

4° TESINA

MECCANISMI ATTIVATORI-INIBITORI

STUDIO DEL SISTEMA NON LINEARE

INDICE

1° PARTE –

Premessa.

2° PARTE –

Punti fissi.

3° PARTE –

Spazio delle fasi per il
Caso $(a=1 \ b=1)$ e Caso $(a=1 \ b=0)$.

4° PARTE -

Alcuni casi più interessanti.

5° PARTE -

Alcuni comportamenti del sistema che riceve
in ingresso il segnale.

PARTE PRIMA

Il nostro scopo è la ricerca di comportamenti ‘strani’ del sistema. I cosiddetti comportamenti caotici, su cui si basa la recente teoria del Caos (o meglio teoria dei sistemi dinamici non lineari). Questi comportamenti caotici fanno sì che il sistema (a lungo termine) diventi “non deterministico” sebbene si sappia che al suo interno il caos possiede un certo ‘ordine’.

I comportamenti della maggioranza dei fenomeni della natura non procedono con ritmi che si ripetono, ma, dopo un periodo regolare, presentano in modo inaspettato una “biforcazione” in un “punto critico” che si moltiplica fino a generare “turbolenza”.

«Una causa così piccola da sfuggire alla nostra attenzione, può determinare un effetto considerevole che non possiamo ignorare; in una tale situazione noi affermiamo che l'effetto è dovuto al caso. Se noi conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo nel momento iniziale, potremmo predire esattamente la situazione di quello stesso universo in un momento successivo. Ma quand'anche le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, potremmo ancora conoscere la situazione solo in modo approssimativo. Se una tale conoscenza ci permettesse di predire la situazione successiva con la stessa approssimazione, questo è tutto ciò che chiediamo e diremmo che il fenomeno è stato predetto e che è governato dalle leggi. Ma non sempre è così; può infatti accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali producano un errore enorme in quelle successive. La predizione diventa impossibile [...]». (da: James Gleick "CAOS". Sansoni Ed. 1987).

Per imbattersi in una situazione di comportamento caotico non vi è altro modo che procedere per tentativi (a meno che qualcuno non l'abbia scoperto prima di noi). Esaminando svariati casi, per i quali si considerano diverse combinazioni dei parametri e dei dati iniziali. Naturalmente non possiamo esaminare tutti i casi, possiamo però evidenziare situazioni interessanti per alcuni casi presi in esame.

PARTE SECONDA

Iniziamo adesso ad esaminare il comportamento del sistema non lineare. Individuando prima di tutto i punti fissi e considerando per il momento il sistema isolato.

Come abbiamo già visto nella 1° tesina il nostro sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = a - u + u^2 v \\ \dot{v} = b - u^2 v \end{cases}$$

può essere considerato come

$$\begin{cases} \dot{u} = f_1(u, v) \\ \dot{v} = f_2(u, v) \end{cases}$$

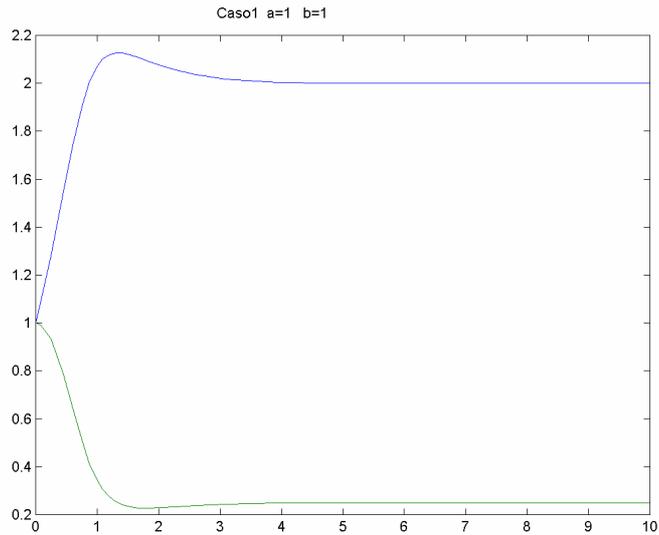
Trovare i punti fissi del sistema significa quindi trovare i punti in cui risulti:

$$\begin{cases} f_1(u, v) = 0 \\ f_2(u, v) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - u + u^2 v = 0 \\ b - u^2 v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - u + u^2 \frac{b}{u^2} = 0 \\ v = \frac{b}{u^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = a + b \\ v = \frac{b}{u^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = a + b \\ v_0 = \frac{b}{(a + b)^2} \end{cases}$$

L'unico punto fisso è dunque $P\left(a + b, \frac{b}{(a + b)^2}\right)$ che risulta stabile se gli autovalori del sistema linearizzato attorno a questo punto hanno parte reale minore di zero.

Se per esempio esaminiamo il caso $a=1$ $b=1$, troviamo che il punto fisso $(2, \frac{1}{4})$ è un punto di equilibrio stabile.

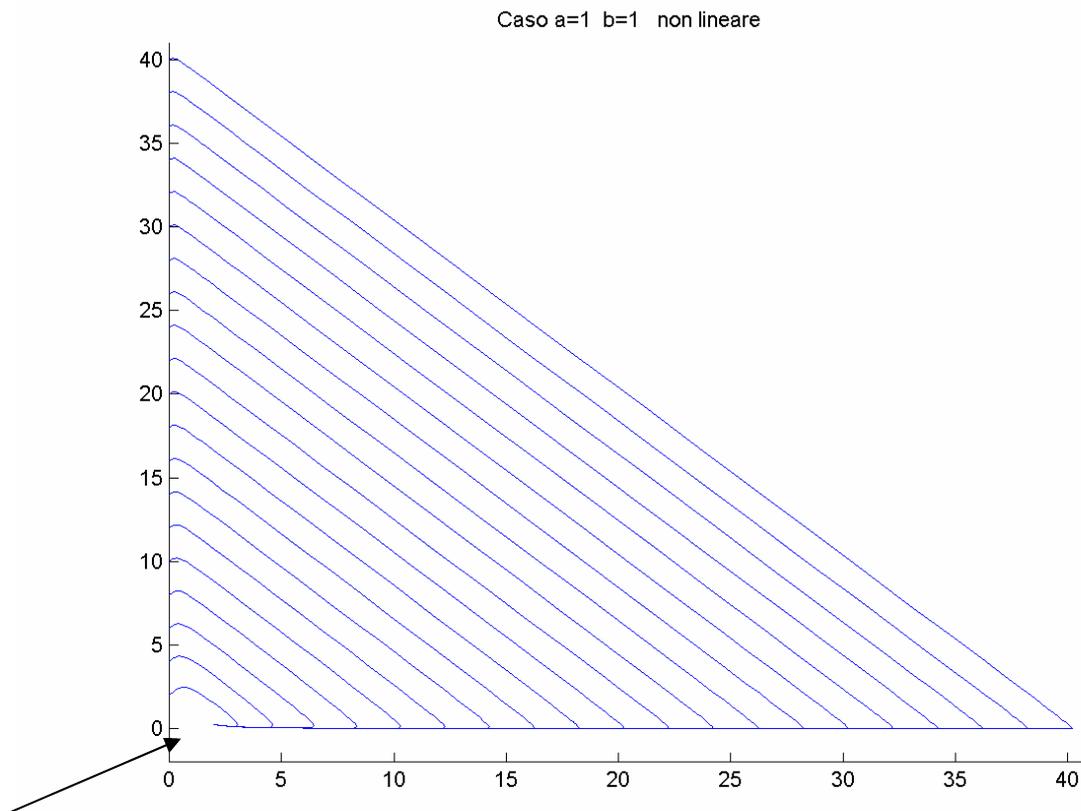
Il grafico del risultato del sistema in questo caso (con le condizioni iniziali $u(0)=1$ $v(0)=1$) è:



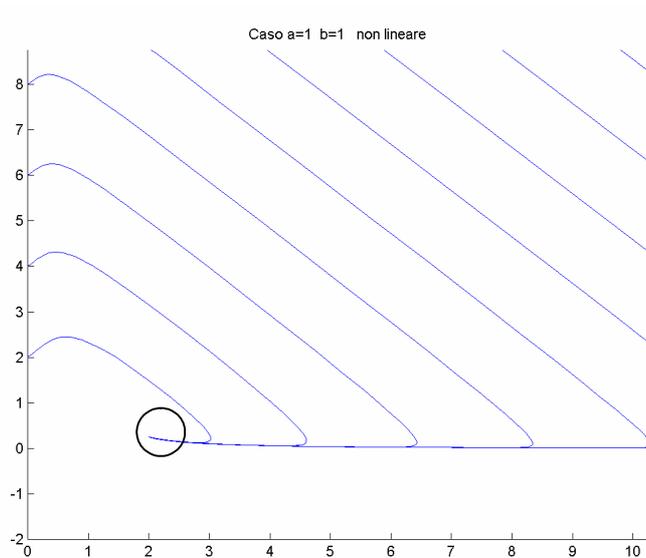
e come possiamo vedere le due curve tendono ai valori di equilibrio $2, \frac{1}{4}$.

PARTE TERZA

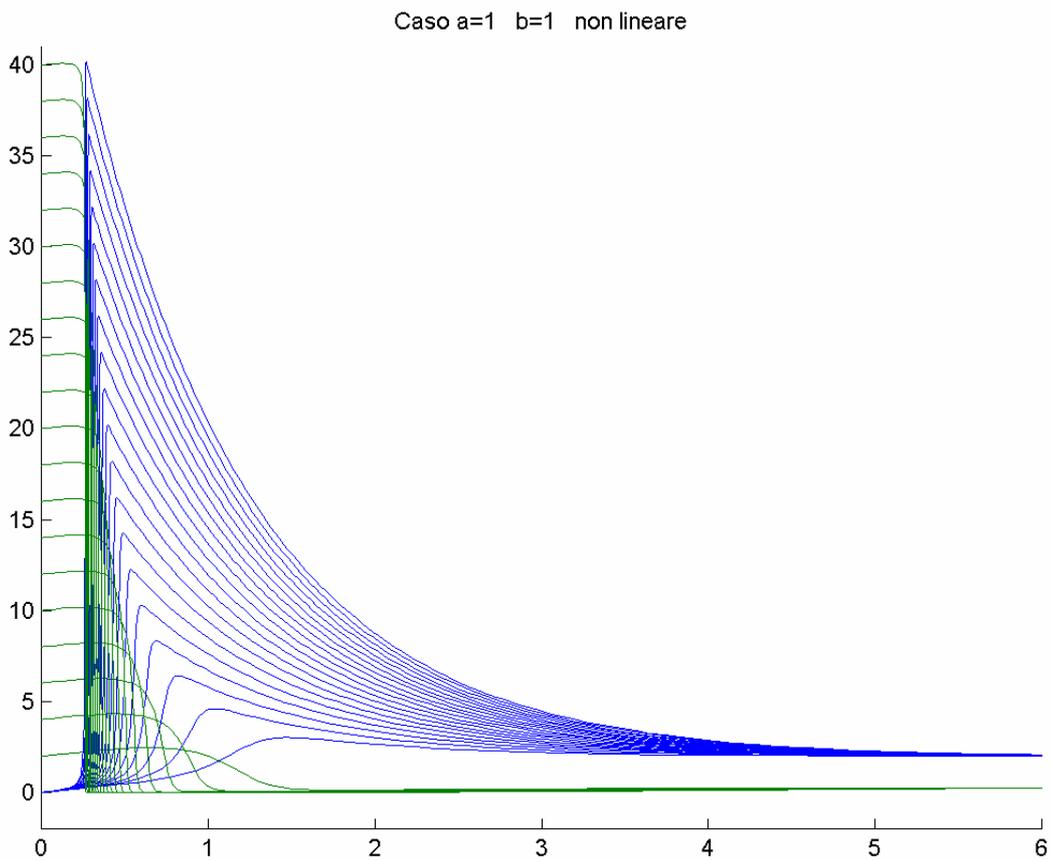
Il fatto che le due curve tendano ai valori di equilibrio è confermato anche dalla rappresentazione del comportamento del sistema nel piano delle fasi, in cui sono tracciate le curve per i seguenti valori iniziali $u(0)=0 \ v(0)=i$ con $i=2,4,6,\dots,40$.



anche qui vediamo come tutte le curve tendano al valore $(2, 0,25)$. L'immagine ingrandita attorno a questo punto è:

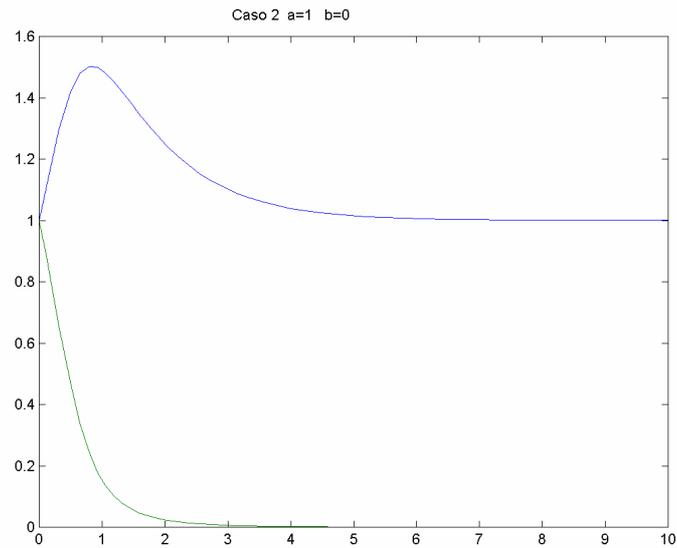


Possiamo anche tracciare tutte le curve che rappresentano la soluzione del sistema per gli stessi valori iniziali considerati sopra e sovrapporli sullo stesso grafico:

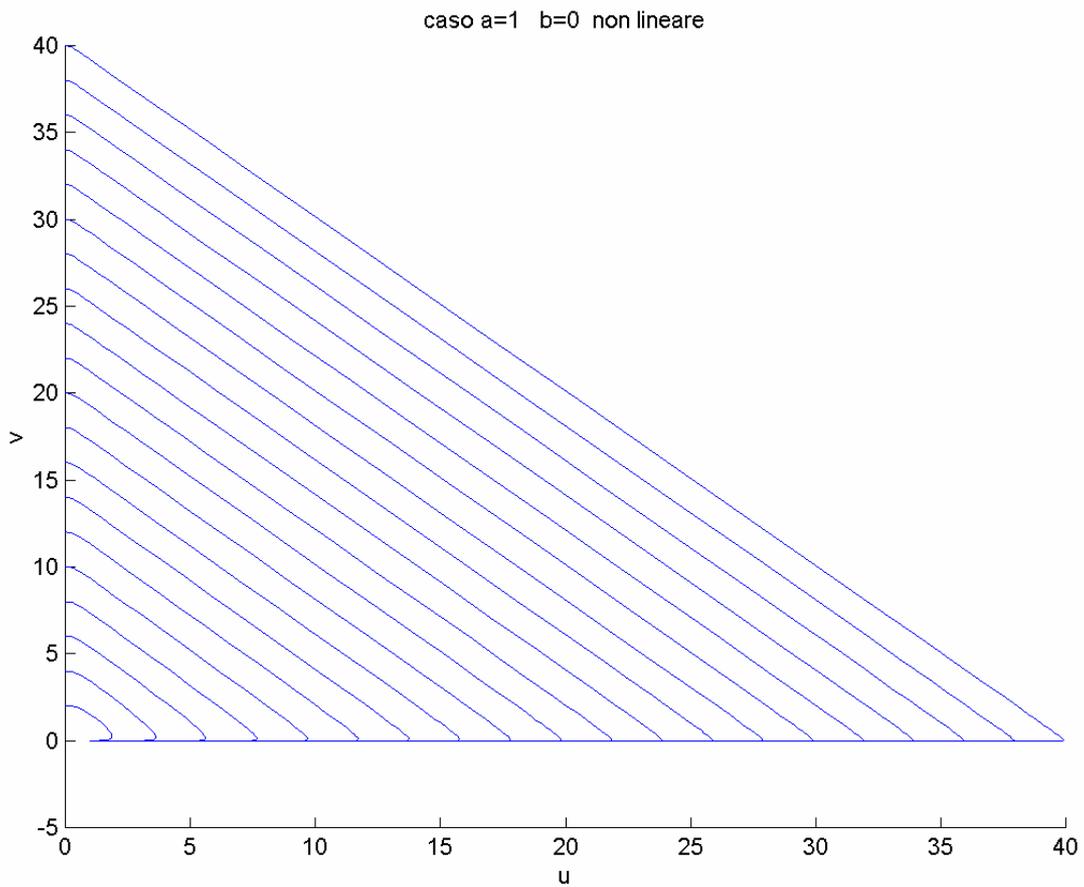


e vedere quindi l'andamento delle curve per diversi dati iniziali. Tutte comunque tendono ai valori di equilibrio.

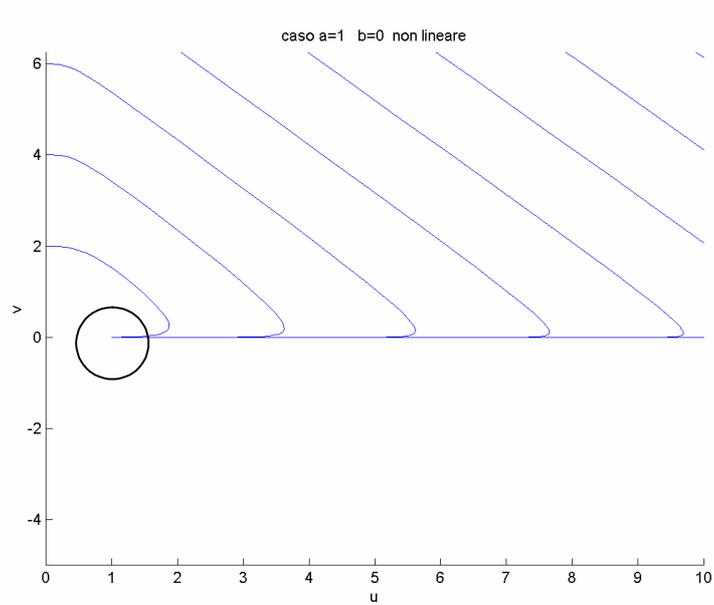
Vediamo adesso il caso in cui assegniamo ai parametri i valori $a=1$ $b=0$. Per i dati iniziali $u(0)=1$ $v(0)=1$ abbiamo il seguente grafico.



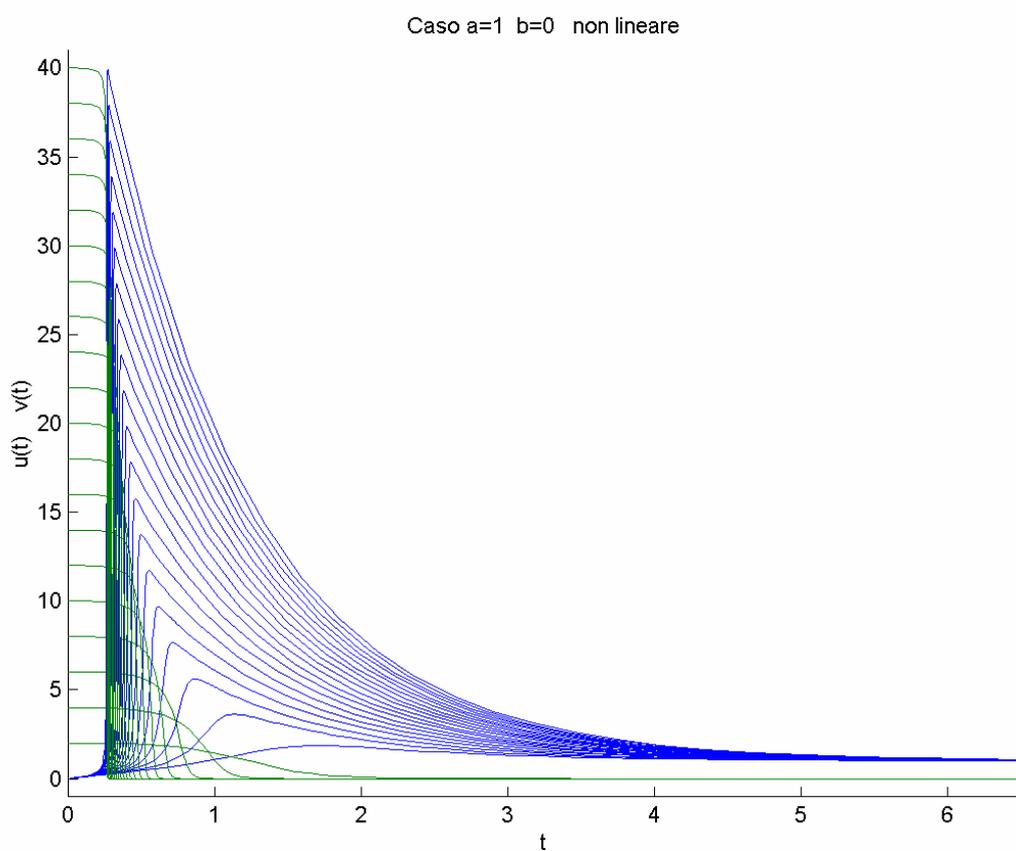
in questo caso il punto di equilibrio è (1,0). Infatti se analizziamo il comportamento del sistema nel piano delle fasi abbiamo la conferma



ingrandendo attorno al punto (1,0) abbiamo:



il grafico delle $u(t)$ e $v(t)$ per le diverse condizioni iniziali è:



che è molto simile a quello del caso precedente.

