Dedico la soluzione del problema sotto enunciato al mio insegnante di matematica e fisica del Liceo, il Prof. Francesco Palmieri.

PROBLEMA: Sono date nel piano $3n$ rette e $2n$ punti, comunque disposti (n numero naturale). Dimostrare che esiste nel piano almeno un punto P tale che la somma delle distanze di P dalle $3n$ rette è minore della somma delle distante di P dai $2n$ punti.

Dimostrazione:

Sia $\{r_i\}$ ($i = 1, \dots , 3n$) l'insieme delle rette del piano e $\{P_i\}$ ($i = 1, \dots , 2n$) l'insieme dei punti del piano. Si tratta di dimostrare che esiste nel piano almeno un punto P tale che:

$$\sum_{i=1}^{3n} d(P, r_i) < \sum_{i=1}^{2n} d(P, P_i) \quad .$$

Dimostrerò un risultato più forte:

se $n > k/(\pi\text{-}3)$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$) allora, comunque siano disposte $3n+k$ rette, esiste almeno un punto P tale che:

$$\sum_{i=1}^{3n+k} d(P, r_i) < \sum_{i=1}^{2n} d(P, P_i) \quad .$$

Sia O un punto qualsiasi del piano, s una retta passante per O, Q un punto su s e d la distanza tra O e Q, ϑ e ϑ_i rispettivamente gli angoli formati da un asse assegnato con s e r_i. Si ha:

$$d(Q, P_i) = (1 + \epsilon_i)\cdot d \qquad \text{con} \quad \lim_{d\to\infty} \epsilon_i = 0 \qquad (i = 1, \dots , 2n).$$

Il limite discende immediatamente dalla disuguaglianza triangolare $|(1 + \epsilon_i)\cdot d - d| = |\epsilon_i|\cdot d \leq \overline{OP_i}$.

Se la retta s e la retta r_i si intersecano, si ha:

$$d(Q, r_i) = ((1 + \epsilon'_i)\cdot d\cdot|\sin(\vartheta - \vartheta_i)| \qquad \text{con} \quad \lim_{d\to\infty} \epsilon'_i = 0.$$

Il limite discende dalla relazione $|(1 + \epsilon'_i)\cdot d - d| = |\epsilon'_i|\cdot \mathrm{d} = \overline{OR_i}$, essendo R_i il punto di intersezione tra la retta s e la retta r_i.

Se per ogni punto Q sulla retta s si avesse:

$$\sum_{i\in I} (1+\epsilon'_i)\cdot d\cdot|\sin(\theta-\theta_i)| + \sum_{j\in J} d(Q, r_j) \geq \sum_{1=1}^{2n} (1+\epsilon_i)\cdot d \quad ,$$

(nel primo membro la prima sommatoria è quella relativa alle rette r_i che intersecano s, la seconda sommatoria è relativa alle rette r_j che non intersecano s) allora, dividendo per d e passando al limite facendo tendere d ad infinito, si avrebbe:

$$\sum_{i=1}^{3n+k} |\sin(\theta-\theta_i)| \geq 2n.$$

Pertanto è sufficiente dimostrare che esiste una retta s per cui:

$$\sum_{i=1}^{3n+k} |\sin(\theta-\theta_i)| \quad < 2n.$$

Se per assurdo per ogni retta s si avesse:

$\displaystyle\sum_{i=1}^{3n+k} |\sin(\theta-\theta_i)| \quad \geq 2n$, allora si avrebbe anche:

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{i=1}^{3n+k} |\sin(\theta-\theta_i)| \right) d\theta \;=\; \sum_{i=1}^{3n+k} \int_0^{2\pi} |\sin(\theta-\theta_i)|\, d\theta \;\geq\; \int_0^{2\pi} 2n\, d\theta \quad .$$

Si ha: $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin(\theta-\theta_i)|\, d\theta \;=\; \int_{\theta_i}^{\theta_i+2\pi} |\sin(\theta-\theta_i)|\, d\theta \;=\; \int_0^{2\pi} |\sin(\theta)|\, d\theta \;=2 \int_0^{\pi} \sin(\theta)\, d\theta \;=4$

e quindi la disuguaglianza precedente diventa $12n+4k \geq 4\pi n$,

che non è vera se $n > k/(\pi\text{-}3)$. Questo conclude la dimostrazione.

Sembra interessante la seguente questione: se n è un numero naturale, qual è il massimo numero di rette $f(n)$ tale che, comunque siano disposti n punti e $f(n)$ rette, esiste un punto P tale che la somma delle distanze di P dalle $f(n)$ rette è minore della somma delle distante di P dagli n punti? Penso che si possa congetturare che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n} = \frac{\pi}{2}$.

Questo problema potrebbe poi essere posto nello spazio tridimensionale o nello spazio euclideo multidimensionale invece che nel piano, ed esteso considerando altri enti geometrici.