **o più** valori della variabile complessa w.

Attenzione: contrariamente al caso reale, nelle funzioni complesse vi possono essere più valori dipendenti dalla stessa variabile indipendente z

Se ad un valore di z corrisponde un solo valore di w la funzione viene detta ***monodroma*** o **a un sol valore**. Se corrispondono più valori la funzione viene detta *polidroma.*

Una funzione polidroma può essere considerata come un insieme di funzioni a un sol valore. Ogni elemento di tale insieme si dice **ramo** della funzione di partenza. Uno di questi rami viene solitamente assunto come ***ramo principale***.

Esempio: Se $w=\sqrt{z}$ *per ogni valore di z si hanno due valori della variabile dipendente w (nel campo complesso la radice ennesima di un numero ha n valori). La funzione* $w=z^{1/2}$ *è perciò una funzione polidroma.*

FUNZIONI INVERSE

Se w=f(z) è una funzione **a un sol valore**, oppure se è un ramo di una funzione polidroma, definiamo **funzione inversa** la funzione che si ottiene ricavando z in funzione di w dalla relazione w=f(z), ottenendo così z=g (w), e sostituendo in quest'ultima z con w. Si ottiene così la funzione w=g(z), detta **funzione inversa**.

La funzione inversa di f viene spesso indicata con f^{-1}, per ricordare il fatto che $f(f^{-1}(z))=f^{-1}(f(z))=z$.

Esempio: Se w=f(z)=2z+3, ricavando z in funzione di w, si ha: z=(w-3)/2; sostituendo z con w, si ha w=(z-3)/2 che è la funzione inversa di f(z). Ovvero $f^{-1}(z)=(z-3)/2$.

Notare che $f(f^{1}(z))=f\cdot f^{1}(z)=$ $2*\{\frac{z-3}{3}\}+3$ $=z$

Attenzione: La scrittura $f(f^{-1}(z))$ indica che l'argomento di f è ottenuto applicando f^{-1} a z, ovvero che si fa la composizione fra le funzioni f ed f^{-1}. Tale scrittura viene spesso indicata con $f\cdot f^{-1}(z)$, e si legge f COMPOSTO f^{-1}, applicato a z. Non confondere tale simbolo col simbolo di prodotto.

TRASFORMAZIONI

Una funzione complessa w=f(z) associa un punto z di un piano complesso, detto **piano di origine**, con un punto w di un altro piano complesso, detto **piano delle immagini**. Il punto w è detto **immagine** di z.

Si dice che **z viene trasformato in w**.

Se w=u+iv e z=x+iy allora u+iv=f(x+iy).

Eguagliando fra di loro le parti reali ed immaginarie di quest'ultima si ottengono le due funzioni u,v. Ovvero u=u(x,y) v=v(x,y)

Queste ultime funzioni vengono dette **trasformazioni**.

Esempio sia $w=z^2$. Allora $u+iv=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$

Allora la trasformazione è: $u= x^2-y^2$; $v=2xy$. Perciò ad esempio il punto P(1,2), del piano di origine, viene trasformato nel punto Q(-3,4) del piano immagine.

Se la funzione è a un sol valore, una curva del piano di origine viene trasformata in una curva del piano immagine.

FUNZIONI ELEMENTARI

1) **Funzione lineare**.

   E' la funzione w=az+b, essendo a,b, delle costanti complesse.

2) **Funzione polinomiale**

   E' la funzione $w=a_n z^n+a_{n-1} z^{n-1}+a_{n-2} z^{n-2}+....a_1 z+a_0$

   Essendo n un intero e $a_n, a_{n-1}, ... a_0$ delle costanti complesse.

   Se n=1 si ha la funzione lineare.

3) **Funzioni razionali**

   Se P(z),Q(z) sono due polinomi di grado n, a coefficienti complessi, la funzione $w=\frac{P(z)}{Q(z)}$ è detta **funzione razionale**.

Se P(z), Q(z) sono di primo grado la funzione è detta **bilineare**.

4) **Funzione esponenziale**

La funzione (1) $w=e^z$ è detta funzione esponenziale. Nella precedente la costante *e* è il numero di nepero.

5) **Funzione logaritmica naturale**

Sia $w=e^z$; ricaviamo z in funzione di w: z=ln(w); scambiamo le variabili z ed w ottenendo w=ln(z). La funzione precedente è detta logaritmo naturale di z.

Notiamo che se $z=r\,e^{i\Theta}$ (notazione esponenziale di un numero complesso) allora $\ln(z)=\ln(r)+\ln(e^{i\Theta}) = \ln(r)+i\Theta$. Ma poiché ogni angolo è definito a meno di un multiplo di 2π, si ha: $\ln(z)=\ln(r)+i(\Theta+2k\pi)$, con k costante intera.

La funzione ln(z) è allora una funzione polidroma. Il ramo principale è quello corrispondente a k=0.

6) **Funzione logaritmica con base a reale positiva**

La funzione $w=\log_a(z)$ è definibile in modo analogo al caso reale:

$$\log_a(z)=\frac{\ln(z)}{\ln(a)}$$

Dato che *a* appare come argomento di un logaritmo essa dovrà essere una costante reale positiva.

7) **Funzione riconducibile all'esponenziale**

La funzione (2) $w=a^z$, con a numero reale *positivo*, può essere trasformata in una funzione esponenziale, infatti si può porre per definizione che sia valida la formula utilizzabile nel campo reale, ovvero

$$w=e^{\ln(w)}= e^{\ln(a^z)} = e^{z\ln(a)}$$

8) Funzioni trigonometriche

Si ricorda la formula di Eulero:

$e^{iz}=\cos z + i \sin z$ da cui:

$e^{-iz}=\cos z - i \sin z$

Sottraendo:

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

Sommando:

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

Queste due formule vengono assunte come definizioni delle funzioni complesse sin z, cos z. Naturalmente tan z=sin z/ cos z.

Con queste definizioni si dimostra che valgono tutte le relazioni note fra seno, coseno, e tangente in campo reale.

Ad esempio $\sin^2 z+\cos^2 z=1$.

9) Funzioni trigonometriche inverse

Se z=sin w, oppure z=cos w, è possibile ricavare le funzioni inverse

$w=\sin^{-1}(z)$ e $w=\cos^{-1}(z)$.

[indicate anche con le scritture w=arcsin(z), w=arccos(z)]

Le funzioni inverse sono funzioni a più valori e possono essere messe in relazione col logaritmo naturale come segue:

(a) $\sin^{-1}(z)= \dfrac{\ln(iz+\sqrt{1-z^2})}{i}$

(b) $\cos^{-1}(z)= \dfrac{\ln(z+\sqrt{z^2-1})}{i}$

Nelle precedenti il logaritmo naturale è una funzione **polidroma**

[$\ln z=\ln r+i(\Theta+2k\pi)$ essendo r, Θ il modulo e la fase di z].

Di conseguenza anche il sen^{-1} ed il $\cos^{-1}$ sono funzioni polidrome.

La (a) vale se si sceglie come ramo principale quello per cui $\sin^{-1}(0)=0$.

Verifichiamo la (a).

Se $w=\sin^{-1}(z)$ *allora* $z=\sin(w)=\dfrac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$

$e^{iw}-e^{-iw}-2iz=0$ *Moltiplicando per* e^{iw} *si ha:*

$e^{2iw}-2iz\,e^{iw}-1=0$ *La precedente è una equazione di secondo grado, con* e^{iw} *come variabile. Allora*

$e^{iw}= iz\pm\sqrt{-z^2+1}$ *Escludiamo la soluzione col segno meno, poiché nella soluzione che otterremo (formula [d]) desideriamo che* $\sin^{-1}(0)$ *esista, (e valga 0), mentre se scegliessimo la soluzione col segno meno,* $\sin^{-1}(0)$ *non esisterebbe.*

[c] $e^{iw}= iz+\sqrt{-z^2+1}$ *Allora:*

[d] $w=\dfrac{\ln(iz+\sqrt{1-z^2})}{i}$

La [c], assieme alla formula di Eulero: $e^{iw}=\cos(w)+i\sin(w)$, *mostra che w è definito a meno di un multiplo intero di* 2π. *Allora nel caso generale:*

$w=\sin^{-1}(z)=\dfrac{\ln(iz+\sqrt{1-z^2})}{i}+2k\pi$

Se si vuole che $\sin^{-1}(0)=0$ *occorre porre k=0 e si ottiene proprio la (a)*

10) Funzione potenza con esponente complesso

La funzione $w=z^a$ con a costante complessa, può essere ricondotta a quelle precedenti scrivendo $\ln w=\ln(z^a)=a\ln(z)$. Segue: $w=e^{a\ln z}$

Si tratta quindi di una funzione polidroma.

Tutte le funzioni elencate in precedenza e quelle ottenibili da esse con le operazioni di somma, differenza, prodotto, rapporto ed **estrazione di radice**, sono dette **funzioni elementari**.

10) Funzioni algebriche

Se w è una soluzione di una **equazione algebrica** del tipo:

$P_n(z)\, w^n + P_{n-1}(z)\, w^{n-1} + ...P_0=0$

Essendo $P_n(z)$, $P_{n-1}(z)$,...P_0, dei polinomi in z di grado n, n-1,...0, allora la funzione w=f(z) è detta **algebrica**. Se invece w non è soluzione di alcuna equazione algebrica del tipo precedente allora la funzione è detta **trascendente**.

Le funzioni **logaritmiche** e **trigonometriche** sono esempi di **funzioni trascendenti.**

RETTA DI DIRAMAZIONE

Consideriamo una **funzione polidroma**, ad esempio la funzione

$w=z^{1/2} = \sqrt{z}=\sqrt{r}\, e^{i\Theta/2}$

Sappiamo che un angolo è definito a meno di multipli di 2π perciò, ad esempio gli angoli Θ_1 e $\Theta_2=\Theta_1+2\pi$ sono uguali.

Ma nel primo caso $w=\sqrt{r}\, e^{i\Theta_1/2}$ mentre nel secondo

$w=\sqrt{r}\, e^{i(\Theta_1+2\pi)/2}$ cioè $w=\sqrt{r}\, e^{i\Theta_1/2} e^{i\pi}=-\sqrt{r}\, e^{i\Theta_1/2}$

(essendo $e^{i\pi}=-1$)

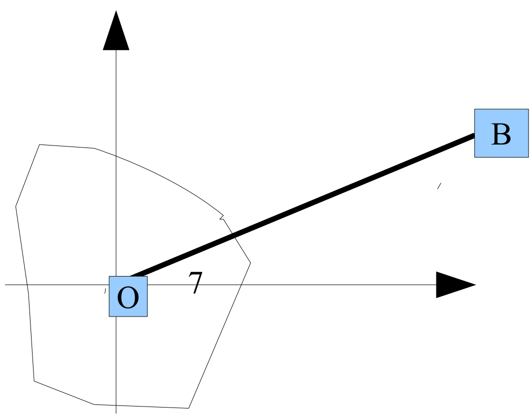
Se a Θ_2 si aggiunge 2π si ritrova lo stesso valore di w.

Ne segue che ad un unico valore di z (avente modulo r e fase Θ) corrispondono due valori di w (ovvero la funzione $w=z^{1/2}$ è una funzione a due valori).

Possiamo descrivere la situazione dicendo che per $0\leq \Theta<2\pi$ ci si trova su un ramo della funzione polidroma. Per $2\pi \leq \Theta<4\pi$ ci si trova sull'altro ramo.

Per ottenere una funzione monodroma occorre imporre che la fase Θ della variabile complessa z sia compresa fra i valore 0 ed il valore 2π.

Perciò se ad esempio si suppone che z si muova su una curva del piano di origine (vedi figura) in tale movimento non deve oltrepassare una semiretta con origine in O e terminante in un punto B posto all'infinito (qualsiasi semiretta OB va bene)



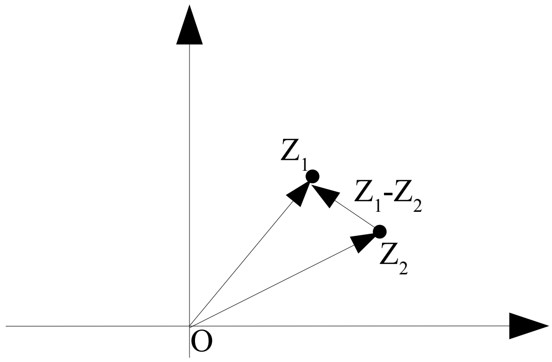
La retta OB è detta **retta di diramazione.**

§§§

LIMITI

Diciamo **distanza** fra due numeri complessi il modulo della loro differenza.

Il nome fa riferimento al fatto che un numero complesso z non è altro che un punto Z nel piano complesso. Può perciò essere associato al vettore OZ. Il modulo di z non è altro che il modulo di tale vettore.



Al numero complesso z_1-z_2 si può allora associare un vettore diretto da z_2 a z_1 come indica la figura. Il modulo di tale vettore fornisce allora la distanza fra i due punti z_1,z_2.

Diciamo **intorno** di un numero complesso z_0 un insieme dei punti z del piano complesso la cui distanza da z_0 sia inferiore ad un numero reale positivo r assegnato, ovvero tali che $|z-z_0|<r$.

Ovvero un intorno di z_0 è una regione circolare **aperta** di centro z_0 e raggio r

qualsiasi.
Si noti esplicitamente che un intorno di z_0 **comprende** il punto z_0 anche se non comprende i punti della circonferenza di raggio r.

Diciamo **intorno privato** di z_0 un intorno di z_0 *privato* del punto z_0.

Sia f(z) una funzione complessa, definita in un intorno *privato* di z_0.
Non si richiede cioè che $f(z_0)$ sia definita.

