

Capitolo II

Caratterizzazione dinamica e analisi dei segnali

Il capitolo in questione cerca di fornire una visione generale dei fondamenti dell'analisi dinamica a partire dalla caratterizzazione dinamica fino all'identificazione strutturale. Nata, l'analisi dinamica, nell'ambito della ricerca aeronautica per lo studio del comportamento dei velivoli e delle vibrazioni indotte dai carichi dinamici a cui sono sottoposti durante il loro esercizio, si è poi estesa a vari campi di applicazione, dall'industria automobilistica, alla robotica ed infine alle costruzioni. Premesso che è necessario ricorrere all'analisi dinamica ogni qualvolta si ritiene necessario considerare i carichi dinamici nelle verifiche di strutture, questa assume maggiore rilievo nel caso di strutture particolari quali dighe, ponti, torri e strutture antisismiche. La presenza di carichi dinamici può essere dovuta all'effetto del vento, al terremoto, al traffico veicolare, a grossi macchinari rotanti o ancora al moto ondoso. Come si vede molti sono i fattori e le strutture che richiedono un'analisi dinamica. Nell'ambito delle costruzioni un ruolo sempre più rilevante è affidato ad essa, in gran parte dovuto al fatto che le strutture sono sempre più ardite, ma anche grazie ai progressi tecnologici nel campo elettronico e informatico, che hanno reso sempre più agevole le operazioni al contorno di tale metodo, facilitando il compito degli ingegneri civili. Contemporaneamente si è avuto un grande sviluppo dei programmi di analisi strutturale che hanno permesso di effettuare confronti modello – struttura reale.

Onde evitare confusione si precisa il significato di alcuni termini contenuti nel capitolo che permetteranno, anche, di evidenziare il contenuto dei rispettivi paragrafi:

- per caratterizzazione dinamica si intende la fase in cui si eseguono le prove sperimentali per venire a conoscenza del comportamento dinamico della struttura;
- l'analisi dei segnali si articola in due sottoinsiemi: la fase di acquisizione dei dati, con i suoi tipici problemi, e l'analisi vera e propria dei dati, quella che permette di determinare le frequenze e i modi propri della struttura;
- l'identificazione strutturale, infine, consiste nella determinazione delle caratteristiche strutturali di un sistema nota la sua risposta a determinate sollecitazioni.

Bisogna dire, però, che anche se presentati separatamente questi processi sono tra loro integranti e complementari del problema di modellazione in quanto schematizzazione (qualificativa e quantitativa) del fenomeno reale.

Richiami di dinamica

Rimandando a [30] per una trattazione esauriente dell'argomento, vengono qui richiamati i concetti fondamentali sui quali si basa lo studio della dinamica strutturale lineare.

Qualunque struttura può essere discretizzata in un numero più o meno elevato di parti sia mediante procedimenti analitico-descrittivi, sia mediante tecniche più sofisticate quali gli elementi finiti. Il numero di gradi di libertà che si vanno a considerare dipende sia dal grado di approssimazione che si vuole ottenere, sia dalle caratteristiche intrinseche della struttura. Ad esempio un edificio multipiano regolare può essere approssimato mediante un modello shear-type ipotizzando un grado di libertà per piano, con masse concentrate al piano e rigidità e smorzamento interpiano. Viceversa per un edificio più complesso (quale ad esempio una chiesa) bisogna necessariamente ricorrere ad una modellazione più raffinata. In ogni caso, una volta discretizzata la struttura, si arriva ad una espressione del tipo

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad [2.1]$$

dove i vettori $\ddot{\mathbf{x}}$, $\dot{\mathbf{x}}$ e \mathbf{x} (di dimensione n) sono rispettivamente il vettore di accelerazione, di velocità e di spostamento di ciascun grado di libertà, le matrici \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} (di dimensioni $n \times n$) sono le matrici di massa, di smorzamento e di rigidità e $\mathbf{f}(t)$ (di dimensione n) il vettore dei carichi applicati, in genere dipendenti dal tempo.

Tale sistema può essere risolto per ottenere la risposta strutturale in termini di spostamenti, velocità ed accelerazioni dei vari gradi di libertà per una certa forzante.

Le proprietà intrinseche della struttura, invece, possono essere calcolate indipendentemente dal tipo di forzante: tali proprietà sono le frequenze proprie del sistema e le forme modali (autovettori) relative a ciascun modo proprio.

Per valutare le proprietà dinamiche del sistema solitamente si trascura lo smorzamento (in genere intorno a valori dell'1% per l'acciaio e del 5% per il calcestruzzo), e si pone la forzante uguale a zero, poiché le proprietà del sistema, in ipotesi di linearità, non dipendono dal tipo di eccitazione. Porre lo smorzamento pari a 0 semplifica molto i calcoli e non introduce grossi errori, dal momento che quando è piccolo poco influenza sia le autofrequenze che le forme modali associate.

Dunque, ponendo lo smorzamento $\mathbf{C} = 0$ e la forzante $\mathbf{f}(t) = 0$ si ottiene:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad [2.2]$$

Per la vibrazione libera della struttura si ricercano soluzioni del tipo $\mathbf{a}_i = \sin(\omega_i t - \alpha)$.

Il sistema omogeneo associato si riduce allora a

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \quad [2.3]$$

dove:

- ω_i è la frequenza naturale i -esima del sistema (autovalore);
- a_i la forma modale i -esima ad essa associata (autovettore).

Per avere soluzioni non banali di tale problema (cioè tutte le a_i uguali a zero) deve essere

$$\det (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad [2.4]$$

Tale equazione, nota come equazione caratteristica ammette n soluzioni. Le soluzioni ω_i risultano essere le frequenze proprie del sistema strutturale, mentre il vettore \mathbf{a} è costituito dalle forme modali ad esse associate.

La conoscenza di tali frequenze proprie risulta molto utile in quanto in corrispondenza di esse la struttura sarà più facilmente eccitabile.

In linea teorica, in assenza di smorzamento, una forzante con frequenza pari ad una frequenza propria del sistema porterebbe ad oscillazioni via via crescenti fino al collasso. Nella pratica lo smorzamento relativo a ciascun modo fa sì che ad un certo punto si giunga ad una situazione di regime con ampiezze tanto più ridotte quanto maggiore è il valore dello smorzamento.

Ordinando le frequenze proprie di un sistema in ordine crescente, si può notare come a frequenze alte siano associati modi di vibrare via via più disordinati: la figura seguente illustra tale fenomeno per un edificio di quattro piani modellato come struttura a masse concentrate mediante una schematizzazione di tipo shear-type. Tale schematizzazione è accettabile quando si analizza in una sola direzione un edificio regolare e con solai di piano molto rigidi rispetto alle colonne.

