Sistema **32.b** ***Muraca Giuseppe*** Matr. ***47553***

5° TESINA

MECCANISMI ATTIVATORI-INIBITORI

TASFORMATE DI LAPLACE

INDICE

PARTE PRIMA

Con le trasformate di Laplace possiamo trattare il problema della risoluzione delle equazioni differenziali lineari, risolvendole in uno spazio in cui la loro complessità risulta minore.

Una funzione f(t) nello spazio delle t viene trasformata in F(s) nello spazio delle s tramite:

$$f(t) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$$

alcune trasformate fondamentali sono:

f(t)	***F(s)***
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^{n-1}	$\frac{(n-1)!}{s^n}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$t^{n-1}e^{at}$	$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$

Una proprietà importante dell'operatore di trasformazione $L[\ ]$ è la linearità. Cioè

$$L[af(t) + bg(t)] = aL[f(t)] + bL[g(t)]$$

ricordiamo infine che per quanto riguarda la trasformata della derivata n-esima di f(t) si ha che:

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)] - s^{n-1}F'(0) - s^{n-1}F''(0)......... - F^{(n-1)}(0)$$

Sfruttando le trasformate delle funzioni tabellate, la linearità dell'operatore L e la trasformata della derivata, trasformiamo il nostro sistema in esame (linearizzato).

PARTE SECONDA

Esaminiamo il primo caso a=1 b=1   u(0)=1   v(0)=1

$$\begin{cases} \dot{u} = 4v - 1 \\ \dot{v} = -u - 4v + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} - 4v + 1 = 0 \\ \dot{v} + u + 4v - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\dot{u} - 4v + 1] = \mathcal{L}[0] \\ \mathcal{L}[\dot{v} + u + 4v - 3] = \mathcal{L}[0] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}[\dot{u}(t)] - 4\mathcal{L}[v(t)] + \mathcal{L}[1] = \mathcal{L}[0] \\ \mathcal{L}[\dot{v}(t)] + \mathcal{L}[u(t)] + 4\mathcal{L}[v(t)] - \mathcal{L}[3] = \mathcal{L}[0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} sU(s) - 1 + 4V(s) + \frac{1}{s} = 0 \\ sV(s) - 1 + U(s) + 4V(s) - \frac{3}{s} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V(s) = \frac{s}{4}U(s) + \frac{1}{4s} - \frac{1}{4} \\ s\left[\frac{s}{4}U(s) + \frac{1}{4s} - \frac{1}{4}\right] - 1 + U(s) + 4\left[\frac{s}{4}U(s) + \frac{1}{4s} - \frac{1}{4}\right] - \frac{3}{s} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V(s) = \frac{s}{4}U(s) + \frac{1}{4s} - \frac{1}{4} \\ \frac{s^2}{4}U(s) + \frac{1}{4} - \frac{s}{4} - 1 + U(s) + sU(s) + \frac{1}{s} - 1 - \frac{3}{s} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V(s) = \frac{s}{4}U(s) + \frac{1}{4s} - \frac{1}{4} \\ \left(\frac{s^2 + 4s + 4}{4}\right)U(s) = \frac{s}{4} - \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{s} + \frac{3}{s} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V(s) = \frac{s}{4}U(s) + \frac{1}{4s} - \frac{1}{4} \\ \left(\frac{s^2 + 4s + 4}{4}\right)U(s) = \frac{s^2 + 7s + 8}{4s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V(s) = \frac{s}{4}U(s) + \frac{1}{4s} - \frac{1}{4} \\ U(s) = \frac{s^2 + 7s + 8}{4s}\left(\frac{4}{s^2 + 4s + 4}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V(s) = \frac{s}{4}U(s) + \frac{1}{4s} - \frac{1}{4} \\ U(s) = \frac{s^2 + 7s + 8}{s(s^2 + 4s + 4)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V(s) = \frac{s}{4}\left[\frac{s^2 + 7s + 8}{s(s^2 + 4s + 4)}\right] + \frac{1}{4s} - \frac{1}{4} \\ U(s) = \frac{s^2 + 7s + 8}{s(s^2 + 4s + 4)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V(s) = \frac{s^2 + 7s + 8}{4(s^2 + 4s + 4)} + \frac{1}{4s} - \frac{1}{4} \\ U(s) = \frac{s^2 + 7s + 8}{s(s^2 + 4s + 4)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V(s) = \dfrac{4s^2 + 8s + 4}{4s\left(s^2 + 4s + 4\right)} \\ U(s) = \dfrac{s^2 + 7s + 8}{s\left(s^2 + 4s + 4\right)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V(s) = \dfrac{s^2 + 2s + 1}{s\left(s^2 + 4s + 4\right)} \\ U(s) = \dfrac{s^2 + 7s + 8}{s\left(s^2 + 4s + 4\right)} \end{cases}$$

a questo punto il problema è risolto. Dobbiamo però antitrasformare per ottenere le soluzioni nello spazio delle t. Antitrasformiamo, quindi, sfruttando il teorema dei residui.