Diciamo che il numero complesso a è il **limite** di f(z) per z tendente a z_0, se esiste un intorno ***privato*** di z_0, in ogni punto del quale si verifichi:
$|f(z)-a| < \varepsilon$, essendo ε un numero reale positivo prefissato.

Attenzione: La definizione di limite **NON** si occupa di ciò che accade nel punto z_0, ovvero NON richiede che la relazione $|f(z)-a|< \varepsilon$ valga **nel punto z_0**, ma che esista un intorno **privato** del punto z_0, in cui tale relazione valga.

Se a è il limite di f(z) per z tendente a z_0 scriviamo:

$$a= \lim_{z \to z_0} f(z)$$

NON SEMPRE IL LIMITE ESISTE

Mostriamo che in molti casi il $\lim_{z\to z_0} f(z)$ non esiste. Sia ad esempio

$$\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}$$

Sia $z=x+iy$; $\bar{z}=x-iy$ $f(z)=\dfrac{x-iy}{x+iy}$

z può tendere a zero procedendo dapprima lungo l'asse x (y=0)

Allora con y=0 $\quad f(z)= \frac{x}{x} = 1$

Oppure può tendere a zero procedendo dapprima lungo l'asse y (x=0).

Allora con x=0 $\quad f(z)= \frac{-iy}{+iy} = -1$

Dato che i due percorsi danno risultati diversi il limite non esiste.

CONTINUITA'

Si noti che la definizione di limite di una funzione per z tendente a z_0, non dice nulla riguardo a $f(z_0)$. Tale valore potrebbe anche non esistere, oppure avere un valore differente dal limite.

Se tale valore esiste e coincide col limite, la funzione si dice **continua** nel punto z_0.

Se una funzione f(z) è continua in tutti i punti di una regione R, si dice che f(z) è continua in R.

Se una funzione f(z)=u+iv, è continua in R, allora lo sono anche la sua parte reale u, e la sua parte immaginaria v.

DISCONTINUITA' ELIMINABILI

Se una funzione f(z) è discontinua nel punto z_0, ma esiste il limite di f(z) per z tendente a z_0, la discontinuità è eliminabile. Basta ridefinire la funzione in modo che $f(z_0)=\lim_{z\to z_0} f(z)$.

Esempio:

La funzione $f(z)=\frac{3z^4-2z^3+8z^2-2z+5}{z-i}$ *non esiste nel punto z=i, (il denominatore si annulla) mentre esiste il limite di f(z) per z tendente ad i, e si può dimostrare che vale 4+4i.*

Allora se si pone f(i)=4i+4 si è resa continua la funzione, e si è eliminata la discontinuità.

TEOREMI SUI LIMITI

1) Se una funzione f(z) ammette limite, per z tendente a z_0, allora tale limite è unico.

2) Sia indicato con • uno qualsiasi dei quattro operatori algebrici elementari.
Allora se f(z) e g(z) sono delle funzioni complesse e se l,m sono i limiti di f,g per z tendente a z_0, si ha
$\lim_{z\to z0} f(z)\bullet g(z)=l\bullet m$
Nel caso che l'operatore • rappresenti la divisione si richiede che m sia diverso da zero.

3) Se f(z),g(z) sono continue in una regione, lo sono anche f(z)+g(z), f(z)-g(z), f(z)g(z), f(z)/g(z). L'ultima vale solo se $g(z)\neq 0$

4) Le funzioni polinomiale, esponenziale, sinusoidale e cosinusoidale sono continue in ogni regione finita del piano complesso.

5) Se f(z), g(z) sono definite e continue in una regione R, e se la funzione composta è definita in R, allora f(g(z)) è continua in R.

PUNTI DI ACCUMULAZIONE DI UNA REGIONE R

Si dice che z_0 è un **punto di accumulazione** di una regione R quando ogni intorno privato di z_0 contiene punti di R.
Ad esempio se consideriamo una regione R racchiusa da una linea chiusa (detta **frontiera**), tutti i punti di tale linea sono punti di accumulazione di R. Infatti qualsiasi cerchio con centro sulla frontiera di R, racchiuderà punti di R.

REGIONI CHIUSE

Se una regione comprende tutti i suoi punti di accumulazione si dice **chiusa**.
Attenzione che tale definizione NON coincide col concetto intuitivo di regione chiusa. Ad esempio per il semipiano destro [Re(z)>0] i punti dell'asse

immaginario sono punti di accumulazione. Perciò se consideriamo l'insieme del semipiano destro con l'asse immaginario otteniamo una regione chiusa.

La regione R racchiusa da una linea chiusa e che comprende tutti i suoi punti di frontiera è una regione chiusa.

FUNZIONI CONTINUE IN UNA REGIONE CHIUSA

Se una funzione f(z) è continua in una regione chiusa, allora essa è **limitata** in tale regione. Ovvero per ogni z in R si ha $|f(z)|<M$, per qualche valore positivo M.

SUCCESSIONI COMPLESSE

Una successione complessa è un insieme infinito, ordinato, di numeri complessi.
Ad esempio:
$1+i, (1+i)^2/2!, (1+i)^3/3!....$
Il **temine ennesimo** di una successione viene indicato con u_n.
Una successione può essere assegnata fornendo l'espressione del termine ennesimo (**termine generale**). Nel caso precedente il termine generale vale: $u_n=(1+i)^n/n!$

LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

Una successione complessa ammette come limite il numero complesso l se esiste un valore intero N tale che per ogni indice n maggiore di N si ha $|u_n-l|<\varepsilon$, con ε reale positivo assegnato.
Ovvero l è il limite della successione se la distanza di tutti gli elementi di indice maggiore di un certo N, rispetto al limite, scende sotto qualsiasi ε prefissato.
Se l è il limite della successione di termine generale u_n scriviamo
$l=\lim_{n\to\infty}u_n$, o semplicemente $\lim u_n=l$.

TEOREMI SUI LIMITI DI SUCCESSIONI

Se lim a_n=A,   lim b_n=B, allora

1) $\lim(a_n+b_n)=A+B$
2) $\lim(a_n-b_n)=A-B$
3) $\lim(a_n*b_n)=A*B$
4) $\lim(a_n/b_n)=A/B$

   L'ultima vale se $B\neq0$.

SERIE

Sia a_1, a_2, a_3... una successione.

La somma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+a_3+....$ è detta SERIE.

Data una serie si possono calcolare le **somme parziali**:

$s_1=a_1$;

$s_2=a_1+a_2$;

$s_n=a_1+a_2+...a_n$

Se la successione s_n ammette un limite S **finito** si dice che la serie converge e che la sua **somma** vale S.

In caso contrario si dice che la serie diverge.

Condizione **necessaria, ma non sufficiente,** affinché una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga, è che il termine generale a_n della successione da cui la serie deriva, abbia come limite zero (per n tendente ad infinito).

Che la condizione **non sia sufficiente** è dimostrato dal fatto che la serie 1+1/2+1/3+1/4.... (serie armonica) ha un termine generale $a_n=1/n$ che tende a zero, quando n tende ad infinito, ma non converge.

Ciò può essere visto subito, notando che 1/3+1/4>1/2

1/5+1/6+1/7+1/8>1/2

Ovvero avanzando nella somma e prendendo un numero di termini che sia una potenza successiva di due si ottiene un numero maggiore di ½. E poiché si può avanzare quanto si vuole nella somma (dato che il numero dei termini è infinito) si otterranno infiniti raggruppamenti i cui valori sono tutti maggiori di ½. Segue che la serie diverge.

SERIE GEOMETRICA

Una delle serie più importanti è la serie geometrica, definita da:

$S=1+z+z^2+z^3+...$

Questa serie, nel caso in cui $|z|<1$ converge al valore $S=\frac{1}{1-z}$

Infatti si ha

$S_n=1+z+z^2+z^3+...z^n$

$S_n=1+z(1+z+z^2+...z^{n-1})$

$S_n=1+z(S_n-z^n)$

$S_n=1+z\ S_n-z^{n+1}$

$S_n(1-z)=1-z^{n+1}$

$S_n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$

Adesso per n tendente ad infinito e per $|z|<1$, il temine z^{n+1} della successione $1,z,z^2, z^3...$ tende a zero.

Infatti dimostriamo che fissato un $\varepsilon>0$, possiamo trovare un valore N dell'indice, tale che per ogni $n>N$ sia $|z^{n+1}-0|<\varepsilon$.

Si ha $|z^{n+1}|=|z|^{n+1}$. Deve essere perciò $|z|^{n+1}<\varepsilon$,

[a] $(n+1)\ln(|z|)<\ln(\varepsilon)$

$n+1>\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|z|)}$

(abbiamo cambiato di segno poiché entrambi i membri della [a] sono negativi: $\ln(|z|)$ è negativo poiché $|z|$ si è supposto minore di 1, $\ln(\varepsilon)$ è negativo poiché ε è supposto piccolo a piacere e senz'altro minore di 1).

Abbiamo allora trovato il valore N dell'indice [N=int($\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|z|)}$] superato il quale la distanza fra l'elemento ennesimo della successione z^n ed il limite 0 diventa minore di qualsiasi ε assegnato.

§§

DERIVAZIONE COMPLESSA

DEFINIZIONE DI DERIVATA COMPLESSA

Sia f(z) una funzione complessa a un sol valore. La derivata di f(z) è definita da

$$\frac{df}{dz} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

Affinché la derivata esista è necessario perciò che il precedente limite esista e che sia indipendente dal modo in cui il *numero complesso* h=x+iy tende a zero (si può far tendere h a zero facendo tendere a zero prima la parte reale x e poi la parte immaginaria *y*, o viceversa).

Se calcoliamo la derivata f '(z) nel punto a, otteniamo:

$$f'(a)= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ponendo a+h=z si ha: $f'(a)= \lim_{h\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$

La derivata di una funzione complessa f(z) nel punto z=a, può allora essere scritta

$$\boxed{f'(a)= \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}}$$

La derivata nel punto *a* esiste solo se esiste il precedente limite, ed è indipendente dal modo in cui z tende ad a.

UNA FUNZIONE DERIVABILE IN UN PUNTO

E' CONTINUA IN QUEL PUNTO

Una funzione f(z) è continua nel punto a, se $\lim_{z\to a} f(z)=f(a)$.

Ponendo z=a+h (per z → a, si ha h→0) la precedente si può scrivere:

$\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$

Dimostriamo il seguente **fatto fondamentale**:

Se una funzione è derivabile in un punto *a* allora è continua in tale punto

Infatti si ha

$$\lim_{z\to a}[f(z)-f(a)]=\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}*(z-a) =$$

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}\lim_{z\to a}(z-a) = f'(a)*0=0$$

Ovvero: $\lim_{z\to a}[f(z)-f(a)]=0$; *segue:*

$\lim_{z\to a} f(z)-f(a)=0$;

$\lim_{z\to a} f(z)=f(a)$.

La funzione derivabile in un punto è allora continua in tale punto.

Attenzione che ciò **non significa** che se una funzione f(z)=u(x,y)+i v(x,y) è continua allora è derivabile.

Vedremo tra poco che le condizioni affinché f(z) sia derivabile sono che le parti reali ed immaginaria di f(z), ovvero u(x,y) e v(x,y), siano dotate derivate parziali e che esse soddisfino le due equazioni di Cauchy-Riemann:

(1) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ (2) $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

FUNZIONI ANALITICHE

Una funzione derivabile in ogni punto di una regione R si dice che è **analitica** in R. Ovvero f(z) è analitica in R se f '(z) **esiste** per ogni z in R.

Una funzione f(z) si dice **analitica** nel punto z_0 sse esiste un **intorno** del punto z_0 in tutti i punti del quale la funzione sia derivabile.

Si sta parlando di intorno semplice di z_0, non di intorno privato. Perciò affinché la funzione f(z) sia analitica in z_0 è necessario: 1) che esista f '(z_0) 2) che esista un intorno privato di z_0 in ogni punto del quale esista la derivata.

Esempio: La funzione f(z)= $\frac{1+z}{1-z}$ *ha derivata: f '(z)=* $\frac{2}{(1-z)^2}$ *, perciò la derivata non esiste nel punto z=1. Perciò la funzione non è analitica in quel punto.*

Condizione NECESSARIA affinché una funzione f(z)=f(x+iy)= u(x,y)+i v(x,y) sia analitica in una regione R, è che in tale regione si verifichino le equazioni di Cauchy-Riemann: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

Se le derivate parziali precedenti sono **continue** in R, allora tali condizioni sono anche SUFFICIENTI per la analiticità di f(z) in R.

