PROPOSIZIONE:
Se $z > 0$ è un numero irrazionale, allora l'insieme dei resti della divisione di un numero naturale k per z (al variare di k nell'insieme dei numeri naturali N = 1, 2, 3, ...) è denso in [0, z].

IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE:
L'idea della dimostrazione si basa sul fatto che i resti della divisione sono tutti diversi l'uno dall'altro, e poiché sono infiniti, è possibile trovarne due arbitrariamente vicini tra loro (PARTE A). Partendo da due resti arbitrariamente vicini tra loro, è possibile trovarne uno arbitrariamente vicino a 0 (oppure a z) (PARTE B), a partire dal quale se ne possono trovare altri distribuiti sull'intervallo [0,z] equidistanziati tra loro, posti l'uno dall'altro ad una distanza η arbitrariamente piccola (PARTE C).

DIMOSTRAZIONE:

(PARTE A)
Sia $r_k = k-q_k\cdot z$ il resto della divisione di k per z, con $0 < r_k < z$.
Se $h \neq k$ allora $r_h \neq r_k$, da cui si deduce facilmente che esistono due numeri naturali $k1 < k2$ tali che $|r_{k2} - r_{k1}| < \varepsilon$, comunque piccolo venga scelto $0 < \varepsilon < z$.

(PARTE B)
Posto allora $n = k2-k1$, si ha
$0 < r_n < \varepsilon$ se $r_{k2} > r_{k1}$
(infatti $r_{k2} – r_{k1} = (k2-q_{k2}\cdot z)-(k1-q_{k1}\cdot z) = (k2-k1)-(q_{k2}- q_{k1})\cdot z = n-q_n\cdot z = r_n$),
$z - \varepsilon < r_n < z$ se $r_{k2} < r_{k1}$
(infatti si ha: $- \varepsilon < r_{k2} – r_{k1} < 0$, cioè
$- \varepsilon < (k2-q_{k2}\cdot z)-(k1-q_{k1}\cdot z) < 0$, cioè
$- \varepsilon < (k2-k1)-(q_{k2}- q_{k1})\cdot z < 0$, quindi
$z-\varepsilon < n-q_n\cdot z < z$, cioè
$z-\varepsilon < r_n < z$).

(PARTE C)
Nel primo caso, posto $r_n = \eta$, con $0 < \eta < \varepsilon$, si ha:
$r_{i\cdot n} = i\cdot \eta$ con i = 1, 2, 3, … , parte_intera(z/η)
(infatti poiché $r_n = n-q_n\cdot z = \eta$ si ha
$i\cdot n-i\cdot q_n\cdot z = i\cdot\eta = r_{i\cdot n}$
poiché $0 < i\cdot \eta < z$);

nel secondo caso, posto $r_n = z - \eta$, con $0 < \eta < \varepsilon$, si ha:
$r_{i \cdot n} = z - i \cdot \eta$ con $i = 1, 2, 3, \ldots$, parte_intera(z/η)
(infatti poiché $r_n = n - q_n \cdot z = z - \eta$ si ha
$i \cdot n - i \cdot q_n \cdot z = i \cdot z - i \cdot \eta$ e quindi
$i \cdot n - q_{i \cdot n} \cdot z = z - i \cdot \eta$ cioè
$r_{i \cdot n} = z - i \cdot \eta$
poiché $0 < z - i \cdot \eta < z$).
Da cui, in entrambi i casi, è possibile concludere con la tesi.

Sarebbe interessante sapere anche qual è l'insieme derivato dei resti della divisione di n^k (con k numero naturale maggiore di 1) per un numero irrazionale, o l'insieme derivato dei resti della divisione di n! per un numero irrazionale.