I Poli sono:

$$p_1 = 0$$

$$p_{2,3} = -2 \pm \sqrt{4-4} = -2$$

abbiamo quindi un polo multiplo.

Il sistema può essere riscritto:

$$\begin{cases} U(s) = \dfrac{R1}{s} + \dfrac{R2}{(s+2)^2} + \dfrac{R3}{(s+2)} \\ V(s) = \dfrac{T1}{s} + \dfrac{T2}{(s+2)^2} + \dfrac{T3}{(s+2)} \end{cases}$$

dobbiamo adesso determinare R1, R2, R3, T1, T2, T3.

Sappiamo che in caso di poli multipli:

$$F(s) = \frac{P(s)}{(s-p_1)^{r_1}(s-p_2)^{r_2}\ldots.(s-p_n)^{r_h}} = \sum_{i=1}^{h}\sum_{l=1}^{r_i} \frac{k_{il}}{(s-p_i)^{r_i-l+1}}$$

con

$$k_{il} = \lim_{s \to p_i}\left\{\frac{1}{(l-1)!}\frac{d^{l-1}}{ds^{l-1}}\left[(s-p)^{r_i}\frac{P(s)}{Q(s)}\right]\right\}$$

allora

$$R1 = \lim_{s \to 0} s\left(\frac{s^2 + 7s + 8}{s(s+2)^2}\right) = \frac{8}{4} = 2$$

$$R2 = \lim_{s \to -2} \left((s+2)^2 \frac{s^2 + 7s + 8}{s(s+2)^2} \right) = \frac{4 - 14 + 8}{-2} = 1$$

$$R3 = \lim_{s \to -2} \frac{d}{ds} \left[(s+2)^2 \left(\frac{s^2 + 7s + 8}{s(s+2)^2} \right) \right] = \lim_{s \to -2} \frac{s^2 - 8}{s^2} = -1$$

$$T1 = \lim_{s \to 0} s \left(\frac{s^2 + 2s + 1}{s(s+2)^2} \right) = \frac{1}{4}$$

$$T2 = \lim_{s \to -2} \left((s+2)^2 \frac{s^2 + 2s + 1}{s(s+2)^2} \right) = \frac{4 - 4 + 1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$T3 = \lim_{s \to -2} \frac{d}{ds} \left[(s+2)^2 \left(\frac{s^2 + 2s + 1}{s(s+2)^2} \right) \right] = \lim_{s \to -2} \frac{s^2 - 1}{s^2} = \frac{3}{4}$$

il sistema allora diventa:

$$\begin{cases} V(s) = \dfrac{2}{s} + \dfrac{1}{(s+2)^2} - \dfrac{1}{(s+2)} \\ U(s) = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(s+2)^2} + \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{(s+2)} \end{cases}$$

adesso le antitrasformate diventano elementari. Servendoci della tabella vista prima abbiamo che:

$$\begin{cases} u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{s} + \dfrac{1}{(s+2)^2} - \dfrac{1}{(s+2)} \right] \\ v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(s+2)^2} + \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{(s+2)} \right] \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} u(t) = 2 + te^{-2t} - e^{-2t} \\ v(t) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}te^{-2t} + \dfrac{3}{4}e^{-2t} \end{cases}}$$

Abbiamo così trovato la soluzione particolare del nostro sistema con i dati iniziali u(0)=1 v(0)=1, la quale coincide con quella ottenuta nella prima tesina.

PARTE TERZA

Esaminiamo anche il secondo caso trattato nella 1° Tesina.
caso a=1 b=0 u(0)=1 v(0)=1