Infatti sia f(z)=u(x,y)+i v(x,y)

Si ha $\frac{df}{dz}$ =

$$\lim_{\Delta x\to 0, \Delta y\to 0} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y)+i\,v(x+\Delta x, y+\Delta y)-[u(x,y)+i\,v(x,y)]}{\Delta x+i\Delta y}$$

Il precedente limite non deve dipendere dal modo in cui Δz tende a zero. Possiamo farlo tendere verso lo zero procedendo dapprima lungo un segmento orizzontale (Δy=0) del piano complesso. Si ottiene:

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x, y)+i\,v(x+\Delta x, y)-[u(x,y)+i\,v(x,y)]}{\Delta x}$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Analogamente procedendo lungo una linea verticale (Δx=0) si trova

$$\frac{df}{dz} = -i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

Eguagliando le parti reali ed immaginarie si trovano le due equazioni di Cauchy-Riemann, ovvero:

(1) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ (2) $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

FUNZIONI ARMONICHE

Se f(z)=u(x,y)+i v(x,y) , se esistono le derivate parziali seconde di u(x,y),v(x,y) e se tali derivate seconde sono continue, derivando parzialmente rispetto ad x entrambi i membri della prima equazione di Cauchy-Riemann si ha:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}$$

Derivando parzialmente la seconda rispetto ad y si ottiene:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$$

Dalle precedenti segue:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ Ovvero

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0}$$

Analogamente, derivando parzialmente la prima eq. di Cauchy secondo y e la seconda secondo x ed eguagliando i risultati si ottiene:

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0}$$

Le due equazioni precedenti sono dette **equazioni di Laplace**, e le funzioni che soddisfano tali equazioni sono dette **armoniche**. Tali equazioni possono essere scritte così:

$$\nabla^2 u=0, \quad \nabla^2 v=0$$

Il simbolo $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ viene detto **LAPLACIANO**

LE FUNZIONI ANALITICHE HANNO COMPONENTI ARMONICHE

Si dimostra che se una funzione f(z) è analitica le sue componenti, reale ed immaginaria, sono armoniche, ovvero valgono le equazioni armoniche:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0} \quad \boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0}$$

SE UNA FUNZIONE E' ANALITICA
ESISTONO LE DERIVATE DI QUALSIASI ORDINE

Se f(z) è analitica in una regione R (ovvero esiste la derivata prima in ogni punto di R) lo sono anche f '(z),f ''(z),f '''(z)..., ovvero esistono in R tutte le derivate di ordine superiore.

Una funzione f(z) è analitica se esiste la derivata prima.

Ma se f(z) è analitica allora esistono le derivate di qualsiasi ordine.

Cioè se f(z) è analitica in una regione R esistono $f'(z_0)$, $f''(z_0)$, $f'''(z_0)$...

per ogni z_0 in R.

Ma se una funzione è derivabile allora è continua.

Segue che **se una funzione è analitica** in una regione R **allora è continua** in quella regione, assieme a tutte le derivate di ordine superiore.

Attenzione che ciò non significa che una funzione continua è necessariamente analitica, poiché vi sono delle funzioni continue in un punto che non sono derivabili in tale punto.

Un esempio sono le funzioni a più valori che nei punti di diramazione sono continue ma non sono derivabili. Perciò **i punti di diramazione delle funzioni sono punti singolari**, ovvero di non analiticità.

REGOLE DI DERIVAZIONE

Si dimostra che valgono tutte le regole di derivazione del campo reale. Ovvero

Se c è una costante complessa:

1) $\frac{d}{dz}$ [c f(z)]= c $\frac{df}{dz}$

2) $\frac{d}{dz}$ [f(z)±g(z)]= $\frac{df}{dz} \pm \frac{dg}{dz}$

3) $\frac{d}{dz}$ [f(z)*g(z)]= f(z)*g'(z)+f'(z)*g(z) [l'apice indica derivazione su z]

4) $\frac{d}{dz} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{g(z)f'(z)-g'(z)f(z)}{g^2(z)}$

Se f=f(z) e z=z(u)

5) $\frac{df}{du}=\frac{df}{dz}*\frac{dz}{du}$

6) Se w=f(z) e z=f^{-1} (w) allora $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{dw}}$

7) Se z=f(t), w=g(t) allora $\frac{dz}{dw} = \frac{dz/dt}{dw/dt}$

DERIVATE DI FUNZIONI ELEMENTARI

Valgono tutte le formule del caso reale: (D indica derivata rispetto a z)

1) D (c)=0
2) D z^n= nz^{n-1}
3) D e^z=e^z
4) D sin z=cos z
5) D cos z=-sin z
6) D ln z= $\frac{1}{z}$
7) D $\sin^{-1}$ z= $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
8) D $\cos^{-1}$ z= $\frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$

Le derivate di altre funzioni elementari come tan z, $\tan^{-1}$ z, a^z, eccetera, si calcolano utilizzando le regole di derivazione.

REGOLA DI L'HOSPITAL

Questa regola è molto utile per calcolare dei limiti che ricadono nelle sette forme indeterminate:

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0*\infty, \quad 0^\infty, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad \frac{0}{0}$$

La regola afferma che, se g'(z)≠0, si ha:

$\lim_{z\to z0} \frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z)}{g'(z)}$ (l'apice indica derivazione su z)

Esempio:

Ricavare $\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2}$

Non si può ricavare il limite per sostituzione diretta di z=0 nella funzione poiché si ottiene la forma indeterminata 0/0. Utilizzando De L'Hospital si ottiene invece:

$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{2z}$ *, che è ancora indeterminato. Derivando ancora:*

$= \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{2} = \frac{1}{2}$

SINGOLARITA'

Se in un punto z_0 una funzione non è analitica, ovvero nel punto z_0 la funzione non ha la derivata, si dice che z_0 è una **singolarità** della funzione.

I punti di diramazione delle funzioni a più valori sono anch'essi punti di singolarità.

Esempio: La funzione polidroma $f(z) = (z-3)^{1/2}$ *ha un punto di diramazione in* $z_0=3$*, che è una singolarità.*

Se esiste un cerchio di centro z_0 e raggio ε qualsiasi in cui l'unica singolarità sia z_0, allora z_0 viene detto **singolarità isolata**.

Se z_0 è una singolarità di f(z) ma esiste il limite di f(z) per z tendente a z_0, tale singolarità è eliminabile.

Esempio Se $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ *il punto* $z_0=0$ *è una singolarità.*

Infatti la derivata vale f'(z)= $\frac{z\cos z - \sin z}{z^2}$ *. Nel punto z_0=0 la derivata non esiste, perciò la funzione non è analitica in tale punto.*
Tuttavia esiste il limite della funzione per z tendente a 0 (vale 1), perciò tale singolarità è eliminabile.

POLI

Un punto z_0 è un polo di ordine n se esiste un intero positivo n tale che
$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^n f(z) = A$, con A costante diversa da zero.
Se n=1 il polo è detto **semplice**.

Esempio: f(z)= $\frac{z-4}{(z-2)^3}$ *ha un polo di ordine 3 nel punto z_0=2.*

ZERI

Se $f(z)= (z-z_0)^n g(z)$, con $g(z_0)\neq 0$ allora z_0 è detto zero di f(z) di ordine n.

Esempio: La funzione f(z)= $\frac{z-4}{(z-2)^3}$ *ha uno zero semplice in z_0=4*

SINGOLARITA' ESSENZIALI

Una singolarità che non sia un polo, né un punto di diramazione, né una singolarità eliminabile, è detta essenziale.

OPERATORI DIFFERENZIALI

L'operatore **laplaciano**:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$ (nabla quadro)

ci suggerisce di definire due operatori differenziali complessi, ovvero

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$$ (nabla)

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$$ (nabla coniugato)

Con tali definizioni l'operatore laplaciano può essere ottenuto dal prodotto scalare dei due operatori nabla, ovvero:

$$\nabla^2 = \nabla \circ \nabla$$

PRODOTTO SCALARE E VETTORIALE

DI NUMERI COMPLESSI

Il prodotto scalare di due vettori è definito da:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |u||v| \cos \Theta \quad ,$$

ovvero è lo scalare (numero) ottenuto moltiplicando i moduli per il coseno dell'angolo compreso.

Se z è un numero complesso, esso è un punto P nel piano complesso, e può essere associato al vettore OP, essendo O l'origine del piano complesso.

Allora il concetto di prodotto scalare può essere esteso ai numeri complessi.

Si trova facilmente che $z_1 \circ z_2 = \mathrm{Re}(\overline{z_1}\ z_2)$

Infatti $z_1 = a + ib = m_1 e^{i\Theta_1}$

$z_2 = c + id = m_2 e^{i\Theta_2}$

$\overline{z_1} = a - ib = m_1 e^{-i\Theta_1}$

$\overline{z_1}\ z_2 = m_1 m_2 e^{i(\Theta_2 - \Theta_1)} = m_1 m_2 \cos\theta + i\, m_1 m_2 \sin\theta \quad [\theta = \theta_2 - \theta_1]$

$Re\ (\ \overline{z_1}\ * z_2) = m_1 m_2 \cos(\Theta_2 - \Theta_1) = m_1 m_2 \cos\Theta$

Il prodotto vettoriale di due vettori **u,v** è un vettore (perpendicolare sia ad **u** che a **v**) avente modulo |**u**|*|**v**|sinΘ.

In analogia viene definito il **prodotto vettoriale** di due numeri complessi z_1, z_2 il numero reale

$z_1 \times z_2 = |z_1| * |z_2| \sin\Theta$

essendo $\theta = \theta_1 - \theta_2$ l'angolo fra il primo ed il secondo vettore.

Si noti che l'analogia riguarda solo la formula, dal momento che il prodotto vettoriale di due vettori è un terzo vettore, mentre il prodotto vettoriale di due numeri complessi non è il numero complesso che rappresenta il terzo vettore, ma è un numero reale.

Analizzando quanto detto prima si ricava che

$z_1 \times z_2 = \mathrm{Im}(\overline{z_1} * z_2)$

°°

Si dimostra che se z=x+iy, $\overline{z}$ =x-iy, si ha

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}$$

$$\overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} = 2\frac{\partial}{\partial z}$$

GRADIENTE, DIVERGENZA E ROTORE

Utilizzando l'operatore nabla, si possono definire

1) il **gradiente** di una funzione reale F(x,y)

   $\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}$

   Data la curva piana F(x,y)=c, allora ∇ F rappresenta un vettore perpendicolare a tale curva.

2) **Divergenza** di una funzione complessa A(x,y)=P(x,y)+iQ(x,y):

   Viene definita dal prodotto scalare:

   $\nabla \circ A = \mathrm{Re}(\overline{\nabla} A) = \mathrm{Re}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P+iQ)\right] = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$

3) **Rotore** di una funzione complessa A(x,y)

Viene definita dal prodotto vettoriale:

$$\nabla \times A = \mathrm{Im}\,(\overline{\nabla} A) = \mathrm{Im}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)(P+iQ)\right] = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

§§

INTEGRAZIONE COMPLESSA

Sia f(z) una funzione complessa e continua in tutti i punti di una linea C di lunghezza finita e di estremi a,b.

Suddividiamo la curva in una serie di tratti (che supponiamo tutti di eguale lunghezza) per mezzo dei punti a, z_1, z_2, z_3.... ,b.

Prendiamo adesso sul tratto z_k, z_{k+1} un punto ξ_k.

Formiamo adesso la somma:

$S = f(\xi_1)(z_1-a)+f(\xi_2)(z_2-z_1)+f(\xi_3)(z_3-z_2)+\ldots.\ f(\xi n)(b-z_{n-1})$

Ponendo $z_k-z_{k-1}=\Delta z_k$, la precedente si scrive:

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k-z_{k-1})$$

Facendo crescere il numero delle suddivisioni in modo che la lunghezza delle suddivisioni tenda a zero, tale somma tenderà ad un limite che viene indicato con il simbolo

$$\boxed{\int_C f(z)dz}$$

e viene detto **integrale di linea** della curva f(z) lungo la linea C.
Se f(z) è analitica nella regione in cui giace la curva C allora f(z) è sicuramente integrabile.

PROPRIETA' DEGLI INTEGRALI DI LINEA

Gli integrali di linea godono di tutte le proprietà degli integrali di funzione reale, ovvero:

1) $\int_C (f(z) \pm g(z))\,dz = \int_C f(z)\,dz \pm \int_C g(z)\,dz$

2) $\int_C A\,f(z)\,dz = A\int_C f(z)\,dz$

3) $\int_a^b f(z)\,dz = -\int_b^a f(z)\,dz$ (a,b estremi della curva C)

4) $\int_a^b f(z)\,dz = \int_a^m f(z)\,dz + \int_m^b f(z)\,dz$ (con m=punto della curva di estremi a,b)

Oltre ai precedenti, analoghi alle già note proprietà degli integrali, è valida la

5) $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqslant ML$ essendo M una limitazione superiore di |f(z)| ed L la lunghezza della linea C.

INTEGRALE DI LINEA CHIUSA

Un integrale lungo una linea semplice (ovvero che non si interseca), chiusa, viene indicato col simbolo

$\oint_C f(z)\,dz$

Il cerchietto indica che la linea C è chiusa.

TEOREMA DI GREEN

Se u(x,y), v(x,y) sono funzioni continue in una regione R, avente frontiera C, il **teorema di Green** afferma che

$$\oint_C u\,dx + v\,dy \;= \int\int_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Ovvero il teorema di Green collega l'integrale lungo una linea chiusa, all'integrale esteso alla regione R racchiusa da tale linea.

Tale teorema è importante, perché consente, ad esempio, di dimostrare il fondamentale ***teorema integrale di Cauchy****, che vedremo in seguito, e che afferma che* ***se una funzione è analitica su una regione chiusa e sulla sua frontiera, l'integrale di linea esteso alla frontiera si annulla.***

Sono cioè non nulli solo gli integrali di linea estesi alla frontiera di una regione che contiene al suo interno delle singolarità.

TEOREMA DI GREEN IN FORMA COMPLESSA

Esiste una forma complessa del teorema di Green valida per una funzione $F(z, \bar{z})$, essendo $\bar{z}$ il coniugato di z, continua in R e dotata di derivate parziali:

$$\oint_C F(z, \bar{z})\,dz \;= 2i \int\int_R \frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\,dx\,dy$$

TEOREMA DI CAUCHY

Se f(z) è analitica in una regione R e sulla sua frontiera C, ed è dotata di derivata continua, si ha:

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz=0}$$

Ovvero se una regione chiusa R non contiene singolarità al suo interno, allora l'integrale di linea lungo la sua frontiera si annulla.