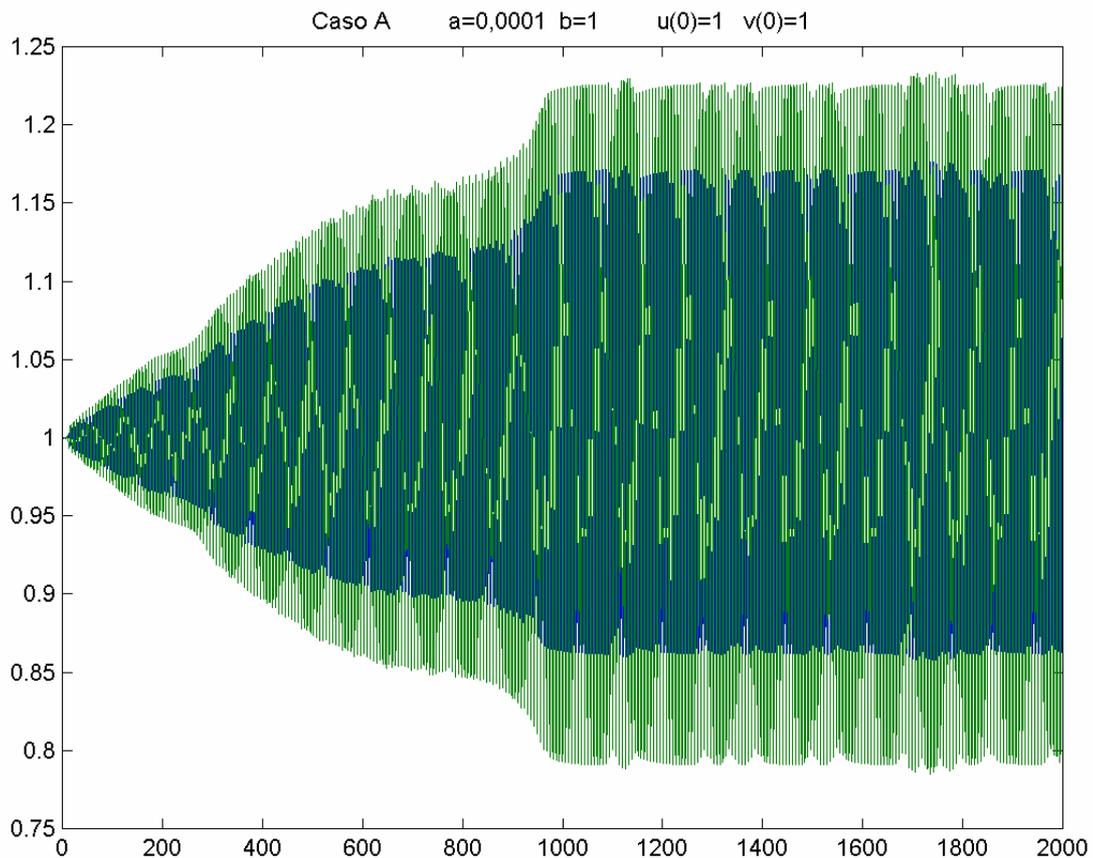
PARTE QUARTA

Vediamo adesso alcuni casi più o meno interessanti riscontrati durante il lavoro di ricerca. I casi sono ordinati dalla lettera A alla G, e rappresentano i risultati ottenuti dalla combinazione di svariati valori dei parametri e delle condizioni iniziali.

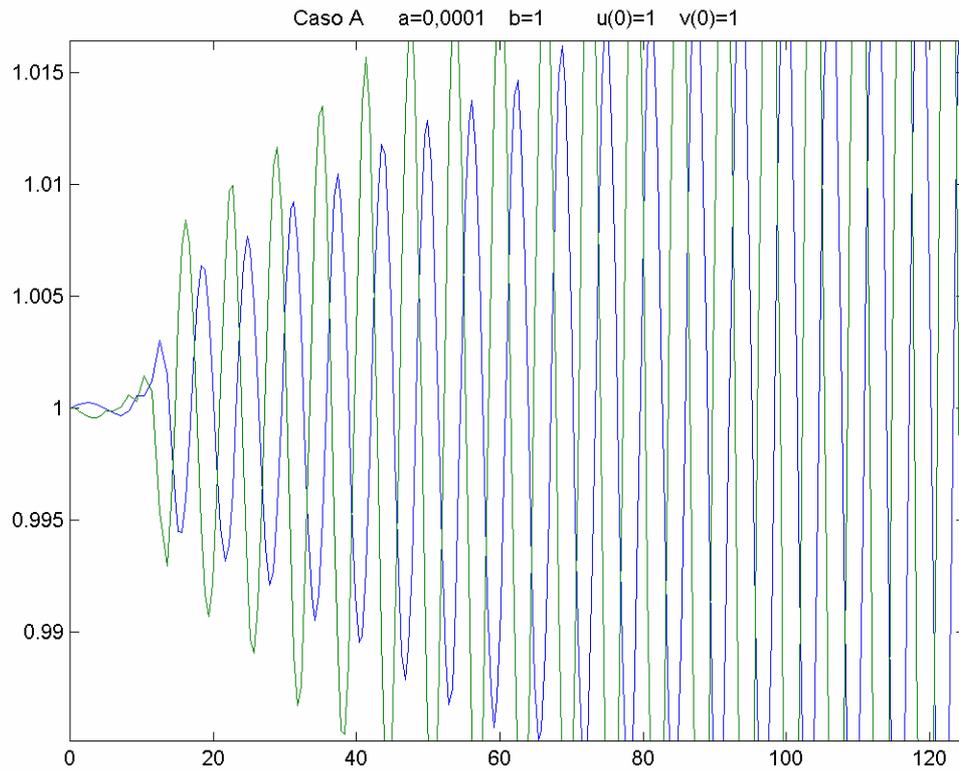
CASO A

Il primo di questi casi è il caso in cui abbiamo che il parametro $a=0,0001$ e $b=1$, e le condizioni iniziali sono poste entrambe pari a 1.

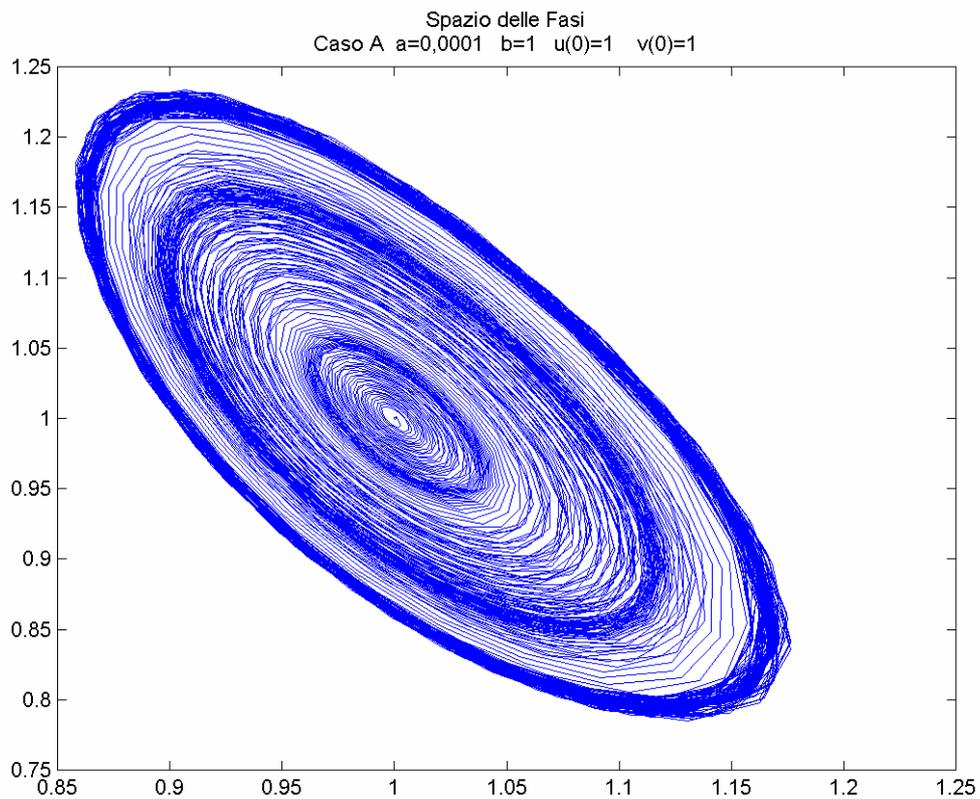
In questo caso abbiamo il seguente andamento delle curve $u(t)$ e $v(t)$ (integrate tra $t=0$ e $t=2000$) (in tutti i grafici la $u(t)$ è blu e la $v(t)$ è verde)



si nota come le curve oscillino attorno al valore 1 con una intensità crescente. Ingrandendo attorno a $t=0$ si può notare meglio l'andamento delle due curve.



