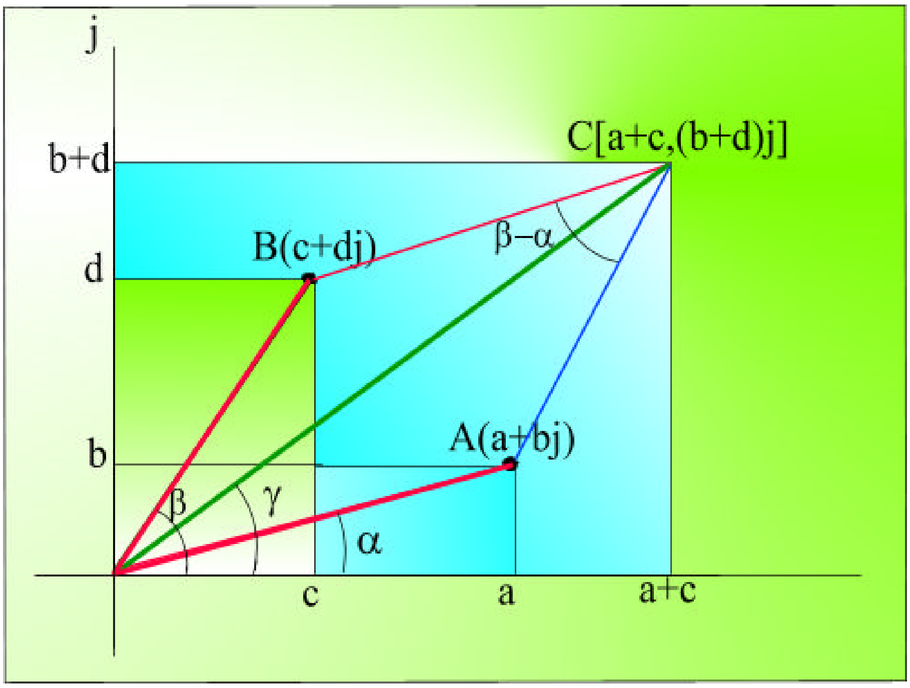
OPERARE CON I NUMERI COMPLESSI

SOMMA



Sinteticamente:

$A = a+bj \quad B = c+dj$

$C = (a+c)+(b+d)j$

$\alpha(A) = \arctan(b/a)$

$\beta(B) = \arctan(d/c)$

$\gamma(C) = \arctan[(b+d)/(a+c)]$

$Mod(A) = \overline{A} = \sqrt{a^2+b^2}$

$\overline{B} = \sqrt{c^2+d^2}$

$\overline{C} = \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$

Mediante delle semplici operazioni otteniamo:

$$\overline{C} = \sqrt{a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac+bd)} =$$

$$= \sqrt{(\overline{A})^2 + (\overline{B})^2 + 2(\overline{A}\,\mathrm{sen}\alpha\,\overline{B}\,\mathrm{sen}\beta + \overline{A}\cos\alpha\,\overline{B}\cos\beta)} =$$

$$= \sqrt{(\overline{A})^2 + (\overline{B})^2 + 2\,\overline{A}\,\overline{B}\,(\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\beta + \cos\alpha\cos\beta)} =$$

poichè per le formule di addizione si ha:

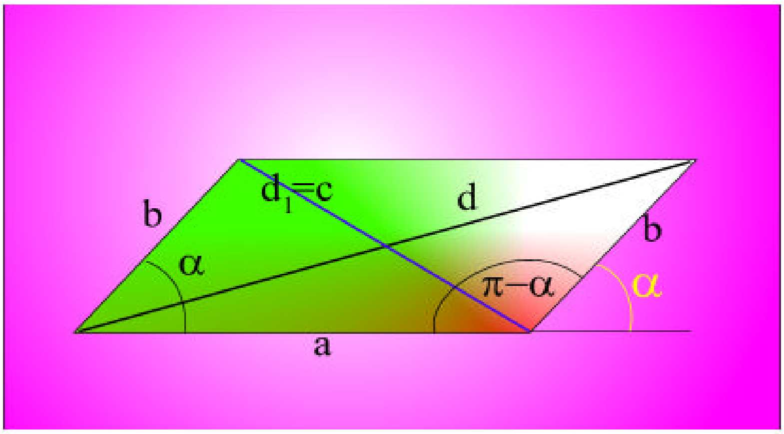
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta + \cos\alpha \cos\beta$$

avremo

$$\overline{C} = \sqrt{(\overline{A})^2 + (\overline{B})^2 + 2\,\overline{A}\,\overline{B}\cos(\beta - \alpha)}$$

Notando che geometricamente $(\beta - \alpha)$ è l'angolo della losanga di cui **C** è diagonale, ne risulta la seguente proprietà per la losanga:

IL QUADRATO COSTRUITO SULLA DIAGONALE E' UGUALE ALLA SOMMA DEI QUADRATI COSTRUITI SUI DUE LATI AUMENTATO DEL DOPPIO PRODOTTO DEGLI STESSI PER IL COSENO DELL'ANGOLO DAL CUI VERTICE PARTE LA DIAGONALE STESSA.