Dimostrazione: Dato che f(z)=u(x,y)+i v(x,y) è analitica, si ha $\frac{df}{dz}$ =

$$lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y)+i\,v(x+\Delta x, y+\Delta y)-[u(x,y)+i\,v(x,y)]}{\Delta x+i\Delta y}$$

Il precedente limite non deve dipendere dal modo in cui Δz tende a zero. Possiamo farlo tendere verso lo zero procedendo dapprima lungo un segmento orizzontale (Δy=0) del piano complesso. Si ottiene:

$$\frac{df}{dz}=lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y)+i\,v(x+\Delta x, y)-[u(x,y)+i\,v(x,y)]}{\Delta x}$$

$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$ *Lungo una linea verticale (Δx=0) si trova*

$\frac{df}{dz} =(\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$ *Allora* $\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$

Eguagliando le parti reali fra loro:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}}$$ *(prima eq. di Cauchy Riemann)*

Eguagliando le parti immaginarie:

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}}$$ *(sec. eq. di Cauchy- Riemann)*

Dato che f '(z) è una funzione continua, anche le derivate parziali delle sue componenti sono continue. Possiamo perciò applicare il teorema di Green che riprendiamo:

$$\oint_C u\,dx+v\,dy=\int\int_R \left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy \qquad \text{(Green)}$$

Allora

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C (u+iv)(dx+i\,dy)=\int_C [u\,dx-v\,dy]+i\int_C v\,dx+u\,dy \ =$$

$$\int\int_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy+i\int\int_R \left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy=0$$

L'eguaglianza a zero discende dalle due equazioni di Cauchy-Riemann

ovvero $\partial u/\partial x=\partial v/\partial y\,;\partial u/\partial y=-\partial v/\partial x$

IMPORTANTI CONSEGUENZE

DEL TEOREMA DI CAUCHY

1) Siano dati due punti a,b di una regione R semplicemente connessa. Se f(z) è analitica in R allora l'integrale di linea esteso ai punti a,b non dipende dal percorso, purché esso giaccia tutto in R.
2) Siano a,z due punti di una regione R e sia G(z)= $\int_a^z f(z)dz$

   Allora G(z) è analitica ed inoltre G'(z)=f(z)
3) Sia F(z) **l'integrale indefinito** di f(z), ovvero F'(z)=f(z), e siano a,b due punti di una regione R. Allora

   $\int_a^b f(z)dz=F(b)-F(a)$
4) Se una funzione è analitica nella regione delimitata dalle due curve semplici e chiuse C_1,C_2, con C_2 interna a C_1, allora l'integrale di linea lungo C_1 è uguale all'integrale di linea lungo C_2.

INVERSO DEL TEOREMA DI CAUCHY

Vale anche l'inverso del teorema di Cauchy, ovvero se l'integrale di linea di una funzione continua f(z) è sempre nullo su qualsiasi linea chiusa interna ad una regione R (**semplicemente connessa**, ovvero priva di buche al suo interno) allora f(z) è analitica.

§§§

FORMULA INTEGRALE DI CAUCHY

Sia f(z) analitica lungo una linea chiusa semplice C, e nella regione chiusa R racchiusa da tale linea. Sia *a* un qualsiasi punto di R. Allora

(1)
$$\boxed{f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz}$$

La precedente si può generalizzare al caso di derivata ennesima come segue:

$$\boxed{f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{(n+1)}}dz}$$

(*il simbolo $f^{(n)}(a)$ indica la derivata ennesima di f(z) calcolata in a).*

Dimostriamo la formula integrale di Cauchy: $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$

La funzione integranda: $\frac{f(z)}{z-a}$ è analitica dentro e lungo C, ad eccezione del punto a, in cui la derivata prima non esiste. Sappiamo che in questo caso l'integrale può essere esteso ad una curva C_1 interna a C, ed il suo valore non cambia (si richiede solo che la funzione integranda sia analitica nella regione compresa fra C e C_1).

Scegliamo allora come curva C_1 un cerchio di raggio ε centrato attorno ad a (ε sia tale che il cerchio C_1 sia interno a C. L'equazione del cerchio C_1 è $|z-a|=\varepsilon$, oppure $z-a=\varepsilon\, e^{i\Theta}$ con $0\leq\ \Theta <2\pi$. Ovvero $z=a+ \varepsilon\, e^{i\Theta}$; $dz= i\varepsilon\Theta\, e^{i\Theta}$. Sostituendo:

$$\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\epsilon e^{i\Theta}) i \epsilon e^{i\Theta}}{\epsilon e^{i\Theta}} d\Theta$$

=

$$i\int_0^{2\pi} f(a+\epsilon e^{i\theta}) d\theta$$

La precedente eguaglianza deve valere anche quando ε tende a zero. Allora

$$\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a} dz = i\int_0^{2\pi} f(a) d\theta = 2\pi i f(a)$$

Segue la formula integrale di Cauchy.

§§§

LE SERIE DI FUNZIONI

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Sia $u_1(z), u_2(z), \ldots u_n(z)\ldots$ una successione di **funzioni** di z, definite e ad un sol valore in una regione R del piano complesso. Indichiamo tale serie con la scrittura $\{u_n(z)\}$.

Diciamo che la funzione U(z) è il limite della successione $\{u_n(z)\}$ (per n tendente all'infinito) se esiste un valore intero N dell'indice tale che per ogni n>N sia

$$\boxed{|\ \ \mathbf{u_n(z)-U(z)|<\varepsilon}}$$

quale che sia il valore di ε, reale positivo.

Se U(z) è il limite, per n tendente ad infinito, della successione {un(z)} scriviamo: $U(z)=\lim_{n\to\infty} un(z)$ e diciamo che la successione **converge** ad U(z).

Se una successione converge per tutti i punti di una regione R diciamo che R è una **regione di convergenza** della successione.

Per i limiti di successioni di funzioni valgono tutti i teoremi sui limiti di successioni di costanti già noti.

SERIE DI FUNZIONI

Sia data una successione di funzioni: $\{u_n(z)\}$.

Costruiamo una nuova successione detta delle **somme parziali**, come segue:

$S_1(z)=u_1(z)$

$S_2(z)=u_1(z)+u_2(z)$

.

$S_n(z)=u_1(z)+u_2(z)+...u_n(z)$

Se $\lim_{n\to\infty} S_n$ esiste, ed è uguale ad S(z), allora tale limite viene detto **somma della serie** e la serie viene detta **convergente**.

Ovvero $S(z)= \sum_1^\infty u_n(z) = \lim_{n\to\infty} S_n$

Se una serie converge in tutti i punti di una regione R, tale regione viene detta **regione di convergenza**.

Condizione necessaria affinché una serie $\sum_1^\infty u_n(z)$ converga è che il termine generale della successione tenda a zero (per n tendente ad infinito). Ma ciò non è sufficiente.

CONVERGENZA ASSOLUTA

Una serie $\sum_1^{\infty} u_n(z)$ si dice che ha convergenza assoluta (oppure che è **assolutamente convergente**), se converge la serie dei **moduli** dei suoi termini, ovvero se converge: $\sum_1^{\infty} |u_n(z)|$

1. Se una serie ha una convergenza assoluta allora ha anche convergenza ordinaria.
2. I termini di una serie con convergenza assoluta possono essere scambiati di posto senza che la somma della serie vari.
3. La somma, la differenza ed il prodotto di serie a convergenza assoluta sono a convergenza assoluta.

SERIE DI POTENZE

Una serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ viene detta serie di potenze in (z-a).

Quando la serie converge è possibile dimostrare che esiste un numero positivo R (raggio di convergenza) tale che per ogni valore di z interno al cerchio |z-a|=R, di centro *a* e raggio R, la serie converge. Per ogni punto esterno al cerchio la serie diverge. Sul cerchio la convergenza non è garantita.

TEOREMI SULLE SUCCESSIONI E SULLE SERIE DI FUNZIONI

1) Sia $u_n=a_n+i\ b_n$. (a_n,b_n reali). Condizione necessaria e sufficiente affinché la successione $\{u_n\}$ converga, è che le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ convergano.
2) Una successione $\{a_n\}$ di numeri reali, si dice **crescente** se $a_{n+1} \geq a_n$. Si dice **decrescente** se $a_{n+1} \leq a_n$. Si dice **monotona** se è crescente o decrescente.
   Si dice **limitata** se esiste un M positivo tale che per ogni n si ha $|a_n|<M$.
   Una funzione monotona limitata è convergente.

CRITERIO DI CONVERGENZA DI CAUCHY

Una successione di funzioni {un} converge se assegnato $\varepsilon>0$ esiste un valore dell'indice N tale che per due indici qualsiasi p,q maggiori di N, sia $|u_p-u_q|<\varepsilon$.

CRITERIO DEL CONFRONTO

1) Se una serie S_1 converge assolutamente, e se ciascun termine di una seconda serie S_2 è inferiore (in valore assoluto) al corrispondente termine della prima, allora anche la seconda serie converge assolutamente.
2) Se la serie S_1 diverge ed i termini sella seconda serie sono maggiori (in valore assoluto) rispetto ai termini della prima, anche la seconda serie divergerà.

CRITERIO DEL RAPPORTO

Se il valore assoluto fra due termini successivi di una serie, ovvero $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ è un numero minore di uno, allora la serie Σu_n converge, se è maggiore di uno diverge.

CRITERIO DELLA RADICE ENNESIMA

Se la radice ennesima del termine ennesimo di una serie (preso in valore assoluto) tende a un numero minore di uno (per n tendente ad infinito) allora la serie Σu_n converge. Se è maggiore di uno diverge.

CRITERIO DELL'INTEGRALE

La funzione f(n) , con n intero positivo, converge (o diverge) se f(x) è positiva per $x \geq a$ e l'integrale di f(x) esteso da a ad infinito converge (o diverge).

SERIE A SEGNO ALTERNO

Si abbia una serie $\sum (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$.
La serie convergerà se $a_{n+1} \leq a_n$ ed inoltre a_n tende a zero per n tendente ad infinito.

Esempio $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$ convergerà.

CONVERGENZA UNIFORME DI UNA SUCCESSIONE

Si è detto che una successione di funzioni $\{u_n(z)\}$ converge ad una funzione U, se è possibile trovare un valore dell'indice N tale che per ogni n>N sia $|u_n - U| < \varepsilon$. Con ε numero positivo assegnato.
In genere il valore di N dipende da punto z dove vengono calcolate le funzioni.
Se ciò non accade, ovvero se il valore di N dipende solo da ε, e non dal particolare punto z di una regione R, si dice che la successione ha una **convergenza uniforme** nella regione data.
Dato che la convergenza delle serie si riconduce alla convergenza di una particolare successione (quella delle somme parziali) si definisce la convergenza uniforme delle serie in modo analogo.

1) Una serie uniformemente convergente di funzioni continue può essere integrata termine a termine, ovvero:

$$\int_C \Sigma\, u_n(z)\, dz = \Sigma \int_C u_n(z)\, dz$$

2) Se $\{u_n\}$ sono analitiche e $\Sigma u_n(z)$ è uniformemente convergente in R, allora $S = \Sigma u_n(z)$ è analitica in R.

SERIE DI POTENZE

1) Una serie di potenze ha una convergenza uniforme ed assoluta all'interno del suo cerchio di convergenza.
2) Una serie di potenze può essere derivata termine a termine in ogni regione posta all'interno del cerchio di convergenza.
3) Una serie di potenze può essere integrata termine a termine in ogni regione posta all'interno del cerchio di convergenza.

TEOREMA DI TAYLOR

Sia f(z) analitica dentro una regione G e sulla sua frontiera. Quest'ultima sia una linea semplice e chiusa, e siano *a* ed *a+h* due punti di G. Si può sviluppare f(z), nei dintorni di a, come segue:

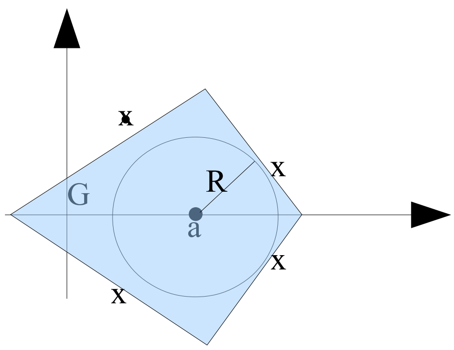
$$\boxed{f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+f''(a)\frac{(z-a)^2}{2!}+f'''(a)\frac{(z-a)^3}{3!}+\ldots}$$

La precedente discende da

$$\text{(1)}\qquad f(a+h)=f(a)+f'(a)h+f''(a)\frac{h^2}{2!}+f'''(a)\frac{h^3}{3!}+\ldots$$

avendo posto z=a+h.

Il **raggio di convergenza** della precedente è $|z-a|<R$, dove R è la distanza fra *a* e la più vicina delle singolarità di f(z).



Nella figura le x indicano singolarità della f(z). Nella regione G indicata in figura, la f(z) è analitica. Essa è perciò sviluppabile con Taylor attorno al punto a di G. Il raggio di convergenza dello sviluppo coincide col raggio del cerchio indicato (distanza fra a e la più vicina delle singolarità).

Se nella precedente a=0 la serie è detta di **Maclaurin**.