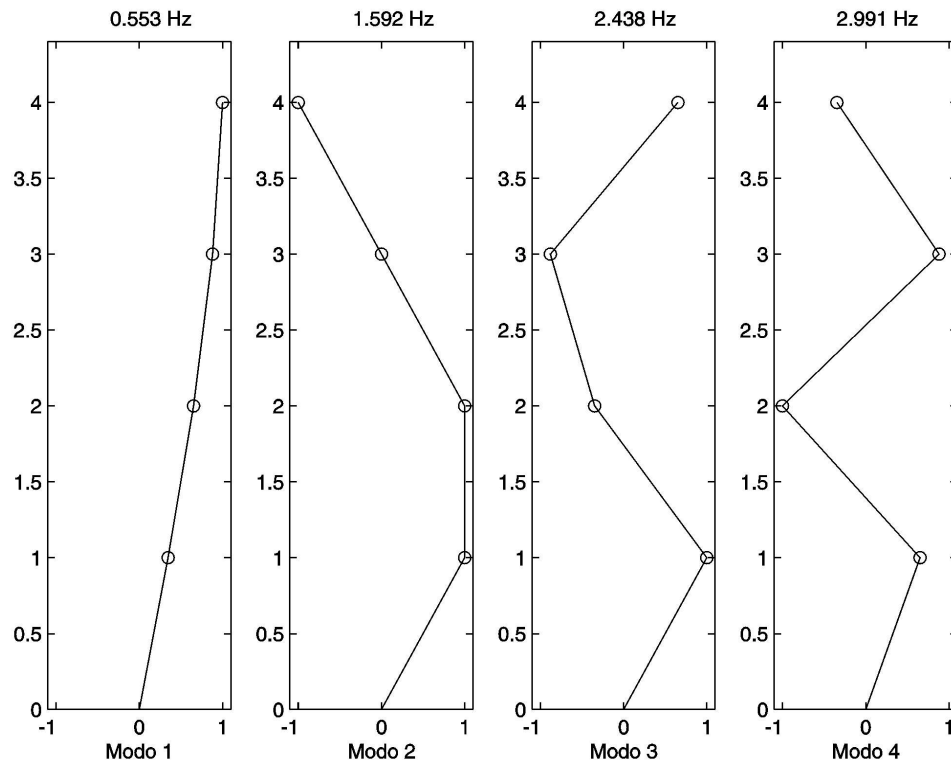


Figura 1 - Frequenze e modi propri di una struttura di quattro piani schematizzata con modello shear-type. L'edificio preso come esempio presenta masse di piano di $m = 10$ ton e rigidità di $k = 1000$ kN/m.

In genere un edificio modellato agli elementi finiti presenta un numero di gradi di libertà, e quindi di modi propri di vibrare, diversi ordini di grandezza maggiore che l'esempio precedente, ma i modi significativi sono comunque sempre solo quelli associati agli autovalori più grandi: di conseguenza l'attenzione si focalizza solitamente solo su di questi.

Trasformate di Laplace e di Fourier

Ogniqualevolta ci si accinga a studiare il comportamento di una struttura in campo lineare elastico, ci si trova immediatamente a dover risolvere un sistema di equazioni differenziali con un numero di equazioni e di incognite pari al numero di gradi di libertà che si vanno a considerare. Tale problema viene usualmente formulato in forma matriciale come

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad [2.5]$$

Per la risoluzione di tale sistema risulta di notevole utilità la trasformazione funzionale nota come trasformazione di Laplace. Grazie a tale trasformazione è

possibile evitare di risolvere il sistema in modo diretto, ma si può affrontare il problema in modo indiretto tramite opportune trasformazioni. Si passa cioè da un problema oggetto a un problema immagine di più semplice soluzione, quindi la soluzione così ottenuta viene poi antitrasformata per ottenere la soluzione del problema originario. Il procedimento è schematizzato in figura 2.

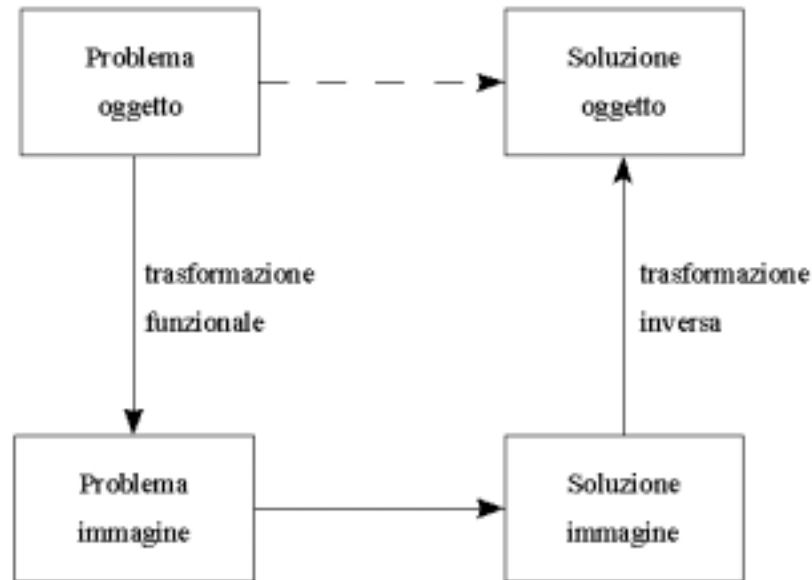


Figura 2 - Schema di impiego delle trasformazioni funzionali

La trasformata e l'antitrasformata di Laplace sono date rispettivamente dalle relazioni seguenti:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt \quad [2.6]$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds \quad [2.7]$$

Il grande vantaggio della trasformata di Laplace è che essa trasforma il sistema di equazioni differenziali ordinarie in un sistema di equazioni algebriche e quindi risulta molto più semplice da risolvere.

Il sistema [2.5] viene infatti immediatamente trasformato in

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})\mathbf{X}(s) = \mathbf{F}(s) \quad [2.8]$$

con s variabile complessa e la cui soluzione risulta essere

$$\mathbf{X}(s) = \frac{\mathbf{F}(s)}{\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}} \quad [2.9]$$

Si può notare come tutta la dinamica del sistema sia concentrata al denominatore della [2.9].

Grazie a questa osservazione sono state quindi sviluppate diverse tecniche in modo che molte informazioni riguardo alle proprietà dinamiche di un sistema possano essere estratte direttamente nel dominio della trasformata di Laplace senza neanche dover ritornare nel dominio del tempo. Ad esempio si può definire funzione di trasferimento di una data forzante sui parametri strutturali di un edificio il rapporto tra la trasformata di Fourier della risposta strutturale e la trasformata dell'ingresso, cioè

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{X}(s)}{\mathbf{F}(s)} \quad [2.10]$$

Si definisca ora come funzione di risposta in frequenza la restrizione della funzione di trasferimento al solo asse immaginario, cioè in pratica alla variabile s si sostituisca $j\omega$.

Si ottiene dunque:

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{1}{-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{C}j\omega + \mathbf{K}} \quad [2.11]$$

Tale operazione, che a prima vista potrebbe apparire come un puro artificio matematico, ha in realtà un significato fisico ben preciso. Infatti il ruolo che la trasformazione di Laplace ha per le funzioni di trasferimento è ricoperto per le funzioni di risposta in frequenza dalla trasformazione di Fourier definita da

$$F(\omega(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad [2.12]$$

Questo significa che la funzione di risposta in frequenza non è altro che quella funzione di ω che mi permette di conoscere il valore dell'uscita note l'ampiezza dell'ingresso e la sua pulsazione ω : in corrispondenza di ciascuna ω la funzione di trasferimento mi fornisce il fattore per cui moltiplicare l'ampiezza dell'ingresso per ottenere l'ampiezza dell'uscita¹².

Una metodologia per ottenere tale risposta è la seguente: date delle forzanti note sia in ampiezza che in pulsazione, si misura l'ampiezza della risposta del sistema e se ne fa un confronto: il rapporto tra l'ampiezza dell'uscita e dell'ingresso prende il nome di guadagno.