$$\begin{cases} \dot{u} = -u + v + 1 \\ \dot{v} = -v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} + u - v - 1 = 0 \\ \dot{v} + v = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left[\dot{u} + u - v - 1\right] = \mathcal{L}\left[0\right] \\ \mathcal{L}\left[\dot{v} + v\right] = \mathcal{L}\left[0\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}\left[\dot{u}(t)\right] + \mathcal{L}\left[u(t)\right] - \mathcal{L}\left[v(t)\right] - \mathcal{L}\left[1\right] = \mathcal{L}\left[0\right] \\ \mathcal{L}\left[\dot{v}(t)\right] + \mathcal{L}\left[v(t)\right] = \mathcal{L}\left[0\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} sU(s) - 1 + U(s) - V(s) - \dfrac{1}{s} = 0 \\ sV(s) - 1 + V(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sU(s) - 1 + U(s) - V(s) - \dfrac{1}{s} = 0 \\ V(s) = \dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} sU(s) - 1 + U(s) - \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s} = 0 \\ V(s) = \dfrac{1}{s+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s+1)U(s) = 1 + \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{s} \\ V(s) = \dfrac{1}{s+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s+1)U(s) = \dfrac{s(s+1) + s + s + 1}{s(s+1)} \\ V(s) = \dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} U(s) = \dfrac{s^2 + 3s + 1}{s(s+1)^2} \\ V(s) = \dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

anche in questo caso abbiamo un polo multiplo.

$$\begin{cases} U(s) = \dfrac{R1}{s} + \dfrac{R2}{(s+1)^2} + \dfrac{R3}{(s+1)} \\ V(s) = \dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

$$R1 = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{s^2+3s+1}{s(s+1)^2}\right) = \frac{1}{1} = 1$$

$$R2 = \lim_{s\to -1}\left((s+1)^2\,\frac{s^2+3s+1}{s(s+1)^2}\right) = \frac{1-3+1}{-1} = 1$$

$$R3 = \lim_{s\to -1}\frac{d}{ds}\left[(s+1)^2\left(\frac{s^2+3s+1}{s(s+1)^2}\right)\right] = \lim_{s\to -1}\frac{s^2-1}{s^2} = 0$$

$$\begin{cases} U(s) = \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{(s+1)^2} \\ V(s) = \dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

antitrasformando abbiamo che:

$$\begin{cases} u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{(s+1)^2}\right] \\ v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+1}\right] \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} u(t) = 1 + te^{-t} \\ v(t) = e^{-t} \end{cases}}$$

Abbiamo così trovato la soluzione particolare del nostro sistema con i dati iniziali u(0)=1 v(0)=1, la quale, anche i questo caso, coincide con quella ottenuta nella prima tesina.

PARTE QUARTA

Esaminiamo adesso questo secondo caso inserendo però il nostro segnale in esame nella 1° equazione del nostro sistema.

Considerando entrambe le condizioni iniziali pari a zero.

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} \dot{u} = -u + v + 1 \\ \dot{v} = -v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} + u - v - 1 = f(t) \\ \dot{v} + v = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{L}[\dot{u} + u - v - 1] = \mathrm{L}[f(t)] \\ \mathrm{L}[\dot{v} + v] = \mathrm{L}[0] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{L}[\dot{u}(t)] + \mathrm{L}[u(t)] - \mathrm{L}[v(t)] - \mathrm{L}[1] = \mathrm{L}[f(t)] \\ \mathrm{L}[\dot{v}(t)] + \mathrm{L}[v(t)] = \mathrm{L}[0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} sU(s) + U(s) - V(s) - \frac{1}{s} = F(s) \\ sV(s) + V(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sU(s) + U(s) - \frac{1}{s} = F(s) \\ V(s) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s+1)U(s) = F(s) + \frac{1}{s} \\ V(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U(s) = \dfrac{\frac{sF(s)+1}{s}}{(s+1)} \\ V(s) = 0 \end{cases}$$

se consideriamo il segnale nell’intervallo [0, 2π] il nostro segnale diventa $f(t) = t$ quindi $L(f(t)) = \frac{1}{s^2}$ e il sistema diventa:

$$\begin{cases} U(s) = \dfrac{\frac{\frac{1}{s}+1}{s}}{(s+1)} \\ V(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U(s) = \dfrac{\frac{s+1}{s^2}}{(s+1)} \\ V(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U(s) = \dfrac{s+1}{s^2(s+1)} \\ V(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U(s) = \dfrac{1}{s^2} = F(s) \\ V(s) = 0 \end{cases}$$

quindi la nostra curva in queste circostante ha lo stesso andamento del segnale!