Usando lo sviluppo di Maclaurin si ricava:

1) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ...$ $\quad |z| = \infty$

2) $\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} ....$ $\quad |z| = \infty$

3) $\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} ....$ $\quad |z| = \infty$

4) $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - ...$ $\quad |z| < 1$

5) $(1+z)^p = 1 + pz + \binom{p}{2} z^2 + \binom{p}{3} + ...$ $\quad |z| < 1$

Nell'ultima il simbolo $\binom{p}{k}$ rappresenta il **coefficiente binomiale**

$$\frac{p(p-1)(p-2)...(p-k+1)}{k!}$$

Ad esempio $\binom{5}{3} = \frac{5*4*3}{3*2*1}$

TEOREMA DI LAURENT

La formula di Taylor:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{2!} + f'''(a)\frac{h^3}{3!} + ...$$

Ci suggerisce di porre

$$\boxed{f(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + ...}$$

La precedente è detta **formula di Laurent.**

Con tale posizione a_0=f(a) , a_1=f'(a), a_2=f''(a)/2!, ...si possono calcolare con la formula di Cauchy generalizzata:

$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}$

$a_1 = f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}$

$a_2 = \frac{f''(a)}{2!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^3}$

$a_3 = \frac{f'''(a)}{3!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^4}$

Ovvero

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}}$$

Una ulteriore generalizzazione della formula di Laurent si ottiene estendendola alle potenze negative di h. La formula che consente il calcolo dei coefficienti è la stessa (n diviene -n, la curva C è una curva chiusa che giaccia dentro la regione circolare compresa fra due circonferenze C_1,C_2, nella quale f(z) sia analitica.

Con tale generalizzazione lo sviluppo di Laurent si scrive:

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+a_3(z-a)^3+\dots + \frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\frac{a_{-3}}{(z-a)^3}+\dots$$

Questa seconda parte dello sviluppo, relativa ai coefficienti con indice negativo, viene detta **principale** (la prima parte viene detta analitica).

POLI DI ORDINE n

Se nello sviluppo di Laurent esiste il termine $\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$ $(a_{-n} \neq 0)$

allora a viene detto polo di ordine n.

Se una funzione f(z) non è definita in a, ma esiste il limite di f(z) per z tendente ad a, allora a è detta singolarità eliminabile.

Ogni singolarità che non sia un polo e non sia eliminabile è detta essenziale.

TEOREMA DI PICARD

> Nell'intorno di una singolarità essenziale, una funzione per il resto analitica, assume valori qualsiasi.

PROLUNGAMENTO ANALITICO

Si supponga di non conoscere la forma generale di una funzione analitica f(z), ma di sapere che dentro un cerchio di convergenza C_1 essa è rappresentata dalla serie di Taylor:

$f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+ a3(z-a)^3+...$

Scelto un punto b dentro C_1 si può determinare f(b) dalla precedente ed arrivare alla nuova serie:

$f(z)=b_0+b_1(z-b)+b_2(z-b)^2+ b_3(z-b)^3+...$

che ha un cerchio di convergenza C_2. Se C_2 è più ampio si ha che adesso f(z) è calcolabile in una zona più estesa della precedente. Si dice che f(z) è stata prolungata analiticamente oltre C_1 estendendola a C_2.

Il processo si può ripetere alle regioni C_3, C_4..

Nel realizzare il prolungamento occorre che le regioni non comprendano delle singolarità (perché altrimenti in quei punti la serie divergerebbe). Ad esempio non può esservi alcuna singolarità sulla frontiera di C_1 o dentro C_2.

L'insieme di tutte le rappresentazioni possibili in serie di potenze, ovvero l'insieme di tutti i prolungamenti, **coincide con la funzione analitica** f(z).

Esempio 1:

Sviluppare in serie di Taylor la funzione ln(1+z).

Se |z|<1 si ha $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots \quad (\mathit{serie\ geometrica})$

Segue $\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots$

Integrando fra 0 e z si ha:

ln(1+z)= $z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\ldots$

Esempio 2:

Dimostriamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ (serie p) converge per ogni costante reale p>1. Si ha (prendendo due elementi della serie)

$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\leqslant\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}$ Ovvero

$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\leqslant\frac{1}{2^{p-1}}$

ed anche (prendendo quattro elementi della serie)

$\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\leqslant\frac{1}{4^{p-1}}$

La nostra serie è allora minore della serie geometrica, di ragione $\frac{1}{2^{p-1}}$:

1+ $\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{4^{p-1}}+\ldots$

Se la ragione è minore di 1, ovvero se p>1 allora la serie p converge al valore

S= $\frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}$

Esempio 3:

Dimostrare che le serie (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ e (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$ sono il prolungamento analitico l'una dell'altra.

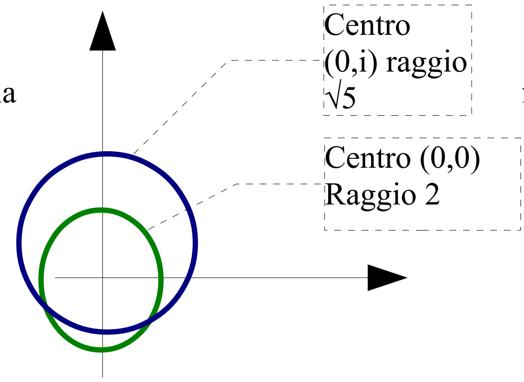
Consideriamo due termini consecutivi della serie (a)

$u_n = \frac{z^n}{2^{n+1}}$ $u_{n+1} = \frac{z^{n+1}}{2^{n+2}}$ Il criterio del rapporto impone, per la convergenza, che il rapporto $|u_{n+1}/u_n|$ sia minore di 1. Allora $|u_{n+1}/u_n| = \left|\frac{z}{2}\right| < 1$; $|z|<2$.

In questo cerchio (raggio 2) la serie (geometrica di ragione z/2 e primo termine $\frac{1}{2}$) converge al valore S= $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ = $\frac{1}{2-z}$

Applicando il criterio del rapporto alla serie (b) si ha che essa converge se $\left|\frac{z-i}{2-i}\right| < 1$, cioè $|z-i| < \sqrt{5}$ In questo cerchio [centro (0,i) e raggio $\sqrt{5}$] la serie (geometrica) converge anche questa volta al valore S= $\frac{1}{2-z}$

Quindi le due serie sono il prolungamento analitico l'una dell'altra e rappresentano la stessa funzione nella regione che si ottiene **unendo** C1 e C2.



Esempio 3

Dimostrare che la funzione f(z)= $1+z+z^2+z^4+z^8+\dots$ non può essere prolungata analiticamente oltre |z|=1.

Si ha $f(z^2)=1+z^2+z^4+z^8+..$

Allora f(z)=z+f(z^2)

Analogamente f(z)=z+z^2+f(z^4)

f(z)=z+z^2+z^4+ f(z^8)

eccetera; allora i valori di z per cui z=1, z^2=1, z^4=1,... sono tutte singolarità per f(z), ovvero fanno divergere f(z). Tali valori stanno tutte sul cerchio |z|=1. Su un qualsiasi arco di tale cerchio giacciono un numero infinito di singolarità. Tale cerchio non è perciò superabile al fine di ottenere un prolungamento analitico.

TEOREMA DEI RESIDUI

Sia f(z) ad un sol valore e analitica sul cerchio C ad eccezione del punto a, al centro del cerchio.

Possiamo sviluppare f(z) attorno ad a come segue :

f(z)= $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ (serie di Laurent)

Ovvero

f(z)= $a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+a_3(z-a)^3+...$ (1)

$+a_{-1}\frac{1}{z-a}+a_{-2}\frac{1}{(z-a)^2}+a_{-3}\frac{1}{(z-3)^3}+...$

Le costanti a_n si ricavano dalla formula derivata dall'**integrale di Cauchy**, ovvero

$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$, valida per valori positivi, negativi o nulli. Per n = -1 quest'ultima porge:

$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$ Ovvero

(2)

$$\boxed{\oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1} \qquad \text{(formula del residuo)}}$$

La precedente consente il calcolo della circuitazione di una funzione f(z) che sia analitica ad eccezione del punto a, lungo una linea chiusa che racchiuda il punto a. Tale formula è importante poiché nel caso in cui il residuo sia un polo è facile calcolare il residuo della funzione nel polo (vedremo fra poco come effettuare il calcolo), e quindi è facile calcolare la circuitazione di f(z).

Ovvero, integrando membro a membro la (1) attorno ad un cerchio di centro a, l'unico coefficiente che rimane è proprio a_{-1} (**residuo** di f(z) in z=a)

Ciò è indicato dalla (2), ma discende direttamente integrando membro a membro la (1), Infatti

1) $\oint_C a_0 dz = a_0 \oint_C dz$ *Sul cerchio C si ha |z-a|=r (r=raggio cerchio)*

Ovvero $z-a=r e^{i\theta}$; $z=a+r e^{i\theta}$; $dz=ri\theta e^{i\theta} d\theta$

L'integrale diviene

$$a_0 r i \oint_C e^{i\theta} d\theta = a_0 r i \int_0^{2\pi} (\cos\theta + i \sin\theta) d\theta = 0$$

2) *Analogamente si dimostra che* $\oint_C (z-a)^n dz = 0$ *(se a interno al cerchio C)*

3) *Per quanto riguarda* $\oint_C \frac{1}{(z-a)^n} dz$ *si ha:*

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^n} dz = \int_0^{2\pi} ir e^{i\theta} \frac{d\theta}{r^n e^{in\theta}} = \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta} d\theta$$

Il precedente integrale ***si annulla per ogni n tranne n=1*** *per cui vale 2iπ*

Quindi tutti gli integrali:

$\oint_C a_{-1}\frac{1}{z-a}dz\,,\oint_C a_{-2}\frac{1}{(z-a)^2}dz\,,\oint_C a_{-3}\frac{1}{(z-3)^3}dz+\ldots$ *sono tutti nulli tranne il primo, che vale* $a_{-1}\ 2\pi i$. *Segue quanto indicato dal teorema dei residui, ovvero*

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz$$

oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

CALCOLO DEL RESIDUO IN UN POLO

Per ottenere il residuo a_{-1} di una funzione f(z) in z=a, nel caso in cui *a* sia un polo di ordine n, si può utilizzare una formula molto semplice:

(3)
$$\boxed{a_{-1}=\lim_{z\to a}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]}$$

Se la molteplicità del polo è 1 (polo semplice) la formula diviene:

(4)
$$a_{-1}=\lim_{z\to a}\frac{d}{dz}[(z-a)f(z)]$$

Esempio: Sia $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$; Il valore z=1 è un polo semplice, mentre il valore z=-1 è un polo doppio.

Usando la formula per il polo semplice z=1 si ha

residuo in z=1= $\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} = \lim_{z\to 1}\frac{z}{(z+1)^2} = \frac{1}{4}$

Mentre per il residuo nel polo doppio z=-1 si ha:

$$\lim_{z\to -1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d^2}{dz^2}(z+1)^2\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$$

$$= \lim_{z\to-1} \frac{d^2}{dz^2}\frac{z}{(z-1)} = \lim_{z\to-1} \frac{d}{dz}\frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \lim_{z\to-1} \frac{d}{dz}\frac{-1}{(z-1)^2}$$

$$= \lim_{z\to-1} \frac{2(z-1)}{(z-1)^4} = \lim_{z\to-1} \frac{2}{(z-1)^3} = -\frac{1}{4}$$

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

CALCOLO DEL RESIDUO NEL CASO
DI SINGOLARITA' ESSENZIALI

Se un punto *a* è una singolarità (ovvero nel punto *a* la funzione non è derivabile, in quanto la derivata non esiste), ma non è un polo, né è una singolarità eliminabile [è eliminabile se esiste $\lim_{z\to a} f(z)$, ma tale limite è diverso dal valore della funzione] allora la singolarità è detta **essenziale**.
Si può calcolare il residuo di una funzione analitica tranne che nel punto a, utilizzando lo sviluppo in serie.

Esempio. La funzione $f(z)=e^{-1/z}$ ha una singolarità essenziale in z=0 . Infatti

se $f=e^{-1/z}$ si ha $\quad y=\ln f=-\frac{1}{z} \qquad \frac{df}{dz}=\frac{df}{dy}\frac{dy}{dz}$

Essendo $f=e^y$, si ha $\quad \frac{df}{dy}=e^y=f(z)$, mentre $\quad \frac{dy}{dz}=\frac{1}{z^2}$

Allora $\quad \frac{df}{dz}=\frac{e^{-1/z}}{z^2}$ Ne segue che la derivata non esiste in z=0, perciò la funzione non è analitica in tale punto. Inoltre non esiste il $\lim_{z\to 0} e^{-1/z}$ (perché ?)
Perciò la singolarità è essenziale.

Ma se sviluppiamo con Taylor la funzione otteniamo:

$$e^{-1/z}=1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{3!z^3}+...$$

Vediamo che il residuo in z=0 è il coefficiente di $\frac{1}{z}$ che vale -1.

TEOREMA DEI RESIDUI

Abbiamo visto che se si ha una funzione z (ad un sol valore) analitica in una regione R tranne il punto a, la circuitazione di f(z) lungo una curva chiusa che racchiuda al suo interno il punto a, si calcola con la formula del residuo:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1} \qquad \text{(formula del residuo)}$$

Se la curva C abbraccia non solo la singolarità a, ma anche le singolarità b,c...
la precedente si può generalizzare:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i [a_{-1} + b_{-1} + c - 1 + ...] \qquad \text{(formula dei residui)}$$

Naturalmente b_{-1} è il residuo di f(z) nel punto b, c_{-1} è il residuo di f(z) nel punto c, eccetera.

Esempio Si è visto che la funzione $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$ *ha due residui; uno, di valore ¼ nel punto a=1; l'altro di valore -1/4 nel punto b=-1. Perciò la circuitazione lungo una curva che abbracci i due poli , essendo proporzionale alla somma dei residui, si annulla.*

°°

CALCOLO DI INTEGRALI DEFINITI

Il calcolo di integrali definiti può essere fatto utilizzando il teorema dei residui.