¹² Ipotesi fondamentale per poter parlare di ampiezza dell'ingresso e dell'uscita è che il sistema sia a regime: la funzione di trasferimento tra due segnali in regime transitorio non ha senso.

Anche la fase dell'uscita risulterà in generale diversa da quella dell'ingresso: si rende quindi necessario misurarle entrambe e farne la differenza in modo da avere lo sfasamento tra le due. La fase dell'uscita sarà allora pari a quella dell'ingresso più lo sfasamento.

Per una trattazione più completa si veda anche [27].

La caratterizzazione dinamica

La caratterizzazione dinamica consiste nella determinazione delle proprietà dinamiche della struttura attraverso l'utilizzo di prove sperimentali.

Fondamentale risulta la pianificazione della prova sperimentale, nella definizione di:

- numero e posizione degli strumenti di misura;
- tipo, intensità, durata e range in frequenza della eccitazione;
- lunghezza e passo di campionamento dell'acquisizione dati.

In questa delicata fase di indagine, considerazioni di tipo strutturale devono necessariamente fare i conti con limiti e requisiti derivanti dalle regole fondamentali dell'analisi del segnale, che verranno presentate in seguito.

Tecniche di eccitazione

Rimandando a [26] e a [22] per una trattazione esauriente dell'argomento, vengono qui riportate le principali tecniche di eccitazione con una breve disquisizione sui vantaggi e svantaggi.

Tecnica di eccitazione	Caratteristiche	Vantaggi	Svantaggi
Rumore ambientale	Caratterizzato da energia limitata ma da un ampio spettro. Prodotto dal traffico veicolare, dal vento e dal sisma (raro).	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Non sono necessari ulteriori sorgenti ▪ Nessun carico aggiuntivo ▪ Costi praticamente nulli 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Basso rapporto segnale/rumore ▪ Difficoltà nell'individuare la funzione di trasferimento tra ingresso e uscita.
Vibrodina	Può essere a masse controrotanti (sollecitazione in una direzione) o a massa rotante (sollecitazione in tutte le direzioni). Frequenza della forzante legata alla velocità di rotazione. L'intensità si può variare aggiungendo massa. Solo forzante sinusoidale	<ul style="list-style-type: none"> ▪ L'energia trasmessa può essere di una certa importanza con conseguenze benefiche sul rapporto segnale/rumore ▪ La frequenza della forzante può essere controllata con accuratezza 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Difficoltà nell'individuare la collocazione più conveniente ▪ Difficoltà nell'eccitare modi accoppiati Bisogna non eccedere con l'intensità per non danneggiare la struttura
Eccitatore elettrodinamico	Forzante in un'unica direzione. Per variare l'intensità della forzante si può aggiungere massa o variare l'accelerazione della massa stessa.	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Si possono ottenere forzanti con frequenze tra qualche decimo di Hz e 50 Hz ▪ Eccitazione di tipo random 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Limitata potenza ▪ Bisogna non eccedere con l'intensità per non danneggiare la struttura
Eccitatore oleodinamico	Forzante in un'unica direzione.	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Si possono ottenere forzanti con frequenze tra qualche decimo di Hz e 50 Hz ▪ Eccitazione di tipo random 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Elevato costo ▪ Necessità di disporre di una stazione di pompaggio
Martello strumentato	Può essere di diversa grandezza a seconda della struttura. Ha un trasduttore di forza sul battente protetto da gomma. Secondo la durezza di questa si possono analizzare parti di spettro diverse.	<ul style="list-style-type: none"> ▪ L'apparato sperimentale è poco costoso e di facile trasporto ▪ Fissati gli accelerometri si può passare direttamente all'esecuzione della prova 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Limitazione alle zone accessibili ▪ Rapporto segnale/rumore non sempre buono ▪ Macchinosità nell'esecuzione della prova se con analizzatore a due canali

Strumenti di misura delle vibrazioni

Tecnica di rilevamento	Caratteristiche	Vantaggi	Svantaggi
Sismometro (trasduttori di velocità)	Costituito da un magnete collegato per mezzo di una base alla struttura studio. All'interno del magnete abbiamo due solenoidi che muovendosi inducono una corrente elettrica. Da tale valore si può risalire alla velocità.	<ul style="list-style-type: none"> Elevata sensibilità, quindi adatti nel caso di vibrazioni ambientali 	<ul style="list-style-type: none"> Periodo di vibrazione proprio intorno ai 0.5 Hz, per cui non sono adatti nel caso di frequenze molto basse. Di fatto sono utilizzati al di sopra di 1 Hz.
Interferometro laser o a luce coerente (trasduttori di velocità)	Il raggio laser viene puntato verso la struttura e viene osservata la variazione di fase tra le onde elettromagnetiche inviate e quelle retroriflesse. Tale variazione di fase, dovuta alla vibrazione dell'oggetto in studio, viene convertita in un segnale in tensione proporzionale alla velocità. È possibile rilevare ampiezze di vibrazione inferiori al micron a 200 m di distanza nel campo di frequenza 0.1-150 Hz.	<ul style="list-style-type: none"> Consente di misurare con elevatissima precisione spostamenti, rotazioni e velocità. Rispetto ai strumenti inerziali non necessita di accedere materialmente alla struttura. 	<ul style="list-style-type: none"> Risente di vibrazioni che agiscono direttamente sul trasduttore, che si sommano al rumore della risposta.

Tecnica di rilevamento	Caratteristiche	Vantaggi	Svantaggi
Accelerometro	Contiene una massa più o meno pesante a seconda della banda di frequenza che si vuole misurare. Il movimento di questa massa genera un segnale analogico a seconda del principio utilizzato, che può essere: piezoelettrico (per alte frequenze), capacitativo (per medie frequenze), a strain gage (per basse frequenze).	▪	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Essendo la risposta in tensione proporzionale allo spostamento, questo strumento fornisce segnali deboli per livelli di spostamento modesto. ▪ Solitamente si usa in prove con vibrazioni indotte da eccitatori.
Servo- accelerometro	Come l'accelerometro ma beneficia di una preamplificazione del segnale.	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Risponde con segnali elettrici elevati anche per piccoli spostamenti. ▪ 	

Localizzazione della strumentazione

Da un punto di vista teorico, una struttura può essere strumentata in tutti quei punti in cui si ritiene interessante valutarne il comportamento. Dal lato pratico, però, il numero di sensori è strettamente legato alle risorse finanziarie a disposizione, sia in termini di dispositivi di misura che di acquisizione dati.

E' pertanto molto importante posizionare un numero minimo di dispositivi sulla struttura in modo da ottenere tutte le informazioni necessarie.

Per raggiungere tale scopo, è necessario avere a priori un'idea approssimativa dei modi propri che si andrà ad individuare. Bisogna, infatti, porre molta attenzione a non posizionare gli accelerometri nei nodi modali (ed in loro prossimità), perché in tali punti l'osservabilità dei modi è nulla.

Si può osservare in figura 3, come alcune posizioni dei sensori sono ottimali per alcuni modi ma non per altri. Per esempio se si posiziona un sensore in mezzeria della trave, si può vedere molto bene l'accelerazione data dal primo modo, ma in

compenso il sensore è indifferente al secondo modo. In generale si eviterà quindi di posizionare sensori su assi di simmetria per evitare che i modi asimmetrici siano nascosti.