Sappiamo che in generale

$$Y(s) = F(S)\frac{1}{Q(s)} + \frac{P(s)}{Q(s)}$$

dove:

- $Q(s)$ è un polinomio dato dai coefficienti di Y(s)

- $P(s)$ rappresenta i dati iniziali
- $F(S)\frac{1}{Q(s)}$ rappresenta la risposta al sistema forzante
- $\frac{P(s)}{Q(s)}$ rappresenta la risposta libera

nel caso di dati iniziali pari a zero abbiamo

$$Y(s) = F(S)\frac{1}{Q(s)}$$

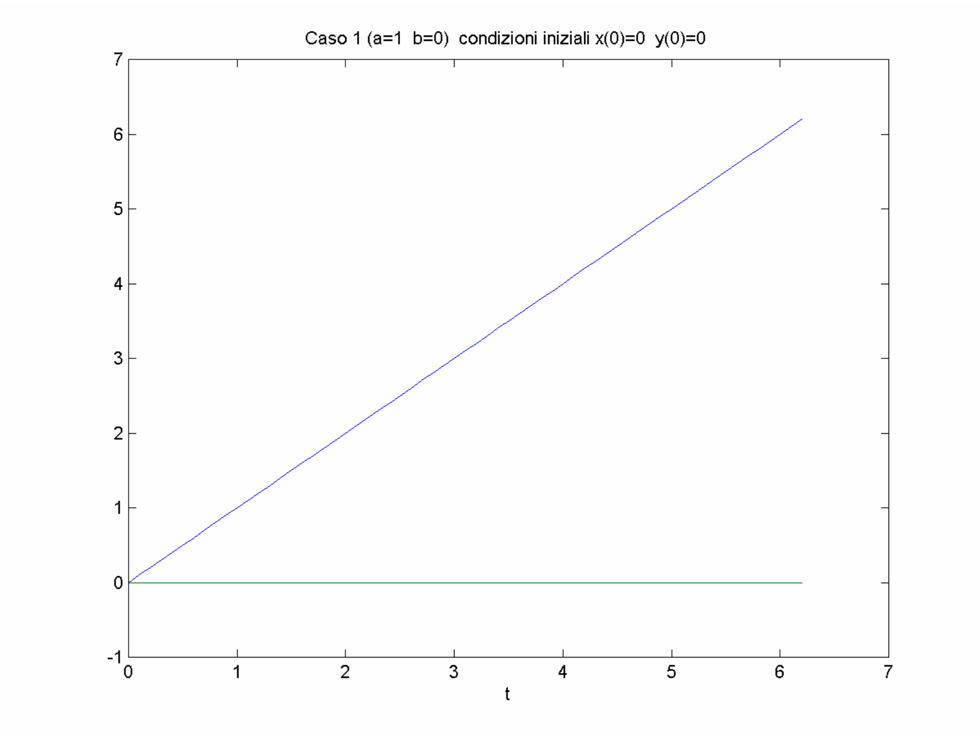
e il termine $\frac{1}{Q(s)}$ rappresenta la funzione di trasferimento, cioè la funzione che lega l'ingresso del sistema con l'uscita.

Nel caso appena visto la funzione di trasferimento è pari a 1.

Antitrasformando il sistema abbiamo che:

$$\begin{cases} u(t) = f(t) = t \\ v(t) = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in [0,2p]$$

Naturalmente il grafico coincide con quello ottenuto tramite l'integrazione numerica con il comando ODE23.



PARTE QUINTA

Esaminiamo adesso ancora lo stesso caso considerando pero le condizioni iniziali entrambe pari a 1

Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} \dot{u} = -u + v + 1 \\ \dot{v} = -v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} + u - v - 1 = f(t) \\ \dot{v} + v = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{L}[\dot{u} + u - v - 1] = \mathrm{L}[f(t)] \\ \mathrm{L}[\dot{v} + v] = \mathrm{L}[0] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{L}[\dot{u}(t)] + \mathrm{L}[u(t)] - \mathrm{L}[v(t)] - \mathrm{L}[1] = \mathrm{L}[f(t)] \\ \mathrm{L}[\dot{v}(t)] + \mathrm{L}[v(t)] = \mathrm{L}[0] \end{cases}$$

$$\begin{cases} sU(s) - 1 + U(s) - V(s) - \dfrac{1}{s} = F(s) \\ sV(s) - 1 + V(s) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sU(s) + U(s) - 1 - \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s} = F(s) \\ V(s) = \dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s+1)U(s) = 1 + \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{s} + F(s) \\ V(s) = \dfrac{1}{s+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U(s) = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{(s+1)^2} + \dfrac{1}{s(s+1)} + \dfrac{F(s)}{s+1} \\ V(s) = \dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

se consideriamo di nuovo l'intervallo di tempo [0, 2π] il nostro segnale diventa $f(t) = t$ quindi