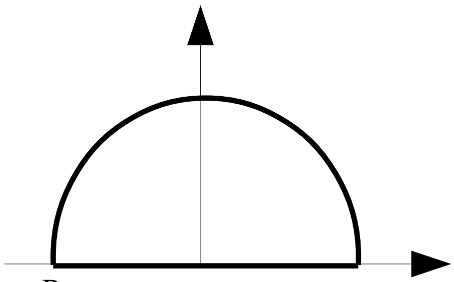
Il particolare si può calcolare il seguente integrale:

$\int_{\infty}^{+\infty} F(x)\,dx$ essendo f(x) una funzione razionale.

Al posto dell'integrale precedente si può calcolare il seguente

$\oint_c F(z)\,dz$

utilizzando il teorema dei residui. Come curva chiusa C si userà un semicerchio SC di raggio R, ed estremi nei punti A(-R,0) e B(R,0), unitamente al diametro AB (figura)



Facendo tendere R ad infinito, la variabile reale x varierà da -∞ ad +∞. Quindi l'integrale di f(z) nel tratto -R,R è quello cercato (R tende ad infinito). Mentre l'integrale lungo il semicerchio, se $|F(z)| \le \frac{M}{R^k}$ essendo M e k>1 delle costanti, quando R tende ad infinito, è nullo.

Infatti sappiamo che $|\int_C F(z)\,dz| \leqslant ML$ *(essendo M una limitazione superiore per |F(z)| ed L la lunghezza della linea di integrazione. Allora*

$$|\int_{SC} F(z)\,dz| \leqslant \frac{M}{R^k}\pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}}$$

Quindi il limite di $|\int_{SC} F(z)\,dz|$ *per R tendente ad infinito, è nullo.*

Esempio:

Calcoliamo $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$

La funzione è pari, cioè è simmetrica rispetto all'asse y. Possiamo perciò calcolare

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$ *e dividere per 2 il risultato.*

Per calcolare quest'ultimo integrale utilizziamo il metodo dei residui che afferma che

$$\oint_C F(z)dz = 2\pi i(a_{-1}+b_{-1}+...)$$

Essendo a_{-1}, b_{-1}, i residui di F(z) lungo una linea chiusa che abbraccia tutte le singolarità. Nel nostro caso, essendo f(z)= $\frac{1}{z^6+1}$ *polinomiale, le singolarità sono dei poli. L'equazione $z^6+1=0$, mi dà tali poli.*

$z^6=r^6\, e^{6i\theta} = -1$;

Le radici ennesime di -1 si ricavano cercando quei valori di z tali che

$z^n=-1$ ma $z=r\, e^{i\theta}$; allora $r^n\, e^{ni\theta}= -1= e^{ik\pi}$; segue $r=1$; $n\theta=\pi k$; $\theta=\frac{k\pi}{n}$

(con k dispari, poiché cos (kπ) se k è pari vale 1)

Con k=1 si ha: $\theta=\frac{\pi}{6}$; *Con k=7* $\theta=\frac{7\pi}{6}$

Con k=3: $\theta=\frac{3\pi}{6}$; *Con k=9* $\theta=\frac{9\pi}{6}$

Con k=5 $\theta=\frac{5\pi}{6}$; *Con k=11* $\theta=\frac{11\pi}{6}$

Sono poli allora $e^{\pi i/6}$; $e^{3\pi i/6}$; $e^{5\pi i/6}$; $e^{7\pi i/6}$; $e^{9\pi i/6}$; $e^{11\pi i/6}$;

Solo i primi tre poli si trovano all'interno della curva chiusa C (semicerchio da +R a -R chiuso dal diametro), e sono poli semplici.

Usando la regola $a_{-1}=\lim_{z\to a}[(z-a)\, f(z)]$ (calcolo del residuo di f(z) nel polo semplice a), il residuo del primo polo vale:

a$_{-1}$= $\lim_{z\to e^{\pi i/6}} (z-e^{\pi i/6})\dfrac{1}{z^6+1}$

Tale limite si può ricavare con L'Hospital:

a$_{-1}$= $\dfrac{1}{6}e^{-5\pi i/6}$ *Analogamente gli altri due residui sono:*

b$_{-1}$= $\dfrac{1}{6}e^{-5\pi i/2}$

c$_{-1}$= $\dfrac{1}{6}e^{-25\pi i/6}$

Allora l'integrale (da -∞ a +∞) vale:2πi[$\dfrac{1}{6}e^{-5\pi i/6}$ + $\dfrac{1}{6}e^{-5\pi i/2}$ + $\dfrac{1}{6}e^{-25\pi i/6}$

] = $\dfrac{2\pi}{3}$.

L'integrale richiesto avrà un valore dimezzato, cioè π/3

ooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo

PRODOTTI INFINITI

Siano w_k funzioni di z, (k=1,2,3..) e sia sia $w_k \neq -1$ per ogni k.

Consideriamo il prodotto infinito: $\prod_{k=1}^{\infty}(1+w_k)$ =$(1+w_1)(1+w_2)(1+w_3)$....

(NOTA: se in una formula appare il simbolo di produttoria ∏ o di sommatoria ∑ , senza che vengano indicati gli estremi a cui si estende il prodotto o la somma, si sottintende che tali estremi siano 1 ed ∞)

Per stabilire se tale prodotto infinito converge ad un limite P, formiamo i **prodotti**

parziali: $P_n = \prod_{k=1}^{n} (1+w_k)$

Se esiste il lim $_{n\to\infty}$ P_n , e tale limite vale $P\neq 0$, diciamo che il prodotto infinito converge al valore P.
Se qualche fattore $(1+w_i)$ è nullo (ma non tutti) diciamo che il prodotto infinito converge a zero.

CONVERGENZA ASSOLUTA

Se $\prod (1+|w_k|)$ converge, allora il prodotto infinito $\prod (1+w_k)$ convergerà senz'altro (si dice che converge **assolutamente**).

Come succede per le serie assolutamente convergenti, in un prodotto infinito assolutamente convergente si può scambiare l'ordine dei fattori senza che il valore del prodotto cambi.

Se $\prod (1+|w_k|)$ diverge, allora il prodotto infinito $\prod (1+w_k)$ può darsi che converga o che diverga. Se converge si dice che converge **condizionatamente**.

CONVERGENZA UNIFORME

Sia $P_n = \prod_{k=1}^{n} (1+w_k)$.
La convergenza di un prodotto infinito richiede che il limite
lim $_{n\to\infty}$ P_n esista e valga $P(z)\neq 0$.

Ovvero che esista un valore N dell'indice, tale che per ogni n>N sia
$|P_n(z)-P(z)|<\varepsilon$ (essendo ε positivo assegnato)

Se il valore N dipende solo da ε, e non dalla particolare z appartenente ad una regione R, si dice che il prodotto infinito **converge uniformemente** in R.

TEOREMI SUI PRODOTTI INFINITI

1) Condizione necessaria, ma non sufficiente affinché il prodotto infinito:

$\prod(1+w_k)$ converga è che lim $_{k\to\infty}$ w_k =0.

2) Se la serie $\sum|w_k|$ converge, allora il prodotto infinito $\prod|w_k|$ converge (quindi anche il prodotto infinito $\prod w_k$ converge)

3) Se in una regione R ciascuna w_k (k=1..∞) è limitata superiormente (ovvero $|w_k|<M_k$) e la somma dei limiti superiori M_k è convergente, allora il prodotto infinito $\Pi(1+w_k)$ e **uniformemente convergente**.

4) Se le funzioni w_k (k=1..∞) sono analitiche in una regione R e la serie Σw_k è uniformemente convergente, allora la produttoria $\Pi(1+w_k)$ è convergente ad una funzione analitica in R.

TEOREMA DI WEIESTRASS

Sia f(z) analitica per tutti i valori di z (funzione **intera**).
Inoltre f(z) abbia infiniti zeri **semplici** in a_i (i=1..∞) .
Gli zeri a_i siano ordinati secondo moduli crescenti, ovvero $|a_1|<|a_2|<|a_3|<$...
con il modulo del primo zero diverso da zero, ed il modulo dei successivi zeri sempre più grande in modo che lim $_{n\to\infty}$ $|a_n|=\infty$.
Allora f(z) può essere posto sotto forma di produttoria come segue:

$$f(z)=f(0)e^{z\frac{f'(0)}{f(0)}}\prod(1-\frac{z}{a_k})e^{\frac{z}{a_k}} \qquad \textbf{Weierstrass}$$

(NOTA: la formula richiede che sia f(0)≠0, ovvero che il primo zero abbia modulo

diverso da zero, altrimenti verrebbe f(z)=0 per ogni zero)

Se gli zeri sono multipli vale una formula che è una generalizzazione della precedente e che non riportiamo.

FUNZIONI ELEMENTARI COME PRODOTTI INFINITI

Si può dimostrare che

sin(z)= $z\prod(1-\frac{z^2}{k^2\pi^2})$ (nel prodotto k varia fra 1 ed ∞)

cos z= $\prod(1-\frac{z^2}{(h\pi/2)^2})$ (h intero **dispari**)

Le dimostrazioni non sono facili.

FUNZIONE GAMMA

Se la **parte reale di z è positiva**, la funzione Γ(z) è definita dal seguente integrale:

$$\boxed{\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt}$$

Si verifica subito che Γ(z) gode della relazione di ricorrenza:

(a) $$\boxed{\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)}$$

Infatti (b) Γ(z+1)= $\int_0^\infty t^z e^{-t}dt$

Mentre zΓ(z)= z $\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ =z { $[\ e^{-t}\frac{t^z}{z}]_0^\infty-\int_0^\infty \frac{t^z}{z}*e^{-t}(-1)dt$ }

(abbiamo integrato per parti)

Il primo termine della differenza è nullo. Allora zΓ(z)= $\int_0^\infty t^z e^{-t}dt$.

Segue la relazione di ricorrenza.

Ponendo Γ(0)=1 per definizione {Γ(0) non è calcolabile dalla definizione, poiché questa vale solo per Reale[Γ(z)]>0} la formula ricorsiva consente il calcolo di Γ(1),Γ(2),Γ(3)...

Infatti se z è un numero n intero positivo

si ha: Γ(n+1)= n Γ(n)

Inoltre ponendo n=1 si ha

Γ(2)=1*Γ(1)=1

Γ(3)=2*Γ(2)=2

Γ(4)=3*Γ(3)=3*2

Γ(5)=4*Γ(4)=4*3*2

….

Allora

$$\boxed{\mathbf{\Gamma(n+1)=n!}}$$

Perciò la funzione Gamma è una generalizzazione del **fattoriale**.

Esempio:

La funzione Γ(z) può essere ricavata per qualsiasi valore di z, ad esempio può essere ricavata per z uguale ad 1/2. Si ha:

Γ(z)= $\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t}\,dt$ *ponendo t=x², si ha* *dt=2x dx*

Γ(z)= $2\int_0^\infty \frac{x^{2(z-1)}}{e^{x^2}}\,x\,dx = 2\int_0^\infty \frac{x^{2z-1}}{e^{x^2}}\,dx$

Ponendo z= $\frac{1}{2}$ *si ha* *Γ(* $\frac{1}{2}$ *)=2* $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$

Si dimostra che quest'ultimo integrale vale $\sqrt{\pi}$

La relazione Γ(1/2)= $\sqrt{\pi}$ può essere derivata da una relazione più generale:

$$\boxed{\Gamma(z)*\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)}}$$

(c)

Dimostriamo che la formula vale per z reale e compreso fra 0 ed 1 (estremi esclusi).

Successivamente, dopo aver chiarito il concetto di ***prolungamento analitico****, si dimostrerà che la formula può essere estesa agli altri valori di z per prolungamento analitico.*

Dalla definizione [valida per Re(z)>0]: $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$

ponendo $t=x^2$ *si ha* $\Gamma(z)=2\int_0^\infty x^{2z-1}e^{-x^2}\,dx$

da cui $\Gamma(1-z)=2\int_0^\infty x^{2(1-z)-1}e^{-x^2}\,dx$; $\Gamma(1-z)=2\int_0^\infty x^{1-2z}e^{-x^2}\,dx$

Cambiamo nome alla variabile muta x dell'integrale, ottenendo

$$\Gamma(1-z)=2\int_0^\infty y^{1-2z}e^{-y^2}\,dy$$

Allora $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=4\int_0^\infty x^{2z-1}e^{-x^2}dx\int_0^\infty y^{1-2z}e^{-y^2}dy$ =

$$4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2z-1}e^{-(x^2+y^2)}dx\,y^{1-2z}dy \;=\; 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\frac{y^{1-2z}}{x^{1-2z}}dx\,dy$$

(passando alle coordinate polari: x=r cos θ; y=r sin θ)

= $4\int_0^\infty\int_0^{\pi/2} r\,e^{-r^2}\tan^{1-2z}(\theta)\,dr\,d\theta$ *ed essendo* $\int_0^\infty r\,e^{-r^2}dr=\frac{1}{2}$ *si ha:*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=2\int_0^{\pi/2}(\tan\theta)^{1-2z}\,d\theta \;=$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=2\int_0^{\pi/2}(\tan^2\theta)^{\frac{1-2z}{2}}\,d\theta$$ *ponendo* $\tan^2\theta=x$;

Si ha $2\dfrac{\tan\theta}{\cos^2\theta}d\theta = dx\,;$ *ma* $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$ *Quindi:*

$$2\sqrt{x}(1+x)d\theta = dx \qquad d\theta = \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

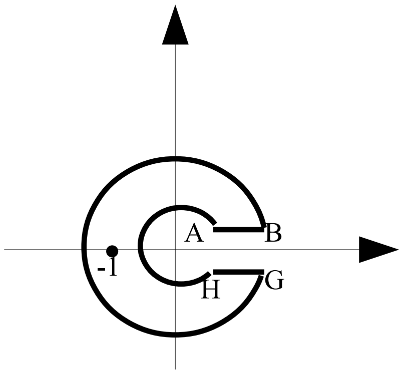
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 2\int x^{\frac{2-2z-1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} =$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = 2\int_0^\infty x^{\frac{2-2z}{2}} x^{\frac{-1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)}dx$$

avendo posto p=1-z

L'integrale $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)}dx$ *(0<p<1) è un integrale fondamentale, e si risolve facilmente col* ***teorema dei residui****.*

Si consideri infatti l'integrale $\oint \frac{z^{p-1}}{(1+z)}dz$ *. poiché z=0 è un punto di diramazione prendiamo come curva chiusa C di integrazione una curva che lasci fuori l'origine z=0, ad esempio quella di figura:*



(i raggi dei due cerchi siano R→∞ ed ε→0)

I tratti AB, GH giacciono entrambi sull'asse x; sono stati disegnati staccati per chiarezza. L'integrando ha un solo polo, z=-1, interno alla curva chiusa C.