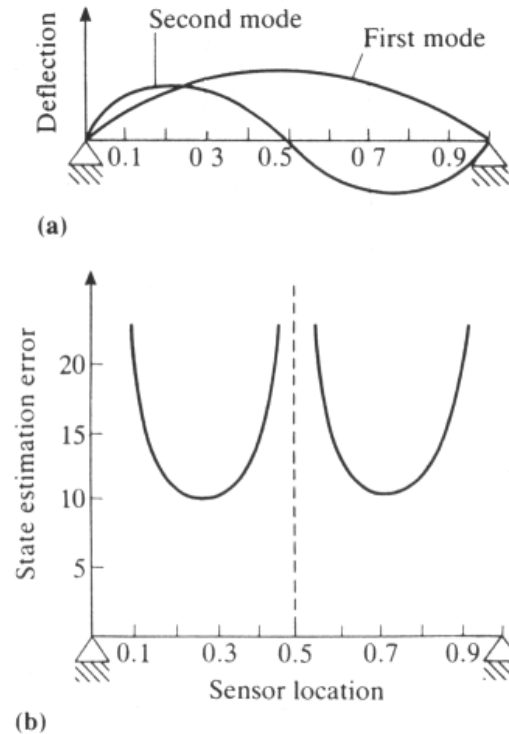


Figura 3 - Posizionamento dei sensori: (a) forme modali; (b) errore nel segnale.

Nel caso illustrato un buon punto per osservare con un solo sensore sia il primo che il secondo modo potrebbe essere a distanza 0.3 da un estremo o dall'altro.

L'analisi del segnale

I trasduttori hanno la funzione di trasformare una grandezza meccanica in un segnale elettrico. Le grandezze meccaniche misurate sono solitamente l'accelerazione o la velocità, che vengono trasformate in tensione o in capacità secondo dello strumento utilizzato. L'intensità del segnale elettrico risulta, istante per istante, proporzionale alla grandezza meccanica della struttura alla quale si riferisce.

Il segnale di risposta registrato dai trasduttori può essere analizzato sia nel dominio del tempo che nel dominio della frequenza (figura 4). Quest'ultimo si è mostrato particolarmente adeguato per cogliere e studiare le caratteristiche dinamiche fondamentali di una struttura, come frequenze proprie e forme modali corrispondenti, e risolvere il problema inverso di identificazione delle proprietà del sistema a partire dalla sua risposta.

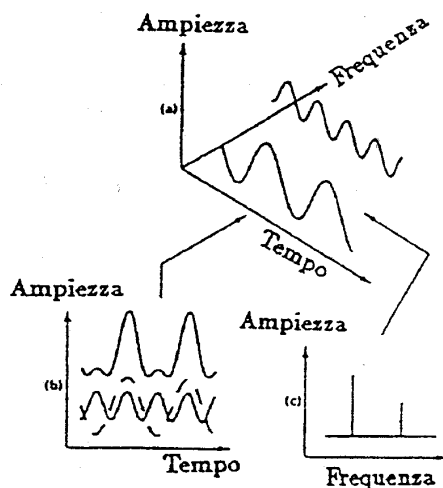


Figura 4 - Legame tra dominio dei tempi e dominio delle frequenze.

In generale la scelta di rappresentare il fenomeno nell'uno o nell'altro dominio è legata al tipo di applicazione: se, ad esempio, si intende calibrare un modello ad elementi finiti di una struttura esistente soggetta ad un evento sismico utilizzando le registrazioni dirette della risposta della struttura, sarà richiesta la risposta nel dominio del tempo (time-history) dei punti alla base per poter consentire al programma di simulare il moto imposto al terreno ed integrare al passo. Nel caso in cui, invece, come più frequentemente, si intenda tarare un modello ad elementi finiti lineare tramite modifiche di rigidzze e distribuzione di masse, la rappresentazione nel dominio delle frequenze e nel dominio dei modi (Fig. 5) risulta, per sua natura, la più indicata.

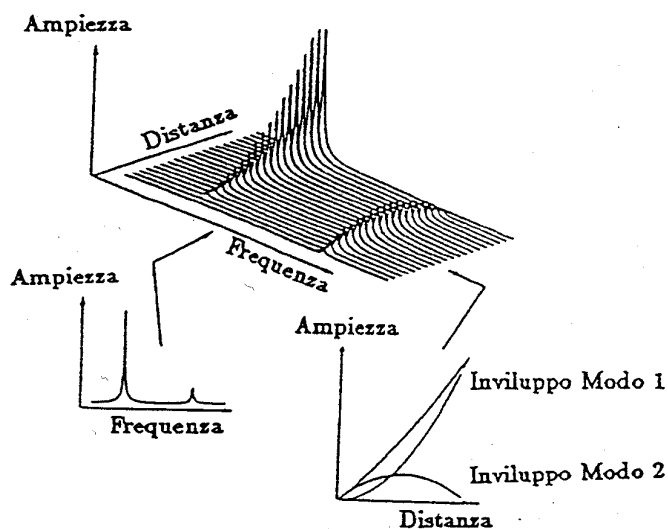


Figura 5 - Legame tra spazio delle frequenze e spazio dei modi.

Regole di misura dei segnali

Una trattazione esauriente delle problematiche relative alla teoria della misura e all'analisi di segnali esula dagli scopi del seguente lavoro: tuttavia è bene richiamare almeno alcuni dei concetti fondamentali di tali discipline per evitare di cadere in errori grossolani.

Per passare da un segnale nel dominio del tempo ad un segnale nel dominio della frequenza si utilizza molto spesso un metodo numerico che si è rivelato molto veloce ed efficace: la Trasformata Rapida di Fourier. Tale metodo (meglio noto come Fast Fourier Transform, in breve FFT) è governato da tre regole base. La prima riguarda il campionamento del segnale nel dominio del tempo, la seconda riguarda il campionamento del segnale nel dominio della frequenza, la terza è relativa alla massima frequenza individuabile con una determinata frequenza di campionamento.

Campionamento nel tempo

La FFT assume che il segnale campionato contenga N valori uniformemente spazati con intervallo Δt . Il periodo totale di campionamento inizia a $t = 0$ e termina a $t = T_{TOT}$, si ha cioè

$$T_{TOT} = N\Delta t \quad [2.13]$$

dove T_{TOT} e Δt sono espressi in secondi.

Campionamento in frequenza

La FFT assume che lo spettro di frequenza contenga $N/2$ punti uniformemente spazati con intervallo di frequenza pari a Δf . Lo spettro di frequenza è quindi definito nel range $[0; F_{max}]$ con

$$F_{max} = \frac{\Delta f N}{2} \quad [2.14]$$

dove F_{max} e Δf sono espressi in Hertz.

Frequenza di Nyquist

La massima frequenza che può essere ottenuta quando si passa dal dominio della frequenza a quello del tempo dipende dalla frequenza di campionamento del segnale temporale secondo la formula

$$F_{max} = \frac{1}{2\Delta t} \quad [2.15]$$

Tale frequenza prende il nome di Frequenza di Nyquist. Allo stesso modo, definita la massima frequenza che si vuole ottenere dal campionamento di un certo segnale, la frequenza di campionamento deve essere

$$\Delta t \leq \frac{1}{2F_{max}} \quad [2.16]$$

Come si nota la frequenza di campionamento è correlata alla massima frequenza individuabile (le armoniche di frequenza maggiore che si trovano sono quindi da scartare) e non influenza la risoluzione della FFT. Normalmente si consiglia di considerare il fattore 2 al denominatore della [2.16] come un valore teorico, mentre nei casi pratici si utilizzano valori superiori.