$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$$

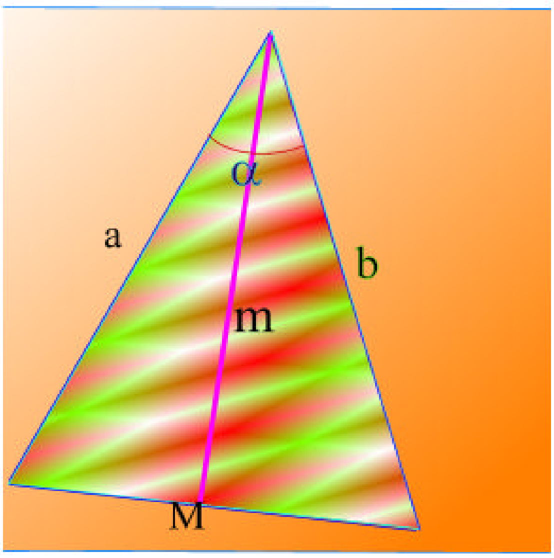
od anche

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\pi - \alpha)} =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)} = c$$

e quindi troviamo il terzo lato di un triangolo qualunque conoscendo due lati e l'angolo compreso (TEOREMA DEL COSENO).

Possiamo inoltre dividere in due parti la losanga e, considerando che le sue diagonali si intersecano tra loro a metà, avremo modo di ricavare LA LUNGHEZZA DELLA MEDIANA DI UN TRIANGOLO QUALSIASI:

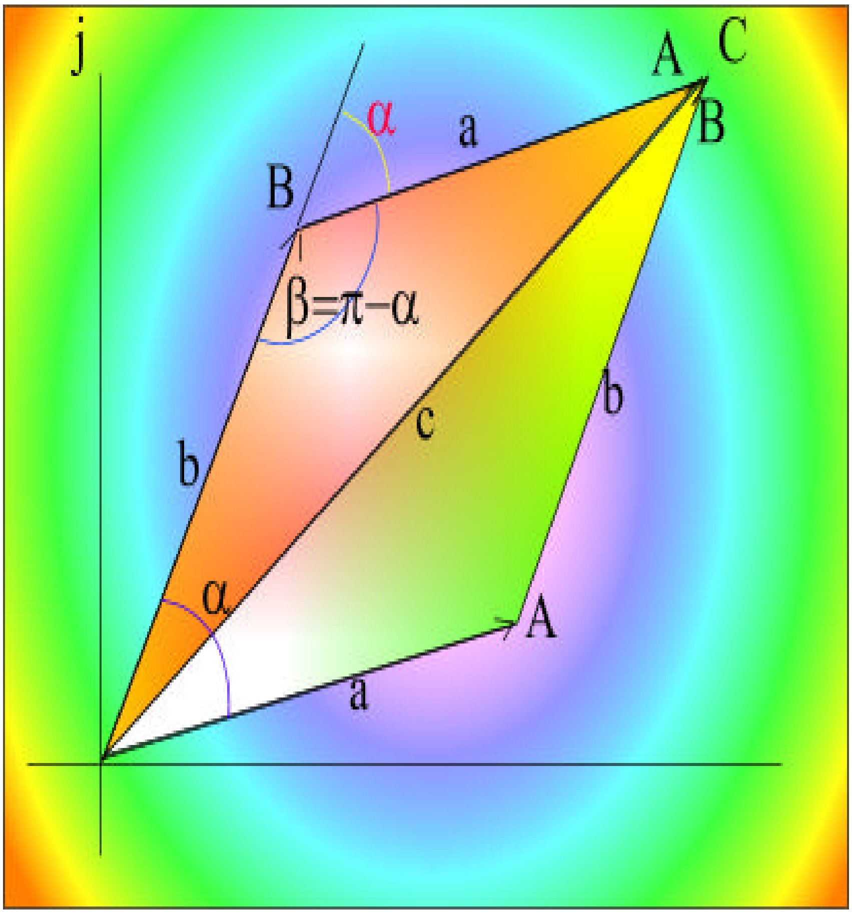


$$m = 1/2\sqrt{a^2 + b^2 + 2\,ab\cos\alpha}$$

Ecco come già la semplice rappresentazione dei numeri complessi ci porta lontano: addirittura alla risoluzione del triangolo qualsiasi e della losanga.

E' da notare che per raggiungere questo risultato abbiamo però avuto bisogno della formula trigonometrica della differenza di due angoli. Si possono invece ricavare facilmente tutte le formule trigonometriche lavorando con dei particolari numeri complessi, quelli di modulo 1; ma non ce ne occuperemo in questo libro.