Il residuo in z=-1, ovvero $z=e^{i\pi}$ *si trova con la formula dei residui:*

$$a_{-1} = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z_0)]$$

Nel nostro caso

$$a_{-1}=\lim_{z\to-1}[(z+1)\frac{z^{p-1}}{1+z}]=(-1)^{p-1}=e^{i\pi(p-1)}$$

poiché il teorema dei residui afferma che, con z analitica in ogni punto tranne z_0, *si ha*

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i a_{-1}$$

nel nostro caso $\oint \frac{z^{p-1}}{(1+z)}dz=2\pi i e^{i\pi(p-1)}$,

ovvero, omettendo l'integrando

$$\int_{AB}+\int_{BG}+\int_{GH}+\int_{HA} ¿ \; = \; 2\pi i e^{i\pi(p-1)}$$

Svolgendo i calcoli [per R→∞, ed ε→0 il secondo ed il quarto integrale si annullano, lungo AB si ha z=x ed i limiti sono ϵ *,R; lungo BG si ha* $z=Re^{i\theta}$ *ed i limiti sono 0, 2π; lungo GH* $z=x\,e^{2\pi i}$, *ed i limiti sono R, ε; infine lungo HA* $z=\varepsilon\, e^{i\theta}$ *ed i limiti sono 2π, 0]*

si ricava proprio la relazione cercata.

§§

Se due funzioni sono analitiche in R,

e sono uguali in un punto di R,

allora sono uguali in ogni punto di R.

Consideriamo la funzione $f(z)=f_1(z)-f_2(z)$*. Tale funzione è analitica in R, inoltre è* $f(z_0)=0$*. Segue che* $f(z)=0$ *per ogni z di R.*

§§

PROLUNGAMENTO ANALITICO
NEL CASO GENERALE

Abbiamo già visto il concetto di prolungamento analitico, applicato a funzioni analitiche rappresentate con serie di Taylor, ovvero con una serie del tipo:

$f_1(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + a_3(z-a)^3 + \dots$

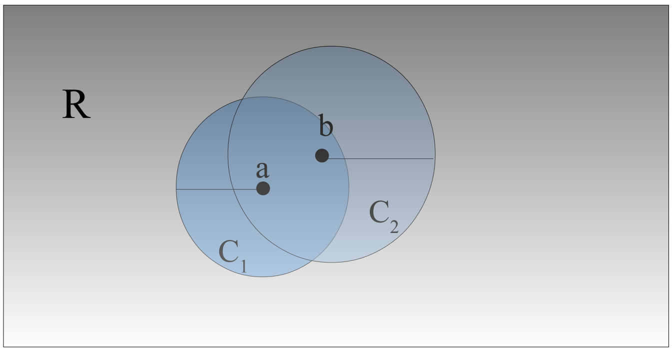
Tale serie è convergente, se $f_1(z)$ è analitica entro una regione R, e se *a* è un punto di R. Tale serie è convergente non solo per il punto a, ma anche per ogni punto di una circonferenza C_1 di centro a e raggio R_1, che giaccia dentro R (C_1=primo cerchio di convergenza)

Dalla precedente possiamo determinare i valori $f_1(b)$, $f_1'(b)$, $f_1''(b)$... di $f_1(z)$ e delle sue derivate nel punto b appartenente al primo cerchio , e definire così una seconda funzione:

$f_2(z) = b_0 + b_1(z-b) + b_2(z-b)^2 + b_3(z-b)^3 + \dots$

(b_1, b_2, b_3 dipendono dai valori $f_1(b)$, $f_1'(b)$, $f_1''(b)$...)

che ha cerchio di convergenza C_2. Se C_2 si estende oltre C_1, come appare in figura, possiamo dire che $f_2(z)$ è un **prolungamento analitico** di $f_1(z)$



Possiamo scegliere un nuovo punto dentro C_2 e ripetere il procedimento. In questo modo prolunghiamo analiticamente $f_2(z)$, ottenendo la funzione $f_3(z)$.

Eccetera.

La funzione f(z)= $\begin{Bmatrix} f_1(z)\, per\, z \in R_1 \\ f_2(z)\, per\, z \in R_2 \\ f_3(z)\, per\, z \in R_3 \\ \dots \end{Bmatrix}$ è analitica nella regione che si ottiene unendo R_1,R_2,R_3...

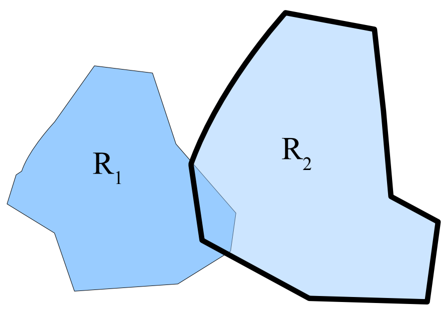
Le varie funzioni: $f_1, f_2, f_3...$, che sono prolungamenti analitici l'una dell'altra, si dicono **elementi** di $f(z)$.

Se abbiamo n prolungamenti analitici, possediamo n rappresentazioni (di tipo polinomiale) della medesima funzione $f(z)$. L'insieme di tutte le rappresentazioni $f_1, f_2, f_3...$ di $f(z)$ coincide, per definizione, con la funzione stessa.

Nel realizzare un prolungamento analitico occorre evitare le singolarità. In alcuni casi le singolarità sono tante da impedire il prolungamento analitico (**frontiera naturale**).

Nel caso generale il prolungamento analitico di una funzione analitica $f_1(z)$, quale che sia la sua rappresentazione, può essere definito come segue:

$f_1(z)$ sia analitica in una regione R_1, e ci sia una funzione $f_2(z)$ che sia analitica in una regione R_2 che abbia dei punti in comune con R_1 (l'intersezione non sia nulla), come accade in figura:



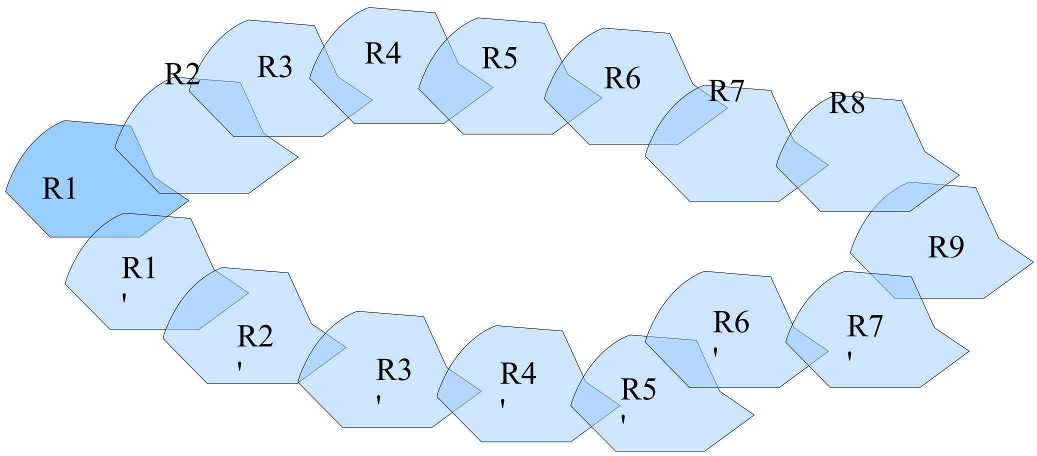
Diciamo allora che $f_2(z)$ è un prolungamento analitico di $f_1(z)$

[è sufficiente che R_1, R_2 abbiano in comune solo un tratto di frontiera].

Il caso più interessante di **prolungamento analitico** (quello cioè a cui si fa riferimento di solito utilizzando questo termine) è quello in cui R_2 comprende R_1 come suo sottoinsieme proprio, e si può dimostrare che la funzione f_2 è uguale alla funzione f_1 in almeno un punto di R_1. Sappiamo allora che **f_2 è uguale ad f_1 in tutti i punti di R_1**. La funzione f_2 è cioè una funzione coincidente con f_1 nella regione in cui f_1 è definita, ma differisce da f_1 per avere una regione di analiticità più ampia.

UNICITA' DEL PROLUNGAMENTO ANALITICO

Possiamo prolungare una funzione da una regione R_1 successivamente fino a pervenire alla regione R_n. E ciò può essere fatto lungo due percorsi differenti, come indica la figura:



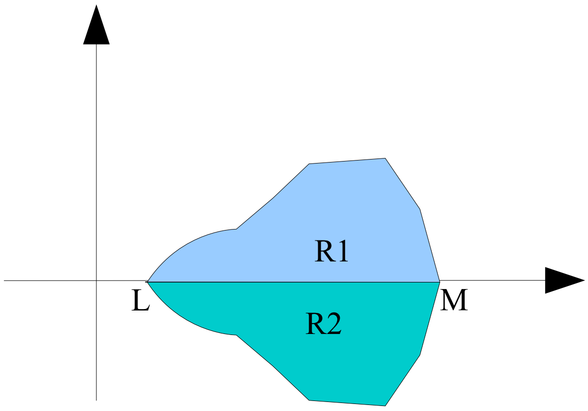
Se i due percorsi che collegano le due regioni iniziale e finale, non comprendono singolarità, i due prolungamenti analitici sono equivalenti. Ovvero se si perviene a due funzioni f_1,f_2 che sono prolungamenti di f sulla stessa regione R, si dimostra che f_1=f_2.

Se si ottengono risultati diversi si può dimostrare che fra i due percorsi vi è un punto di diramazione.

Per questa via si arriva ai vari rami di una funzione a più valori.

Si è visto come si possa prolungare analiticamente funzioni che ammettano una rappresentazione di Taylor.
Vedremo come si possano prolungare analiticamente funzioni con altre rappresentazioni (ad esempio integrali)

PRINCIPIO DI RIFLESSIONE



Sia data una funzione $f_1(z)$, analitica nella regione R_1 indicata in figura, e sia reale il valore di $f_1(z)$ lungo il tratto LM dell'asse reale.

La funzione $f_2(z)= \overline{f_1(\overline{z})}$ è analitica nella regione R_2 speculare di R_1 rispetto all'asse reale. E ***poiché R_2 ed R_1 hanno dei punti in comune, e su quei punti $f_1=f_2$,*** $f_2(z)$ è un prolungamento analitico di $f_1(z)$.

Se una funzione f(z), analitica in R, è nulla in un punto di R allora è nulla in ogni punto di R.

Infatti in un cerchio di convergenza C_1 con raggio z_0 possiamo sviluppare con Taylor ottenendo:

$$f(z)=f(z_0)+(z-z_0)f(z_0)+\frac{(z-z_0)^2}{2!}f''(z0)+\frac{(z-z_0)^3}{3!}f'''(z_0)\ \ldots$$

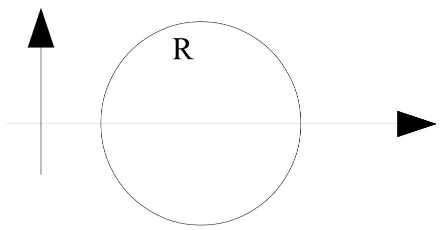
Se $f(z_0)=0$ si vede allora che in tutti i punti di C_1 la funzione si annulla.

Ripetendo il ragionamento per un punto z_1 interno a C_1 si trova un nuovo cerchio di convergenza C_2 (tale che $C_1 \cup C_2$ è più esteso di C_1) entro il quale f(z) si annulla. Si può ripetendo il ragionamento fino a che l'unione dei cerchi di convergenza copre R, verificando l'asserto.

°°

Se l'identità $\cos^2 z+\sin^2 z=1$ è valida per ogni z reale, essa è valida per ogni z complesso.

Consideriamo la funzione f(z)= $\cos^2 z+\sin^2 z-1$ e sia R una regione circolare del piano con centro sull'asse x (fig)



Dato che sin(z), cos(z) sono analitiche in R (le derivate delle due funzioni esistono per tutti i punti di R), ne segue che f(z) è analitica in R. Inoltre f(x)=0 su tutti i punti dell'asse x. Quindi per quanto detto nell'esempio 1, f(z)=0 in tutti i punti della regione R. Facendo tendere il raggio della regione R ad infinito si abbraccerà tutto il piano complesso. Segue l'assunto.

°°

Esercizio 1:

Dimostrare che la funzione $f_1(z)=$ $z-z^2+z^3-z^4+\ldots$ è analitica nella regione $|z|<1$ (regione interna al cerchio di raggio unitario).

Trovare una funzione che rappresenti l'insieme di tutti i prolungamenti analitici di $f_1(z)$.