Sostituendo la [2.14] e la [2.16] nella [2.15] si ottiene

$$\Delta f = \frac{1}{T_{TOT}} \quad [2.17]$$

che mostra come la risoluzione in frequenza sia direttamente proporzionale alla durata dell'acquisizione.

In virtù delle formule sopra riportate, nella pratica si sceglie Δf e dalla [2.17] si ha T_{TOT} , quindi nella [2.15] si fissa F_{max} e si ricava N . In questo modo dalla [2.14] è possibile ricavare quale frequenza di campionamento utilizzare.

Problemi di chiarezza del segnale

Qui di seguito si riportano i principali problemi derivanti dall'acquisizione dei dati, per maggiori informazioni si rimanda a testi specifici che trattano tale argomento [25].

Aliasing

Esso si manifesta “specchiando” le alte frequenze rispetto a quella di Nyquist, generando così basse frequenze che in realtà non esistono.

Tale fenomeno si presenta quando la frequenza di campionatura è minore di quella di Nyquist [2.15], per cui si cerca di evidenziare un dato segnale utilizzando una campionatura troppo rada. Ciò porta ad ottenere dei risultati errati, come mostrato in figura 6, dove un segnale di 1 Hz (in blu) viene campionato con due diverse frequenze.

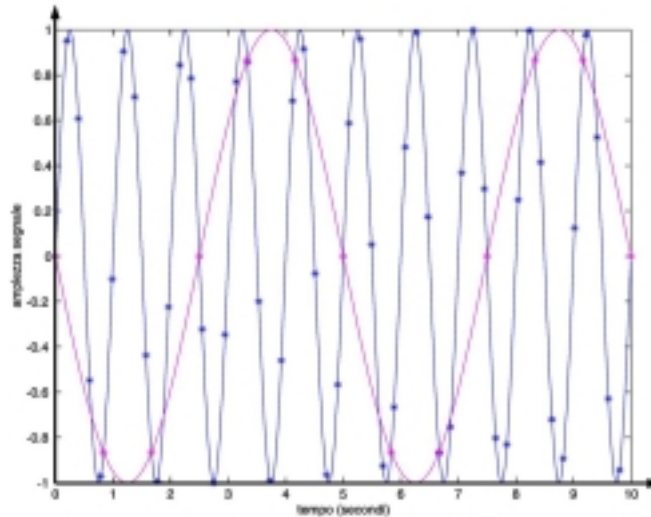


Figura 6 - Esempio del fenomeno di aliasing.

La prima campionatura a 10 Hz (asterischi blu) individua correttamente il segnale originale essendo caratterizzata da una frequenza di Nyquist pari a 5 Hz; mentre la seconda campionatura a 1.2 Hz (asterischi in magenta) è caratterizzata da una frequenza di Nyquist di 0.6 Hz, che risulta essere troppo bassa per apprezzare correttamente il segnale originale.

Per evitare tale problema si può ricorrere all'introduzione di filtri anti-aliasing: che sono filtri passa-basso, che tagliano l'ampiezza delle alte frequenze in maniera tale che non appaiano come basse frequenze nell'intervallo che ci interessa.

Windowing

Una delle ipotesi alla base della FFT è che il segnale da trasformare deve essere periodico. Ciò è vero se il segnale in questione completa un numero intero di cicli all'interno della finestra che si prende in considerazione per l'analisi oppure se esso è completamente compreso all'interno di essa (cioè ha valore nullo all'inizio e alla fine).

Nella pratica molti segnali non rispettano tale ipotesi: un segnale generato da un'eccitazione di tipo casuale molto difficilmente presenterà carattere periodico.

La FFT genererà quindi uno spettro di frequenza con delle "macchie", vale a dire in alcune zone presenterà un andamento artificiale, non corrispondente alla realtà.

Per questo motivo è necessario introdurre delle finestre di campionamento, cioè moltiplicare il segnale nel dominio del tempo per opportune funzioni di forma in grado di ovviare a questi inconvenienti.

Diverse sono le finestre impiegabili, l'utilizzo di una finestra piuttosto che un'altra dipende dal tipo di risultati che si vuole ottenere; a tale proposito le finestre più comuni sono:

- finestra rettangolare o uniforme: permette di ottenere una buona risoluzione in frequenza;
- finestra di Hanning: minimizza l'effetto del windowing quando si vanno ad analizzare segnali a banda larga, quali ad esempio segnali di tipo casuale;
- finestra Flap-Top: indicata per la determinazione delle ampiezze di vibrazione;
- finestra esponenziale: si usa per strutture con smorzamento piccolo nelle quali la risposta non è ancora scesa a zero al termine della finestra di acquisizione.

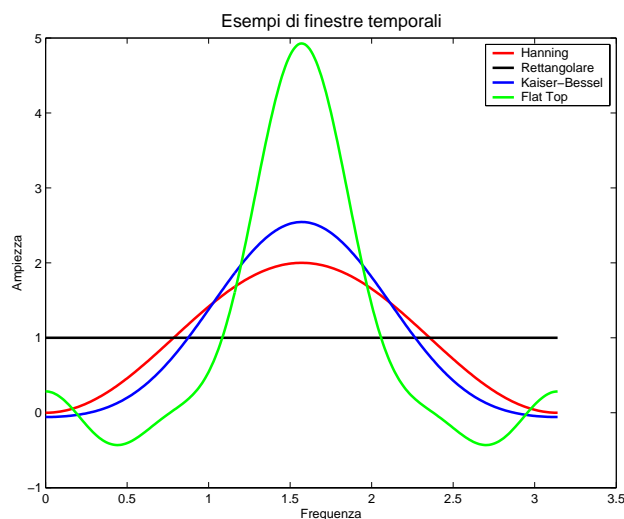


Figura 7 – Esempi di finestre temporali: Hanning, rettangolare, Kaiser-Bessel, Flat Top.

Si noti che se si usa una finestra diversa da quella rettangolare, lo smorzamento ottenuto non è più lo stesso e bisogna calcolarne la correzione dovuta alla finestra.

Coerenza

Nell'analisi di un sistema ha grande importanza la valutazione del grado di correlazione tra il segnale di input e quello di output. Quando si hanno due variabili stocastiche¹³ x e y che rappresentano input e output di un sistema, la correlazione tra queste due variabili è descritta dal cosiddetto coefficiente di correlazione ρ_{xy} definito come:

¹³ Variabili la cui realizzazione non è definibile in modo deterministico.

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad [2.18]$$

dove σ_{xy} è la covarianza¹⁴, σ_x e σ_y sono le deviazioni standard¹⁵. Se c'è una relazione perfettamente lineare tra x e y (i.e. $y = \alpha x + \beta$, per esempio, dove α e β sono costanti) il coefficiente di correlazione assume valore uguale a 1. Questa situazione è rappresentata in figura 8a.