Notiamo ancora che, considerando i numeri complessi come vettori, si può costruire la somma C mettendo consecutivamente A e B , oppure B ed A, come in figura.



Si può vedere geometricamente che

$$C = A + B = B + A$$

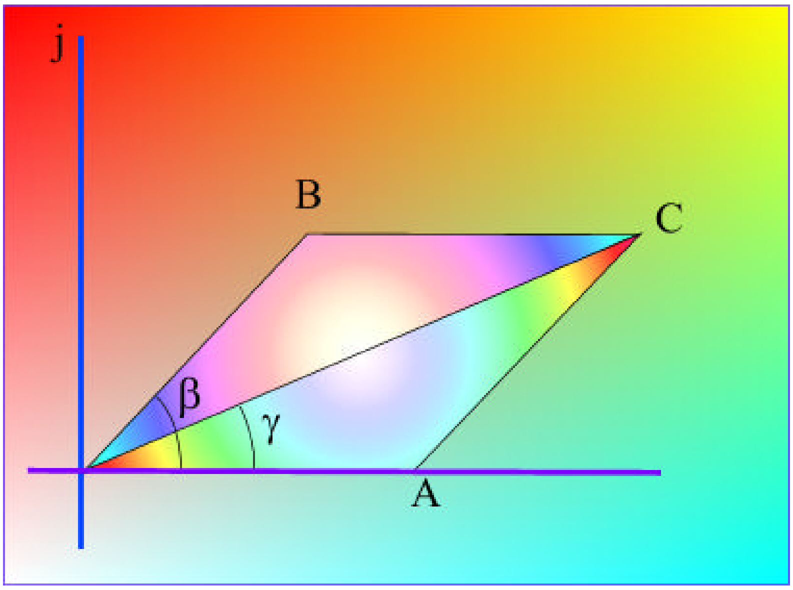
Sempre con semplici considerazioni geometriche, si può vedere adesso che considerando consecutivi B ed A otteniamo di nuovo per ogni TRIANGOLO QUALSIASI:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\pi - \alpha)} \quad \text{e}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta}$$

dove il lato **c** era prima la diagonale della losanga.

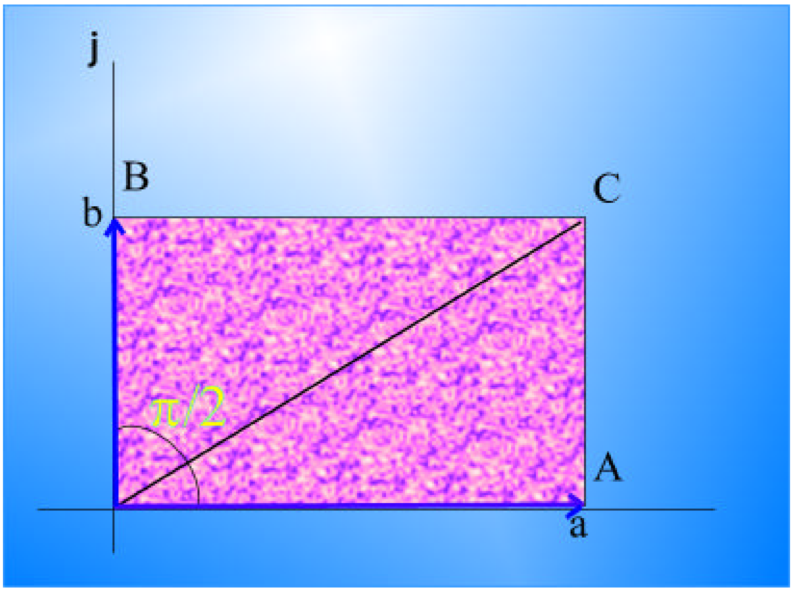
Come casi particolari possiamo notare che se $a = 0$ e cioè che se A è reale, abbiamo $b = 0$, sen $\alpha = 0$, $\gamma = \arctan[d/(a+c)]$ il che rende più immediato il TEOREMA DEI COSENI, infatti



$$\overline{C} = \sqrt{\overline{A}^2 + \overline{B}^2 + 2\,\overline{A}\,\overline{B}\cos(\beta-\alpha)}$$

$$\overline{C} = \sqrt{\overline{A}^2 + \overline{B}^2 + 2\,\overline{A}\,\overline{B}\cos(\beta)}\ .$$

Se è inoltre $\beta = 90^o$ e cioè B immaginario, allora $\alpha=0$, $b=0$, $c=0$, $\gamma=\arctan[d/a]$, ma soprattutto $\cos\beta=0$, e quindi



$$\overline{C} = \sqrt{\overline{A}^2 + \overline{B}^2}$$

e cioè ricaviamo il TEOREMA DI PITAGORA.