Dimostrazione della divergenza della serie dei reciproci dei numeri primi.

Sia $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \dots\ \}$ l'insieme dei numeri naturali e $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri primi.

E' noto che $\sum\limits_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ è una serie divergente (Eulero lo dimostrò in più di un modo).
Espongo una dimostrazione abbastanza concisa della suddetta divergenza.

a) Per $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathbb{P}_n = \{p \in \mathbb{P} \,|\, p \leq n\}$. Per $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ si ha:
$\prod\limits_{p\in\mathbb{P}_n} (1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ ...\ ) > \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Passando al limite per $n \to \infty$ si deduce che
$\prod\limits_{p\in\mathbb{P}} (1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ ...\ ) = \prod\limits_{p\in\mathbb{P}} (1 + \frac{1}{p-1})$
diverge.

b) Faremo ora uso del seguente Lemma (la cui dimostrazione non è difficile):
Sia $a_k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$. $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} (1 + a_k)$ converge (diverge) sse $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ converge (diverge).
Poiché $\prod\limits_{p\in\mathbb{P}} (1 + \frac{1}{p-1})$ diverge, usando il lemma si deduce che $\sum\limits_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p-1}$ diverge. La tesi segue osservando che $\forall p \in \mathbb{P}$ si ha $\frac{1}{2(p-1)} \leq \frac{1}{p}$.