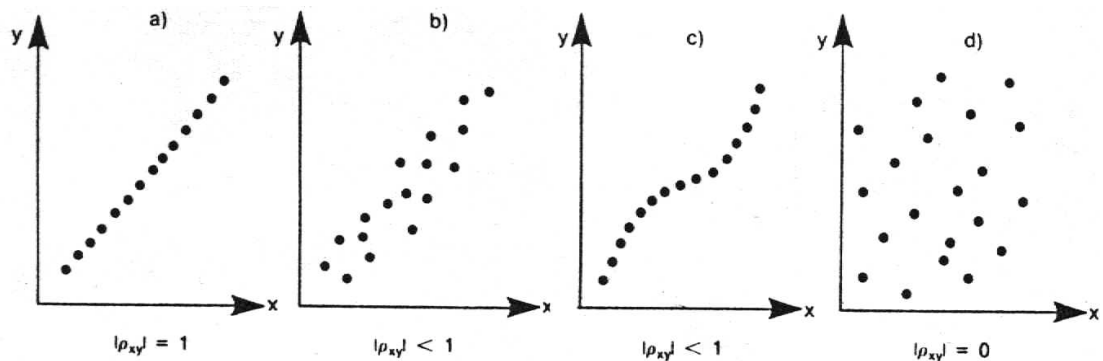


Figura 8 – Il coefficiente di correlazione $|\rho_{xy}|$ indica la dipendenza reciproca tra due variabili.

Se x e y sono disturbati da rumore casuale, la relazione che li lega perde unicità e $|\rho_{xy}|$ è inferiore ad 1 (figura 8b). Se x e y sono legati tra loro da una relazione univoca di tipo non lineare, $|\rho_{xy}|$ è inferiore ad 1. Ciò si verifica anche nel caso in cui i campioni siano esenti da rumore (figura 8c). Se le variabili x e y sono scorrelate, si ha una rappresentazione casuale sparsa come in figura 8d e il coefficiente di correlazione assume valore nullo.

Il valore del coefficiente di correlazione ρ_{xy} , quindi, è una misura della linearità della funzione di distribuzione di probabilità congiunta delle variabili x e y , rappresentative della risposta di un sistema.

Nell'analisi dei segnali a due canali mediante FFT si può definire la funzione di coerenza η_{yx}^2 definita per ciascuna frequenza dei segnali. Per ogni frequenza, la funzione di coerenza equivale al quadrato della funzione coefficiente di correlazione

¹⁴ $\sigma_{xy} = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)]$ dove μ_x e μ_y sono le medie delle variabili aleatorie x e y .

¹⁵ $\sigma_x = \sqrt{E[(x - \mu_x)^2]}$ e analogamente per y .

$$\rho_{xy}^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \quad [2.19]$$

Si supponga ora di considerare un sistema lineare in cui $x(t)$ e $y(t)$ sono rispettivamente i segnali di input (ingresso) e di output (uscita); si supponga inoltre di aver misurato la densità spettrale dell'input $S_x(\omega)$, dell'output $S_y(\omega)$ e la densità di spettro incrociata $S_{yx}(\omega)$ (trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione incrociata tra input ed output). Si calcoli ora il valore “teorico” della densità spettrale dell'output $\tilde{S}_y(\omega)$ attraverso la relazione

$$\tilde{S}_y(\omega) = H(\omega) \cdot S_{yx}(\omega) \quad [2.20]$$

dove

$$H(\omega) = \frac{S_{yx}(\omega)}{S_x(\omega)} \quad [2.21]$$

è la funzione di trasferimento del sistema.

A questo punto si può definire la funzione di coerenza tra il segnale di output e il segnale di input come

$$\eta_{yx}^2(\omega) = \frac{\tilde{S}_y(\omega)}{S_y(\omega)} \quad [2.22]$$

cioè il rapporto tra la densità spettrale “teorica” e la densità spettrale misurata. Sostituendo l'equazione [2.21] in [2.20] e questa così ottenuta in [2.22] si ottiene una definizione alternativa della funzione di coerenza

$$\eta_{yx}^2(\omega) = \frac{S_{yx}(\omega) S_{xy}(\omega)}{S_x(\omega) S_y(\omega)} \quad [2.23]$$

La funzione di coerenza assume valori compresi tra 0 e 1. È stato dimostrato da Jenkins [23] che se tale funzione assume valore nullo allora il segnale di output non dipende da quello di input, cioè, il segnale di uscita è dovuto interamente ad una sorgente di rumore (legata ad esempio a non linearità del sistema); infatti in questo caso vuol dire che la densità di spettro incrociata è nulla, cioè i due segnali x e y non hanno niente a che fare tra di loro (l'output è generato da altre sorgenti piuttosto che dall'input). D'altra parte una funzione di coerenza pari a uno significa perfetta dipendenza tra i due segnali, ossia, la risposta del sistema è lineare e totalmente libera da sorgenti di rumore.

Analisi dei dati

I valori che provengono dall'analizzatore di spettro sono numeri complessi. Uno stesso numero complesso può essere scritto in due forme diverse:

$$a + ib$$

oppure

$$\rho \cdot e^{i\theta}$$

dove:

a = parte reale;

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \text{modulo};$$

b = parte immaginaria;

$$\theta = \arctg \frac{b}{a} = \text{fase}.$$

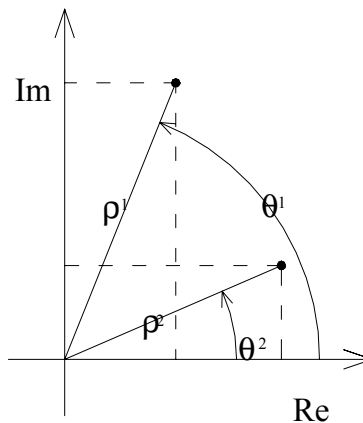


Figura 9 - Rappresentazione delle componenti di un numero complesso.

La prima si rappresenta sul piano complesso $\Re - \Im$ mentre la seconda corrisponde ad un sistema di coordinate polari. Per maggiori dettagli sulla rappresentazione dei numeri complessi si veda anche [32]. Da ciascuna delle due forme è possibile trarre delle conclusioni utili per interpretare i segnali e quindi comprendere il comportamento della struttura. Le due rappresentazioni non sono altro che le due facce della stessa medaglia e quindi contengono la medesima quantità di informazioni, ma le proprietà della struttura possono essere ricavate più facilmente a volte dall'una a volte dall'altra. Assumendo di aver eseguito le funzioni di trasferimento tra i vari segnali, comparandoli tra loro è possibile ottenere la dinamica del sistema in esame.

Dal modulo si ricava l'ampiezza dello spostamento per ciascuno dei modi trovati. Questi ultimi possono essere individuati come dei picchi più o meno evidenti a seconda che il segnale sia nitido oppure no. La frequenza relativa a tali picchi rappresenta una delle frequenze proprie del sistema strutturale. L'altezza del picco è

indicativa dell'amplificazione che il segnale di eccitazione subisce in corrispondenza del punto di misura, mentre la sua forma più o meno affusolata indica uno smorzamento basso oppure alto. Il fatto che il segnale si presenti frastagliato e i picchi non siano ben evidenti può dipendere dall'eventuale presenza di rumore di sottofondo, o di non linearità (geometriche o costitutive del materiale), o ancora da dispersioni a livello strumentale. Per rendere più evidenti i modi di ampiezza piccola è possibile adottare la visualizzazione del modulo in scala logaritmica.

Se il nostro obiettivo, come è solito, è anche di ottenere le forme modali, sarà allora necessario analizzare insieme sia il modulo che la fase. Quest'ultima ci indica la direzione verso cui la struttura si deforma. Confrontando due segnali è possibile comprendere se due punti sono tra loro in fase oppure no. La fase assume valori compresi tra $+180^\circ$ e -180° a cui corrisponde opposizione di fase, mentre concordanza di fase si ha a 0° . Se i due punti sono in fase per una certa frequenza significa che si stanno spostando dalla stessa direzione altrimenti si spostano in direzioni opposte.