La serie converge, per il criterio del rapporto [se $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1$ *la serie converge, se il rapporto è maggiore di 1, la serie diverge, se è uguale ad 1 nulla si può dire] .*

Il teorema di Taylor afferma che se f(z) è analitica essa si può sviluppare sotto serie di potenze. Vale anche il contrario: se una serie di potenze converge al valore f(z) allora f(z) è analitica.

Per $|z|<1$ la serie, prodotto di z per la serie geometrica $1+d+d^2+d^3+..$ con $d=-z$, converge alla funzione

$$f_2(z)=\frac{1}{1-d}=\frac{1}{1+z}$$

Questa funzione è analitica in tutti i punti del piano, eccetto $z=-1$ che è esterno al cerchio di raggio unitario. Dato che all'interno del cerchio di raggio unitario si ha $f_2=f_1$ ne segue che f_2 fornisce l'insieme dei prolungamenti analitici di f_1.

Esercizio 2: Dimostrare che la funzione $f_1(z)=\int_0^\infty t^3 e^{-zt}\,dt$ ***è analitica in tutti i punti del piano per i quali Re(z)>0.***
Trovare una funzione $f_2(z)$ ***che sia un prolungamento analitico di*** f_1 ***nel semipiano sinistro Re(z)<0***

Integrando per parti si trova: $f_1(z)=\int_0^\infty t^3 e^{-zt}\,dt=\frac{6}{z^4}$ *se Re(z)>0.*

La funzione $f_2(z)=\frac{6}{z^4}$ *è analitica in tutti i punti tranne z=0.*

Dato che per z>0 entrambe le funzioni sono analitiche ed $f_1=f_2$*, ne segue che* f_2 *è un prolungamento analitico di* f_1 *nel semipiano sinistro in cui Re(z)<0*

Esercizio: Dimostrare che $\Gamma(-1/2)=-2\sqrt{\pi}$ ***usando il prolungamento analitico di*** $\Gamma(z)$***.***

La funzione $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt$ *è definita per Re(z)>0. Utilizzando la relazione* $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$ *si può estendere la definizione alla regione in cui Re(z)≤0. Ad esempio per z=-1/2 si ha* $\Gamma(1/2)=(-1/2)\Gamma(-1/2)$ *Segue* $\Gamma(-1/2)=-2\Gamma(1/2)=-2\sqrt{\pi}$

§§

FUNZIONE ZETA DI RIEMANN

Questa è una funzione molto importante per la matematica, poiché è in connessione con la distribuzione dei numeri primi.
E' definita per Re(z)>1 come segue:

$$\boxed{\zeta(z)=1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\ldots=\Sigma\frac{1}{z^n}}$$

La zeta di Riemann è cioè la serie formata coi reciproci delle potenze intere di z.

Tale funzione è analitica in ogni punto della regione del piano in cui Re(z)>1, Ovvero in cui Re(z)≥1+δ, con δ numero positivo qualsiasi.

Infatti ogni termine $\frac{1}{k^z}$ *della serie è una funzione analitica.*

Se $x=Re(z)\geq 1+\delta$

si ha: $|\frac{1}{k^z}|=|\frac{1}{e^{z\ln k}}|=\frac{1}{e^{x\ln k}}=\frac{1}{k^x}\leqslant\frac{1}{k^{1+\delta}}$

Dato che $\Sigma\ \frac{1}{k^{1+\delta}}$ *converge, per il criterio M di Weierstrass (vedi criteri di convergenza delle serie) convergerà uniformemente anche* $\Sigma\ \frac{1}{k^z}$

Criterio M di Weierstrass: Se $|u_n(z)|<M_n$ *, con* M_n *indipendente da z in una regione R, e* ΣM_n *converge, allora* $f(z)=\Sigma u_n(z)$ *converge uniformemente in R.*

(la prima serie ha i termini in valore assoluto maggiori dei termini corrispondenti della seconda serie: se la prima converge anche la seconda deve convergere).

Si è detto che se se una serie $\Sigma u_n(z)$ *converge uniformemente in una regione R allora la somma* $f(z)=\Sigma u_n(z)$ *è analitica in R.*

PROLUNGAMENTO ANALITICO DELLA ζ DI RIEMANN

Si è detto che la funzione zeta di Riemann:

$$\boxed{\zeta(z)=\Sigma\ \frac{1}{k^z}}$$

è convergente per Re (z)>1.

Ad esempio per z=2,3,4 si ha

$\zeta(2)=\ 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ =\ \frac{\pi^2}{6}\ \approx 1.64$

$\zeta(3)=\ 1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots\ \approx 1.2;$

$\zeta(4)=1.08$

Tuttavia la definizione di ζ(z) può essere estesa ad altri valori di z per prolungamento analitico.

1) Si dimostra anzitutto che:

$\zeta(z)=\ \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t+1}dt$ [per Re(z)>0 e z≠1]

La formula precedente consente di estendere analiticamente la definizione di ζ(z) all'intervallo 0< Re(z) <1

2) Quindi si dimostra che vale la regola ricorsiva:

$$\zeta(1-z)=\frac{2\,\Gamma(z)}{(2\pi)^z}\ \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right)\ \zeta(z)$$

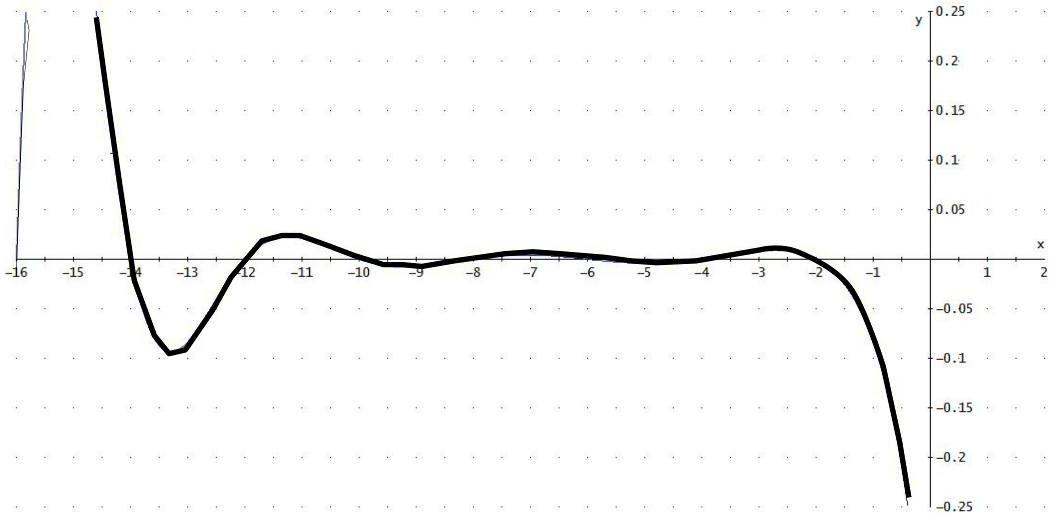
Questa regola consente di estendere per prolungamento analitico la definizione di ζ(z) anche a valori negativi o nulli di Re(z). Ad esempio ponendo in essa z=2 si trova $\zeta(-1)=2\frac{\Gamma(2)}{(2*\pi)^2}\cos\left(\frac{\pi*2}{2}\right)\zeta(2)$ =-0.16

$\zeta(-2)=0;$

ζ(-3)=0,03;

ζ(-4)=0;

Come si vede il valore di ζ(z) per valori di z reali negativi subisce un andamento ondulatorio di ampiezza crescente, come indicato in figura:



La curva si annulla per ogni valore di x negativo pari (-2,-4,-6..).

Tali valori sono detti zeri **banali**.

FORMULA DEL PRODOTTO DI EULERO

La funzione ζ(s) è in relazione con i numeri primi.

Vale infatti la seguente relazione detta FORMULA DEL PRODOTTO di Eulero:

$$\boxed{\frac{1}{\zeta(z)} = \Pi\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)}$$

Nella precedente p_n rappresenta l'ennesimo numero primo, ovvero

$p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$...

La precedente vale per Re(z)>1.

Per dimostrarla partiamo dalla definizione:

(1) $\zeta(z)=1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\frac{1}{5^z}+...$ (convergente per Re(z)>1)

Moltiplichiamo entrambi i membri per $\frac{1}{2^z}$ ottenendo

$$\frac{1}{2^z}\zeta(z)=\frac{1}{2^z}+\frac{1}{4^z}+\frac{1}{6^z}+\frac{1}{8^z}+\frac{1}{10^z}...$$

Sottraendo membro a membro le due equazioni precedenti si vede che i termini di posto pari nella (1) scompaiono, e si ottiene:

(2) $\zeta(z)[1-\frac{1}{2^z}]=1+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{5^z}+\frac{1}{7^z}+\frac{1}{9^z}...$

Adesso vogliamo far sparire dal denominatore precedente tutti i termini del tipo

$\frac{1}{(3k)^z}$ con k=1,2,3...

Quindi moltiplichiamo la (2) per $\frac{1}{3^z}$ ottenendo

$$\zeta(z)[1-\frac{1}{2^z}]\frac{1}{3^z}=\frac{1}{3^z}+\frac{1}{9^z}+\frac{1}{15^z}+\frac{1}{21^z}+\frac{1}{27^z}...$$

Sottraendo quest'ultima dalla (2) si ottiene la

(3) $\zeta(z)[1-\frac{1}{2^z}][1-\frac{1}{3^z}] = 1+\frac{1}{5^z}+\frac{1}{7^z}+...$

Ripetendo il ragionamento si vede che a sinistra della formula compaiono fattori del tipo $1-\frac{1}{p^z}$ mentre a destra scompaiono tutti i termini del tipo

$$\frac{1}{(pk)^z} \quad \text{(k intero)}$$

Per induzione a sinistra si avrà un prodotto di infiniti fattori del tipo

$$\zeta(z)[1-\frac{1}{2^z}][1-\frac{1}{3^z}][1-\frac{1}{7^z}][1-\frac{1}{11^z}]....$$

mentre a destra della formula resterà solo 1.

Allora $\zeta(z)\Pi[1-\frac{1}{p^z}]=1$

§§§

PROLUNGAMENTO ANALITICO DELLA ZETA DI RIEMANN

Si è detto che la definizione della z di Riemann

$$\zeta(z)=\Sigma\frac{1}{n^z}$$

è convergente per Re(z)>1.

Vogliamo trovare un **prolungamento analitico** della ζ(z) ad ogni punto del piano complesso tranne z=1.

Ovvero vogliamo trovare una funzione che coincida con ζ(z) in tutti i punti in cui Re (z)>1, ma che, al contrario di ζ(z) sia analitica anche per Re (z)<1.

Tale prolungamento è

(1) $$\boxed{\zeta(z)=2(2\pi)^{1-z}\Gamma(1-z)\sin(\pi\frac{z}{2})\zeta(1-z)}$$

Tale funzione viene ancora indicata col simbolo ζ(z) , creando una certa confusione. E' chiaro che essa **non è** la funzione zeta di partenza, ovvero

$\zeta(z) = \Sigma \dfrac{1}{n^z}$, ma è solo un **prolungamento analitico** della $\zeta(z)$. Ovvero è una funzione che nel campo di convergenza della serie $\Sigma \dfrac{1}{n^z}$ coincide con la somma della serie, ma che **assume un valore anche per altri valori di z**, nei quali la serie precedente non converge.

Quando viene detto che gli zeri della zeta di Riemann si trovano tutti sulla retta $x = \dfrac{1}{2}$ si vuol dire allora che gli zeri del **PROLUNGAMENTO ANALITICO** della zeta di Riemann si trovano sulla retta $x = \dfrac{1}{2}$

Accenniamo al ragionamento da fare per trovare il prolungamento analitico della zeta di Riemann..

Consideriamo la definizione della funzione gamma:

$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ e poniamo t=ns, con n intero positivo.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-(ns)} (ns)^{z-1} n\, ds$$

Ripristinando la variabile t invece di s:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-(nt)} (nt)^{z-1} n\, dt$$

$$\frac{\Gamma(z)}{n^z} = \int_0^\infty e^{-(nt)} (t)^{z-1} dt$$

Sommando rispetto ad n otteniamo:

(2) $\Gamma(z)\zeta(z)=\Sigma\int_0^\infty e^{-nt}t^{z-1}\,dt$

La Σe^{-nt} è una serie geometrica di ragione d= e^{-nt} perciò la somma vale:

$$\frac{1}{1-d}=\frac{1}{1-e^{-nt}}$$

Allora (3) $\Sigma_1^\infty e^{-nt}=\Sigma_0^\infty e^{-nt}-1 \;=\; \frac{1}{1-e^{-nt}}-1 \;=\; \frac{1}{e^t-1}$

Scambiando l'integrale con la somma nella (2) e utilizzando la precedente si ha:

$$\Gamma(z)\zeta(z)=\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}dt \;=$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}dt \;=\; \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t-1}dt \;+\; \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}dt$$

Il primo integrale:

si può scrivere come segue (controllare):

$$\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t-1}dt \;=\; \int_0^1 [\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}]t^{z-1}dt \;+\; \int_0^1 [t^{z-2}-\frac{t^{z-1}}{2}]dt \;=$$

$$\int_0^1 [\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}]t^{z-1}dt \;+\; \frac{1}{z-1}-\frac{1}{2z}$$

Allora

$$\Gamma(z)\zeta(z) \;=\; \int_0^1 [\frac{1}{e^t-1}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}]t^{z-1}dt \;+\; \frac{1}{z-1}-\frac{1}{2z} \;+$$

$$\int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t-1}dt$$

Essendo Γ(z) una funzione sempre diversa da zero si può dividere per Γ(z).

Dopo una serie di passaggi si ottiene la formula cercata.

§§