$L(f(t)) = \frac{1}{s^2}$. Quindi:

$$\begin{cases} U(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s(s+1)} + \frac{1}{s^2(s+1)} \\ V(s) = \frac{1}{s+1} \end{cases}$$

che si può scrivere anche:

$$\begin{cases} U(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{R1}{s} + \frac{R2}{s+1} + \frac{T1}{s^2} + \frac{T2}{s} + \frac{T3}{s+1} \\ V(s) = \frac{1}{s+1} \end{cases}$$

dove:

$$R1 = \lim_{s \to 0}\left(s \frac{1}{s(s+1)} \right) = 1$$

$$R2 = \lim_{s \to -1}\left((s+1) \frac{1}{s(s+1)} \right) = -1$$

$$T1 = \lim_{s \to 0}\left(s^2 \frac{1}{s^2(s+1)} \right) = 1$$

$$T2 = \lim_{s \to 0} \frac{d}{ds}\left(s^2 \frac{1}{s^2(s+1)} \right) = \lim_{s \to 0}\left(-\frac{1}{(s+1)^2} \right) = -1$$

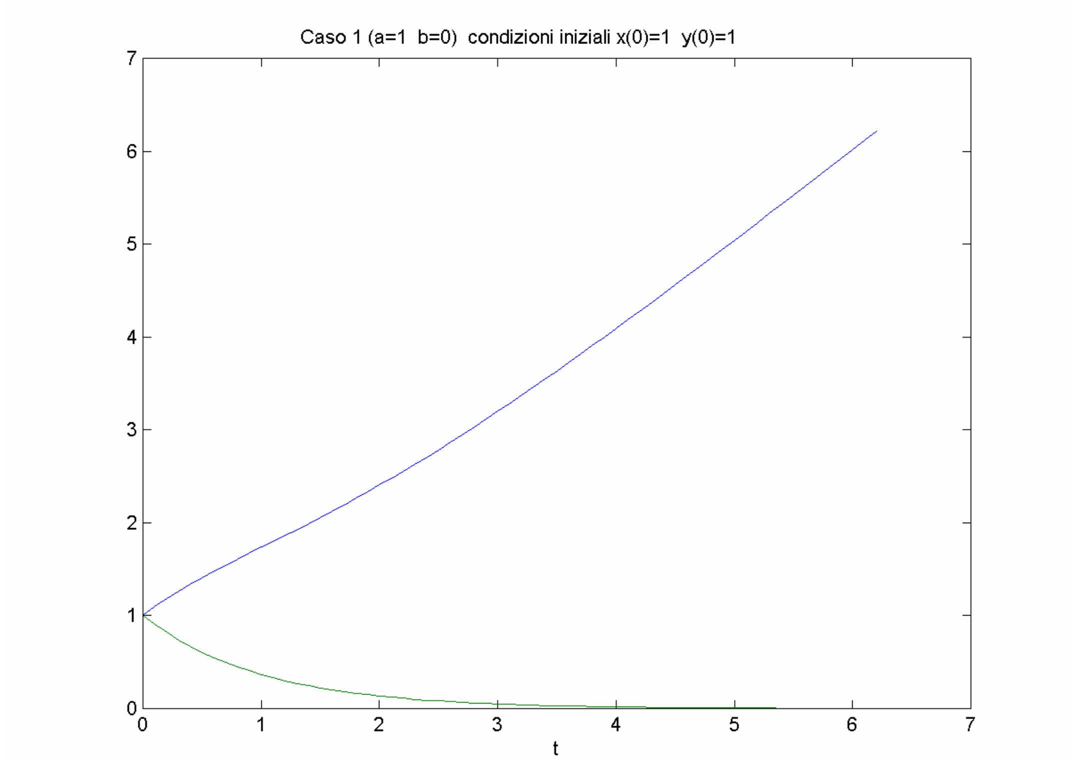
$$T3 = \lim_{s \to -1}\left((s+1) \frac{1}{s^2(s+1)} \right) = 1$$

allora

$$\begin{cases} U(s) = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{(s+1)^2} + \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s+1} \\ V(s) = \dfrac{1}{s+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2} + \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s+1} \\ V(s) = \dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

antitrasformando abbiamo:

$$\begin{cases} u(t) = te^{-t} + t + e^{-t} \\ v(t) = e^{-t} \end{cases}$$



questo è il grafico del sistema risultante, che coincide con quello ottenuto con la risoluzione numerica in MatLab.

L'implementazione in Matlab di questi grafici si trova rispettivamente nei file 'Caso2_1.m' e 'Caso2_2.m' mentre la risoluzione numerica nell'intervallo [0, 2π] è ottenuta attraverso la funzione *'Inibitorilin_s (a,b, u0, v0)'* che riceve in ingresso i parametri (a, b) e i dati iniziali u(0) e v(0) e restituisce in uscita il grafico del sistema in cui viene inserito il segnale f(t)=t nella 1° equazione.