Alle stesse conclusioni si giunge anche con l'analisi della parte reale e della parte immaginaria. Soprattutto quest'ultima risulta essere particolarmente efficace: infatti, consente la duplice visualizzazione sia dell'ampiezza che della fase. Infatti, sempre confrontando due segnali, se risultano essere concordi la fase sarà concorde e viceversa. Se le f.d.t. sono tutte riferite ad uno stesso punto, le parti immaginarie sono anche nella stessa proporzione delle forme modali. Da ciò deriva che se abbiamo ad esempio le funzioni di trasferimento di tre accelerometri disposti in linea uno con l'altro, se riportiamo le rispettive parti immaginarie in corrispondenza di ciascuno è possibile ottenere direttamente l'andamento delle forme modali.

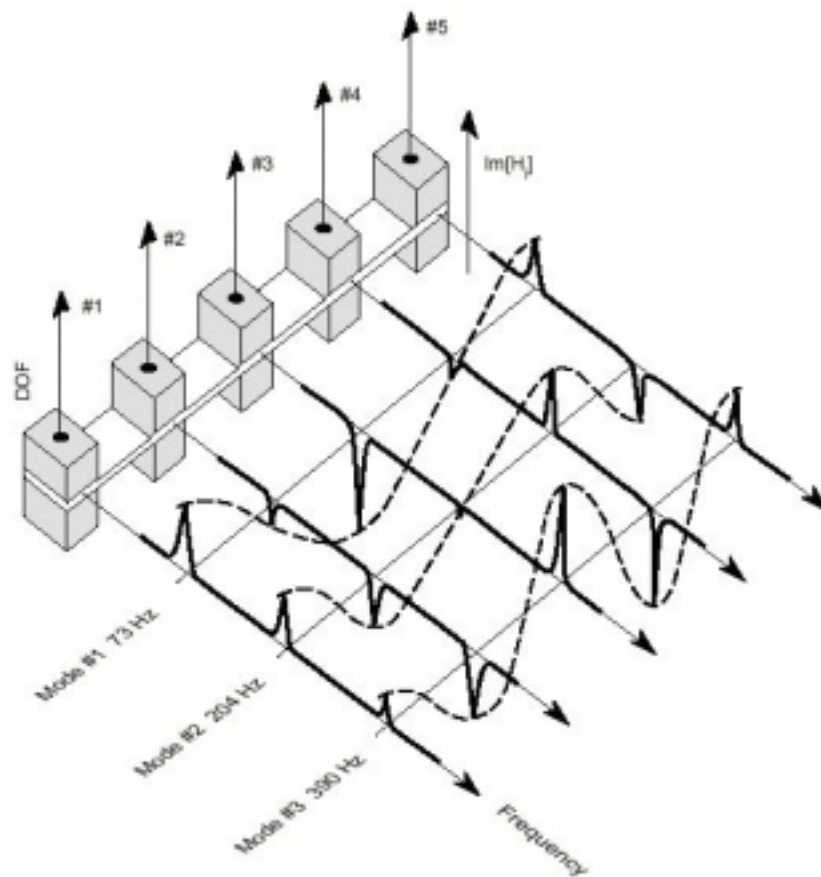


Figura 10 - Rappresentazione della parte immaginaria di diverse FFT per cui unendo i picchi corrispondenti si ottiene la deformata modale relativa a quella frequenza (rif. bibl. [19]).

Tutto questo deriva da semplici conclusioni derivanti dalla visualizzazione dei numeri complessi (figura 9). Infatti se si considera lo smorzamento di una struttura compreso tra 0 e 1, e assegniamo all'asse reale uno smorzamento pari ad 1 e all'asse immaginario il valore 0, risulta che quanto più vicino siamo all'asse immaginario più ci avviciniamo alla situazione ideale di oscillatore non smorzato e quindi alla frequenza di risonanza. Nella realtà tutte le strutture sono smorzate però in corrispondenza di eccitazioni prossime alle loro frequenze proprie esse evidenziano un avvicinamento all'asse immaginario. È per questo che solitamente la fase in corrispondenza delle frequenze della struttura tende a 90° , così come la parte immaginaria è massima e la parte reale nulla. Inoltre dalla parte reale è possibile anche dare un giudizio di massima sullo smorzamento, infatti una pendenza brusca è segno evidente di poco smorzamento e viceversa; ciò si può ottenere anche dalla fase, dove questa denota un passaggio brusco all'inversione di fase lo smorzamento sarà ridotto, dove invece il passaggio è graduale lo smorzamento è più evidente.

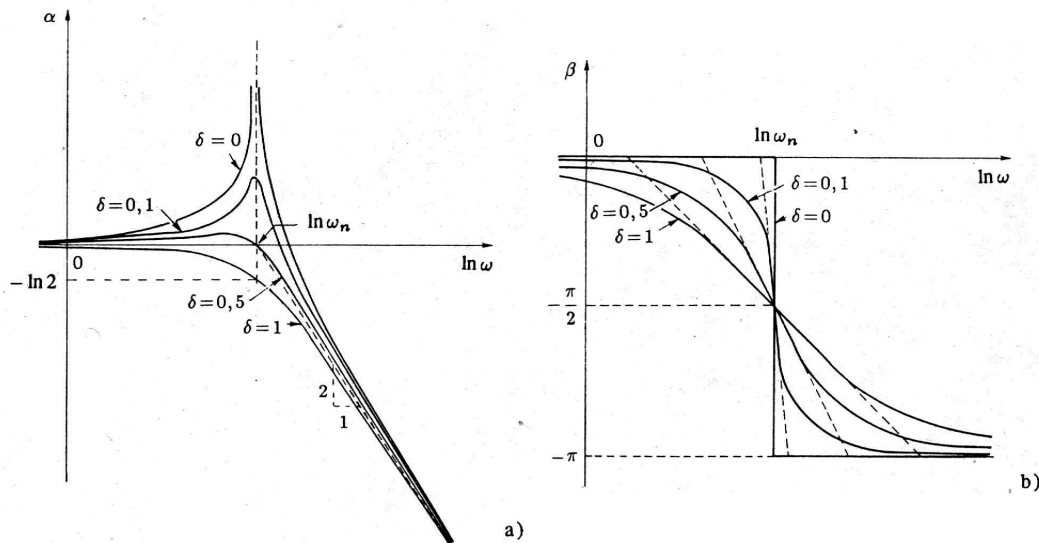


Figura 11 - Diagramma di Bode: si può notare come con l'aumento dello smorzamento il picco in figura a) tende ad abbassarsi fino ad scomparire; mentre in figura b) maggiore è lo smorzamento meno brusco è il passaggio in prossimità dei 90° .

Secondo quanto detto in precedenza è pertanto ovvio presupporre l'esistenza di diversi modi di rappresentazione tra cui i più ricorrenti sono:

- diagramma di Bode: modulo e fase della funzione di trasferimento in funzione della frequenza;
- diagramma di Nyquist o diagramma polare: parte immaginaria in funzione della parte reale;
- diagramma cartesiano: parte reale e immaginaria della FFT in funzione della frequenza.

