Seconda forma del lemma lifting the exponent (lte):
siano x e y due interi, n un intero positivo dispari e p un primo tale che p|x+y e nè x nè y sono divisibili per p. Allora si ha:
$SL_p(x^n+y^n)=SL_p(x+y)+SL_p(n)$ ($SL_p(z)$ è il logaritmo selettivo in base p di z).

Dimostrazione:

se n è un intero positivo dispari, si ha:

$$x^n+y^n = (x+y) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{(n-k-1)} y^k \quad .$$

Per p = 2 il lemma segue subito dal fatto che $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{(n-k-1)} y^k$ è un numero

dispari e dal fatto che $SL_2(n) = 0$ (si ha $SL_2(x^n+y^n)=SL_2(x+y)$).

Assumiamo quindi p > 2.

Posto $m = SL_p(x+y)$, si ha $x+y = h\cdot p^m$, dove $p \nmid h$ e m è un intero positivo, e quindi

$$x^n+y^n = (x+y) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{(n-k-1)} (h\cdot p^m - x)^k =$$

$$= (x+y) \sum_{k=0}^{n-1} \left((-1)^k x^{(n-k-1)} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (h\cdot p^m)^{k-i} x^i \right) =$$

$$= (x+y) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k+i} \binom{k}{i} (h\cdot p^m)^{k-i} x^{n-(k-i)-1} = \qquad \text{poniamo } k-i=j$$

$$= (x+y) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{2k-j} \binom{k}{k-j} (h\cdot p^m)^j x^{n-j-1} =$$

$$= (x+y) \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (h\cdot p^m)^j x^{n-1-j} =$$

$$= (x+y) \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j}^{n-1} (-1)^j \binom{k}{j} (h\cdot p^m)^j x^{n-1-j}$$

$= (x+y) \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \left(\sum_{k=j}^{n-1} \binom{k}{j} \right) (h \cdot p^m)^j x^{n-1-j} =$

$= (x+y) \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j+1} (h \cdot p^m)^j x^{n-1-j} =$ poniamo j+1=k

$= (x+y) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (h \cdot p^m)^{k-1} x^{n-k}$

posto $P(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (h \cdot p^m)^{k-1} x^{n-k}$

andiamo a determinare quanto vale $SL_p(P(x))$.

Si ha $P(x) = n \cdot x^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (h \cdot p^m)^{k-1} x^{n-k}$

per dimostrare che $SL_p(P(x)) = SL_p(n)$ (da cui seguirebbe subito la tesi), poiché $p \nmid x$,

è sufficiente dimostrare che $SL_p \left(\sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (h \cdot p^m)^{k-1} x^{n-k} \right) > SL_p(n)$.

Questo, a sua volta, sarebbe vero se ogni termine della sommatoria contenesse il fattore p più di $SL_p(n)$ volte.

Si tratta quindi di dimostrare che $SL_p \left(\binom{n}{k} p^{(k-1)m} \right) > SL_p(n)$ per k=2,3, … ,n.

E' sufficiente dimostrare che $SL_p(k!) < (k-1)m$ per k=2,3, … , n e p > 2.

Si ha $SL_p(k!) \leq \sum_{i=1}^{h} \frac{k}{p^i}$ dove $p^h \leq k < p^{h+1}$.

Per p > 2 si ha $\sum_{i=1}^{h} \frac{k}{p^i} = \frac{k(p^h - 1)}{p^h(p-1)} < \frac{k}{p-1} \leq k-1 \leq (k-1)m$

Questo conclude la dimostrazione.