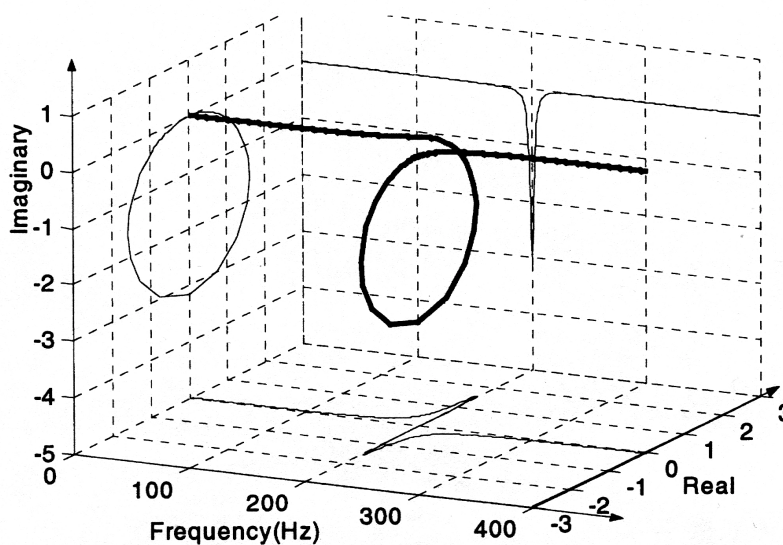


Figura 12 - Rappresentazione tridimensionale della FFT di un sistema ad un grado di libertà.

Oltre a quanto già detto sulla coerenza al paragrafo “Coerenza” a pag. 66, bisogna aggiungere che questa grandezza assume valore significativo tante più ripetizioni della stessa misura si effettuano. Infatti essendo la coerenza proporzionale a $1/n$ dove n è il numero di ripetizioni della prova (i.e. nel caso di prova con martello strumentato il numero di average¹⁶). Ne consegue che per $n=1$ numeratore e denominatore sono uguali e quindi la coerenza assume valore 1, ciò significa che se si effettua un'unica misura non si potrà valutare la validità della misura. Maggiore è, invece, il numero di ripetizioni della misura e più la coerenza rappresenta un parametro utile a stabilire l'affidabilità della misura, in quanto la maggior parte dei rumori presenti in una struttura non sono correlati tra loro. Questo è il motivo per cui è importante effettuare un numero di ripetizioni della misura il più elevato possibile, in conformità con il tempo a disposizione e con la precisione con cui si vogliono i risultati.

Determinazione sperimentale dello smorzamento

Lo smorzamento associato a ciascuna frequenza può essere calcolato sia a partire dalla risposta nel dominio del tempo, che in quella nel dominio delle frequenze.

Metodo delle oscillazioni libere (risposta nel dominio del tempo)

Si richiama l'espressione della risposta nel tempo di un oscillatore semplice con spostamento iniziale imposto (figura 13):

$$x(t) = e^{-\xi\omega t} (A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t) \quad [2.24]$$

dove:

- $\omega_d = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ è la frequenza naturale smorzata;
- $\xi = \frac{c}{2m\omega}$ il fattore di smorzamento relativo allo smorzamento critico, altrimenti detto coefficiente di smorzamento viscoso equivalente, che, per strutture civili, in ipotesi di comportamento lineare, può assumere valori nell'ordine di 0.1%-5%.

¹⁶ La maggior parte delle misure sono soggette a rumori; un modo semplice di ridurli è di fare un numero di misure elevato perché la maggior parte dei rumori presenti in una struttura non sono correlati. Nel nostro caso, il dato registrato per un determinato punto di impatto e di posizionamento dell'accelerometro sulla struttura, è generalmente la media di 4 o 5 misure.

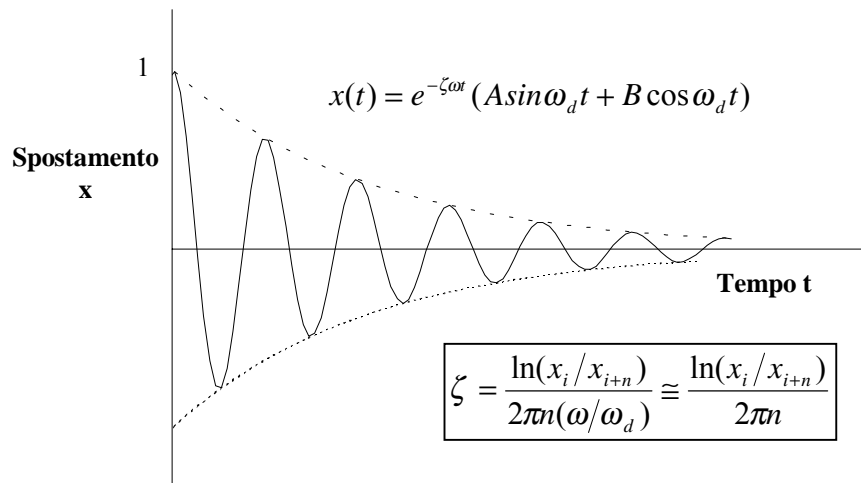


Figura 13 - Calcolo dello smorzamento della risposta nel tempo: metodo delle oscillazioni libere.

Una volta noto, da una risposta nel dominio del tempo, il decadimento dell'ampiezza di oscillazione al crescere del numero di cicli è possibile ricavare a ritroso il valore di tale coefficiente di smorzamento:

$$\xi = \frac{\ln(x_i/x_{i+n})}{2\pi n(\omega/\omega_d)} \cong \frac{\ln(x_i/x_{i+n})}{2\pi n} \quad [2.25]$$

dove:

- x_i l'ampiezza di oscillazione al ciclo i -esimo e n il numero di cicli di osservazione.

Metodo dell'ampiezza di banda (risposta nel dominio della frequenza)

Lo smorzamento associato a ciascun modo può essere con buona approssimazione calcolato dal grafico del modulo della funzione di trasferimento in funzione della frequenza, con il metodo noto come half power bandwidth.

Il valore dello smorzamento relativo ad un picco di risonanza si ottiene dalla formula:

$$\xi = \frac{f_B - f_A}{f_A + f_B} \quad [2.26]$$

dove f_A e f_B sono le frequenze così definite: si prende il valore dell'ampiezza del picco e lo si divide per $\sqrt{2}$; in corrispondenza di questo valore sulla curva si trovano le due frequenze f_A e f_B .

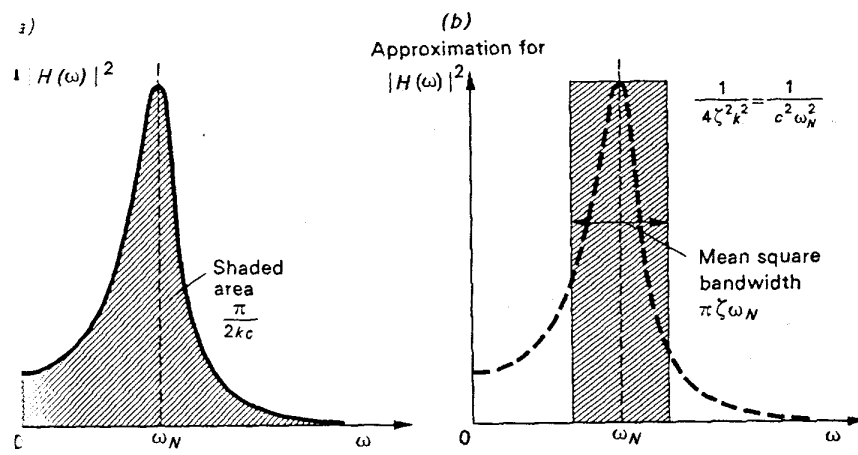


Figura 6. Calcolo smorzamento da risposta in frequenza: metodo dell'ampiezza di banda