Vediamo adesso l'andamento di $u(t)$ e $v(t)$ nello spazio delle fasi:

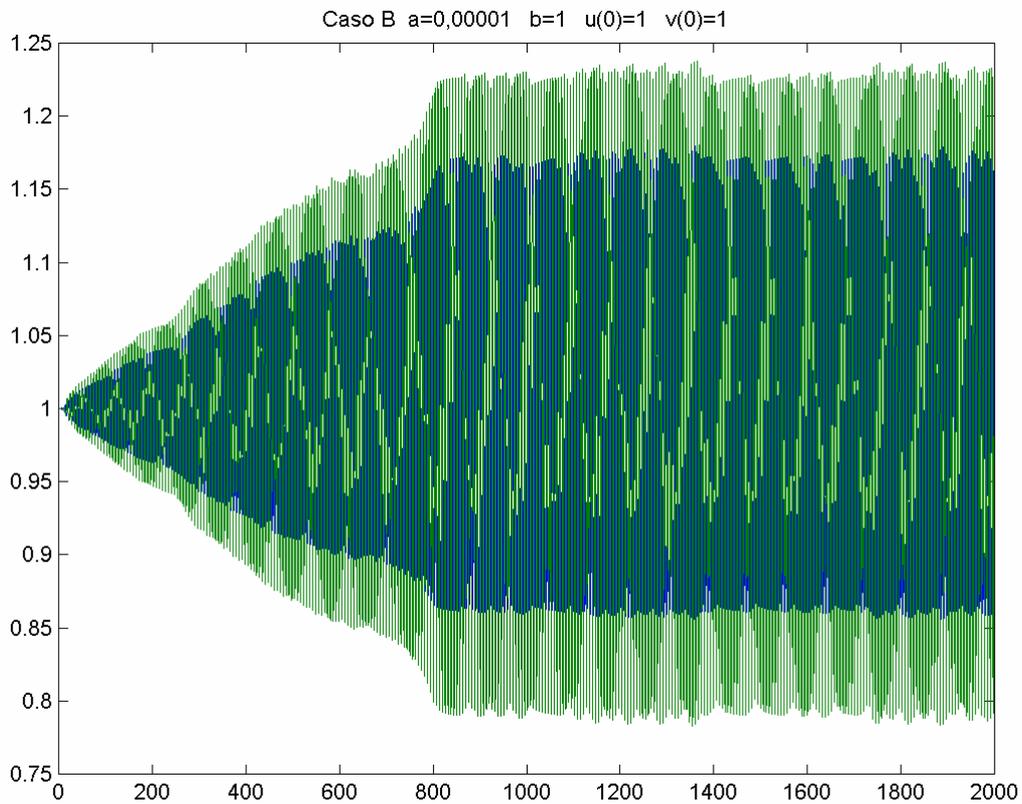


anche qui si nota che la linea parte dal punto $(1,1)$ e si muove attorno a questo punto allargando sempre più i confini di questa ellisse finché arriva ad un limite oltre il quale le linee si addensano.

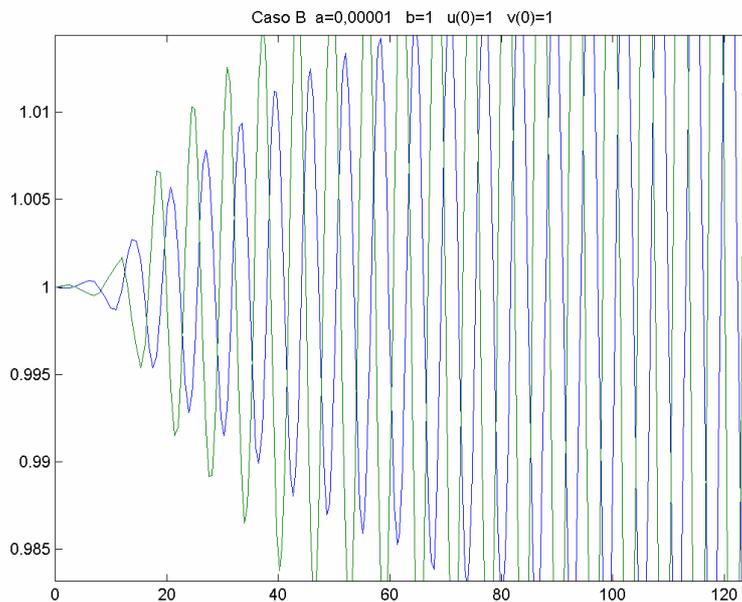
CASO B

In questo secondo caso abbiamo cambiato poco, infatti i risultati sono molto simili. Il parametro $a=0,00001$ e $b=1$, e le condizioni iniziali sono poste entrambe pari a 1.

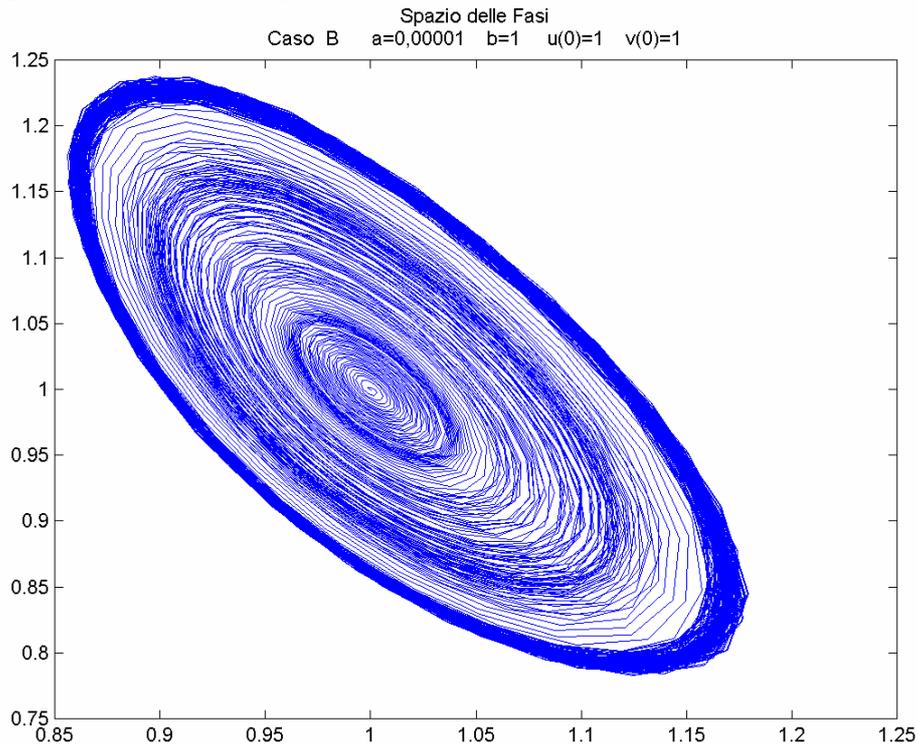
Il grafico delle curve risultanti è:



anche qui abbiamo un comportamento oscillatorio.
Vediamo l'ingrandimento attorno a $t=0$:



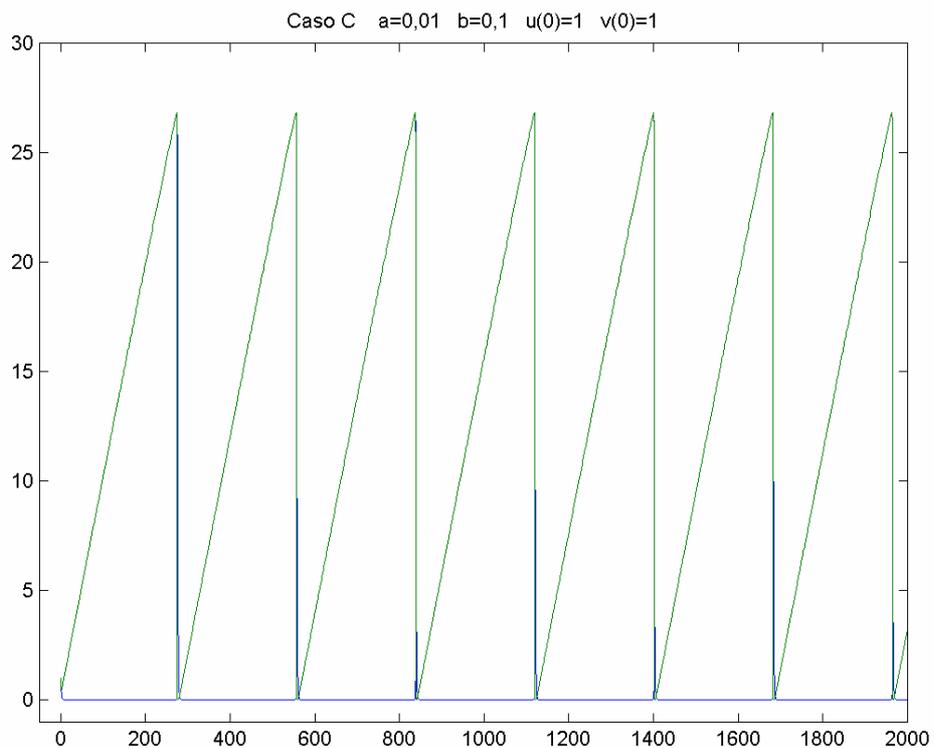
e la rappresentazione nello spazio delle fasi è:



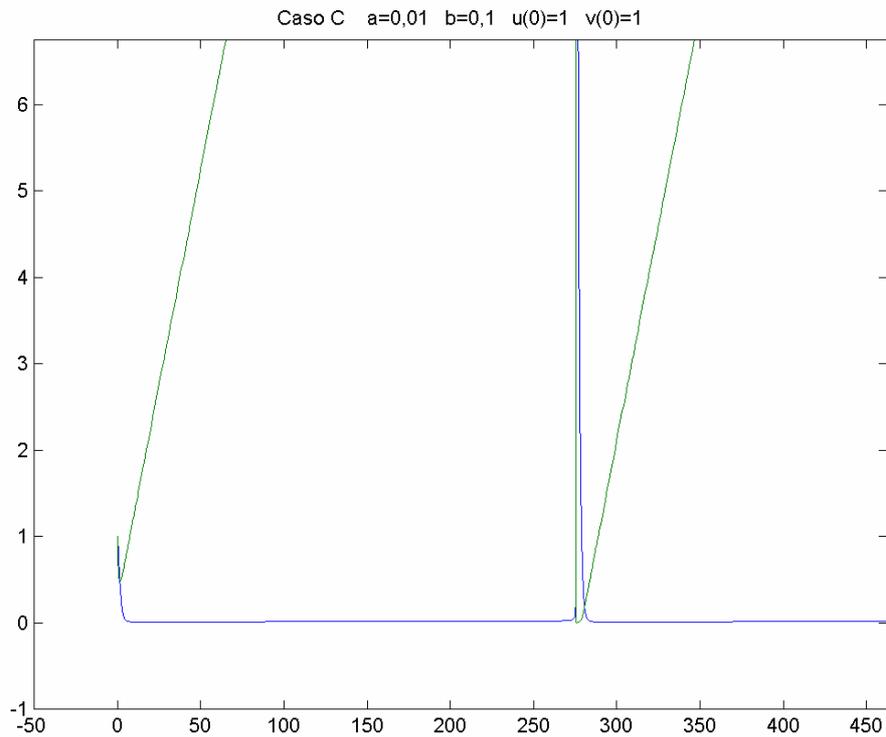
che come abbiamo già accennato è molto simile a quella vista nel caso precedente.

CASO C

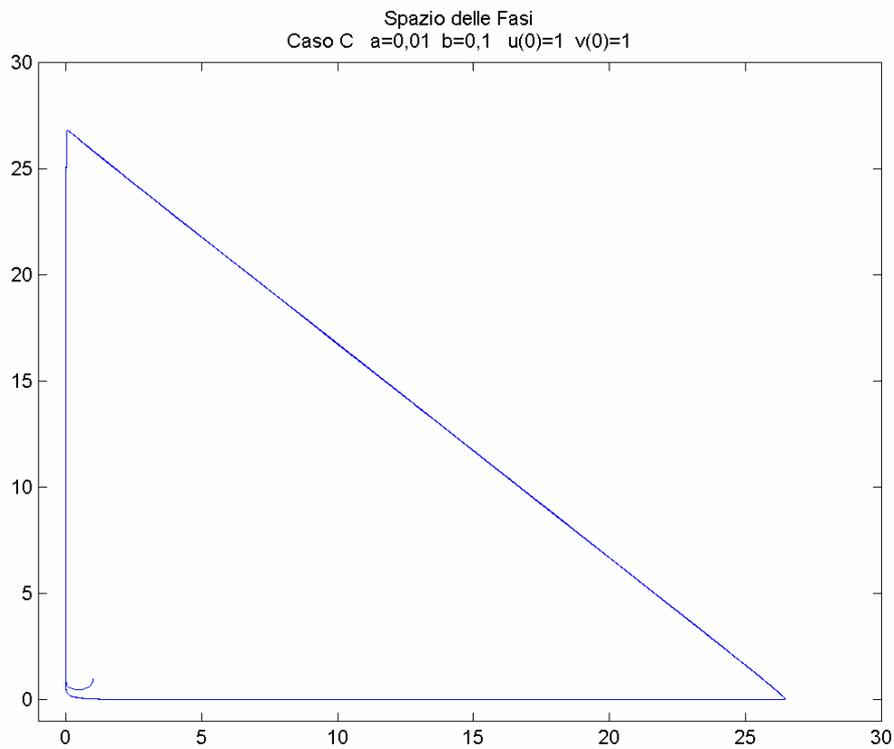
Adesso cambiamo anche il valore del parametro b . Poniamo infatti $a=0,01$ e $b=0,1$ considerando di nuovo le condizioni iniziali paria a 1.



in questo caso abbiamo di nuovo un fenomeno oscillatorio (anche un po' strano). Vediamo come si comportano le curve vicino a $t=0$:



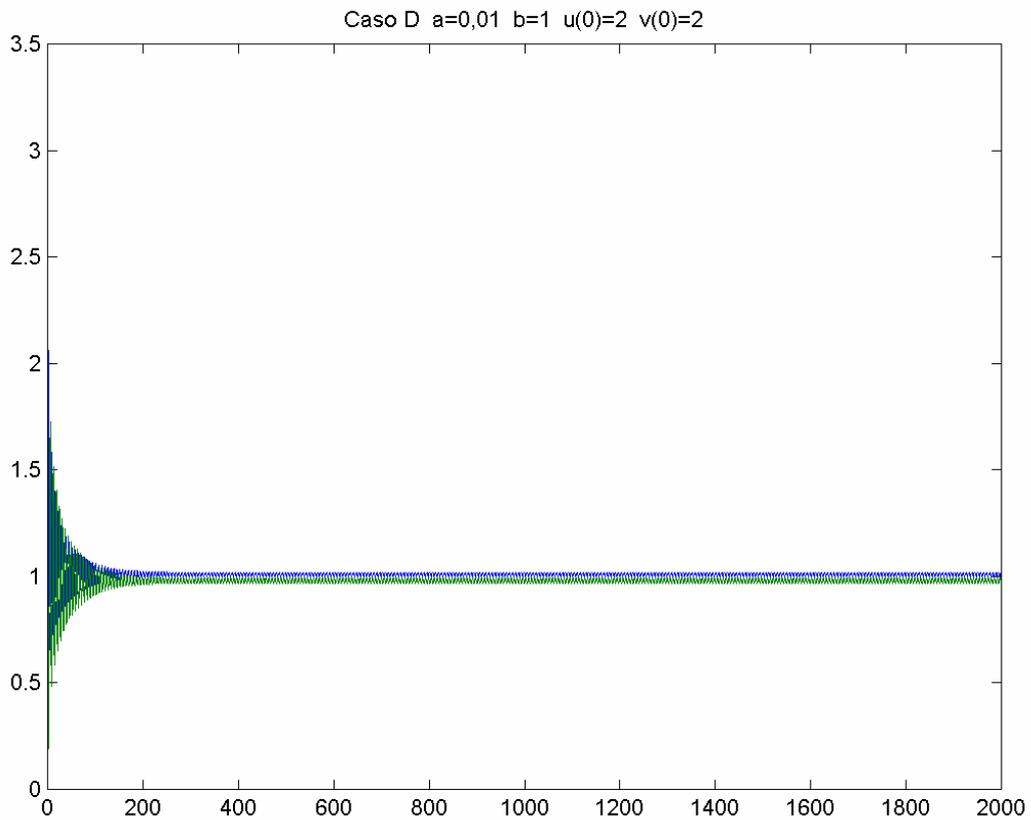
e naturalmente analizziamo anche lo spazio delle fasi:



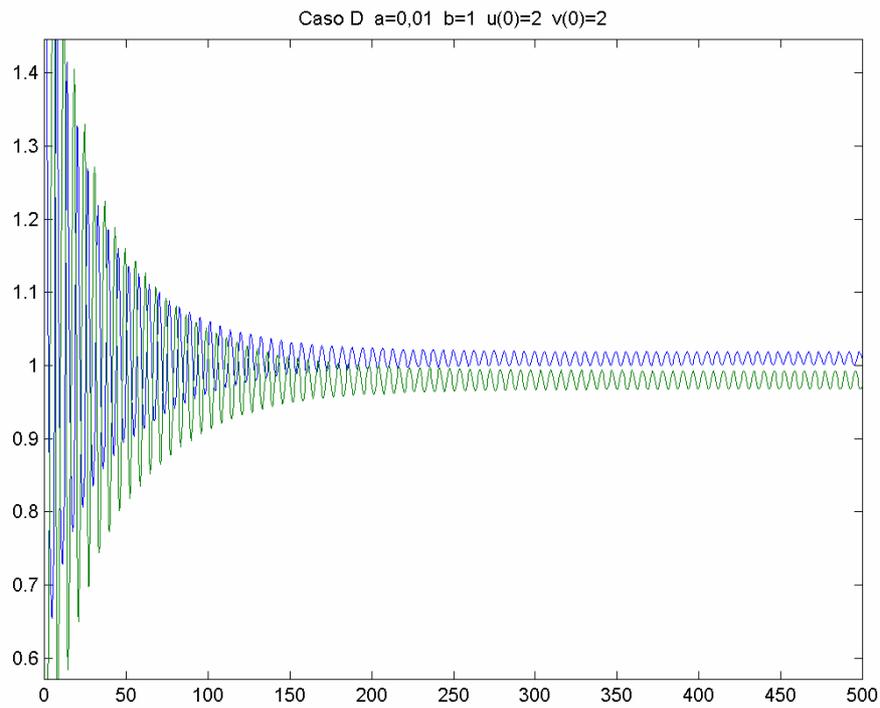
non si capisce molto dell'andamento a lungo termine del sistema poiché dovremmo integrare in un intervallo di tempo molto più grande di quello in cui abbiamo integrato. Cosa però difficile da fare con i mezzi a mia disposizione.

CASO D

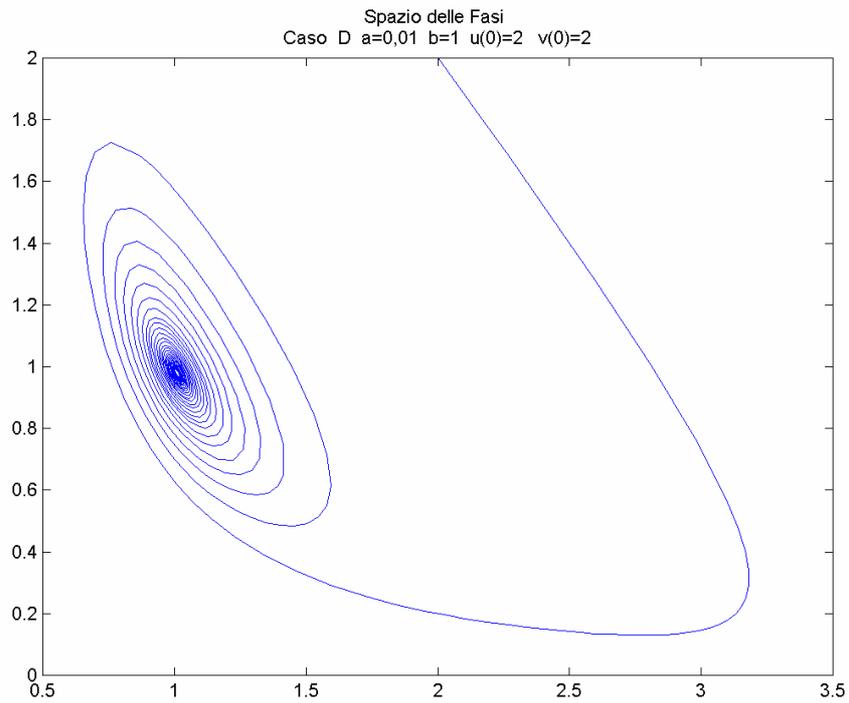
I valori dei parametri usati in questo caso sono: $a=0,01$ $b=1$. Le condizioni iniziali sono: $u(0)=2$ $v(0)=2$.



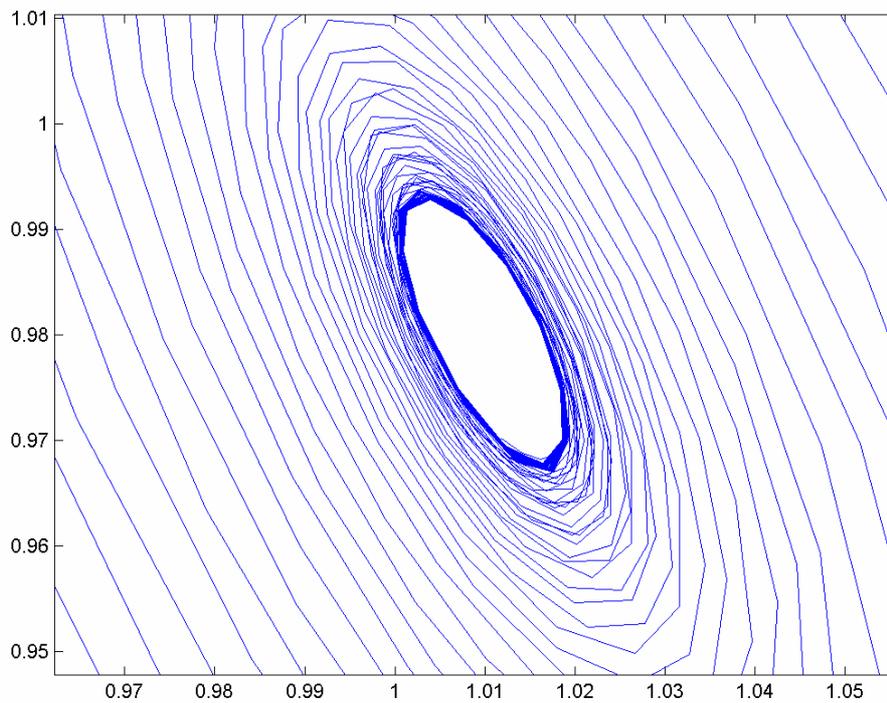
qui abbiamo un'oscillazione che dopo un determinato intervallo di tempo si stabilizza per tutte e due le curve. L'ingrandimento vicino a $t=0$ è:



Naturalmente rappresentiamo anche lo spazio delle fasi:

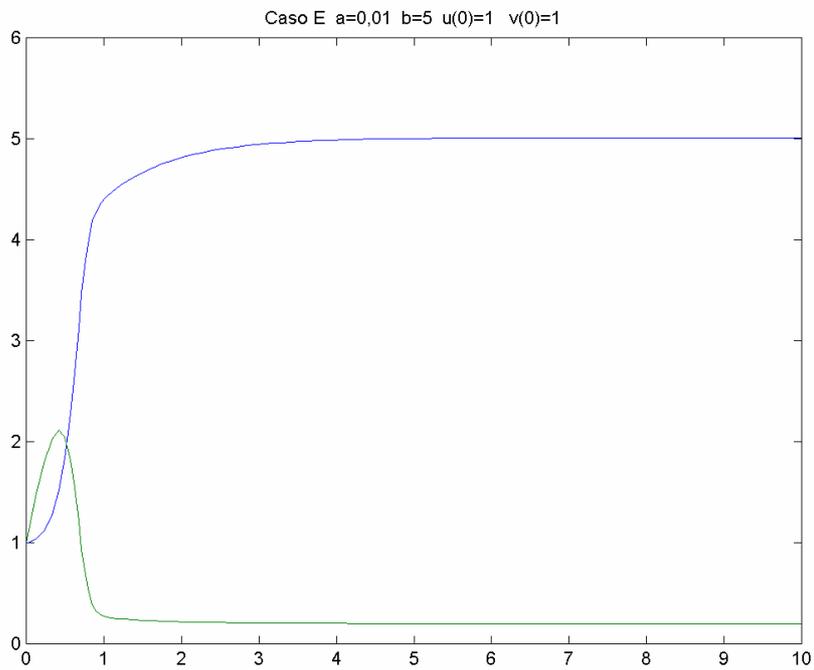


da questo grafico si nota come la curva cada in un bacino di attrazione!
Ingrandendo si vede come la curva, a lungo termine, non tende ad un punto ma ruota attorno al punto di equilibrio tracciando sempre la stessa ellisse.

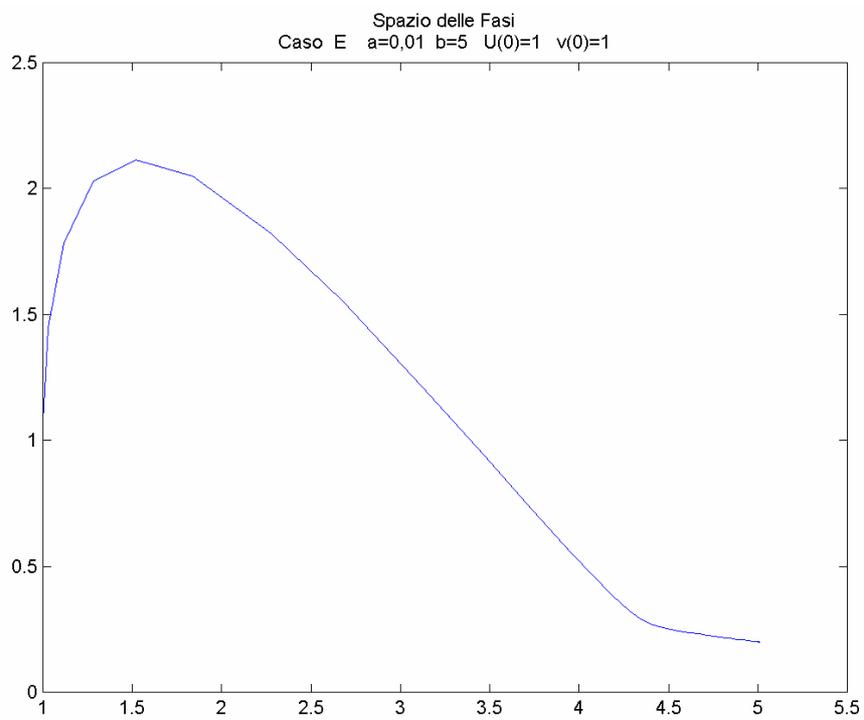


CASO E

Abbiamo $a=0,01$ $b=5$ $u(0)=1$ $v(0)=1$



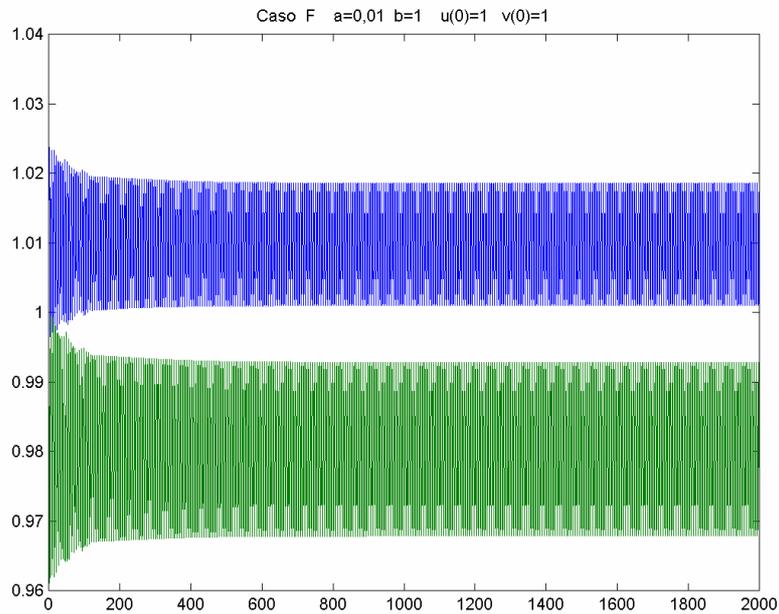
La rappresentazione nello spazio delle fasi è:



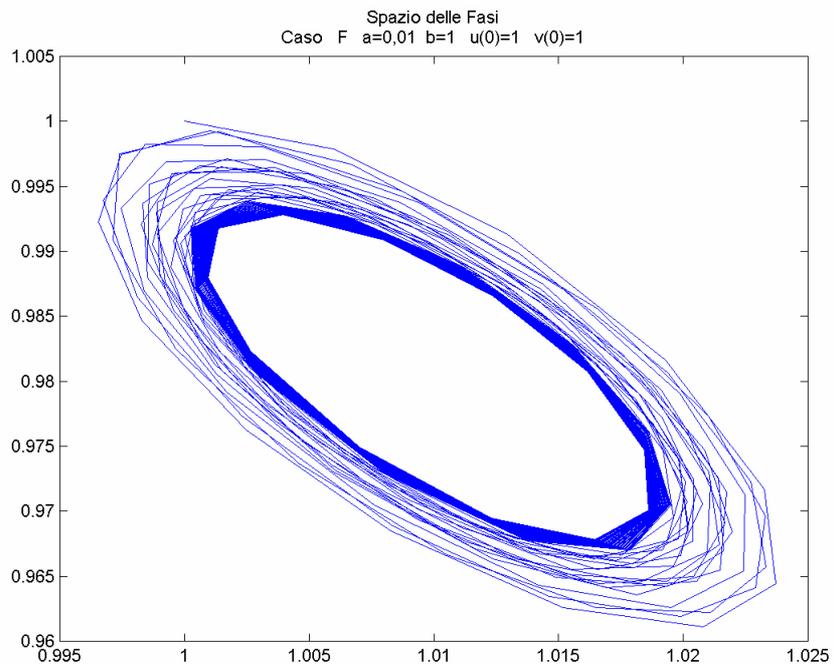
CASO F

In questo caso usiamo gli stessi parametri del caso D ma i dati iniziali sono diversi, ossia: $u(0)=1$ $v(0)=1$.

Abbiamo quindi:



In questo caso abbiamo due oscillazioni attorno ai punti di equilibrio e la rappresentazione nel piano delle fasi e la seguente.



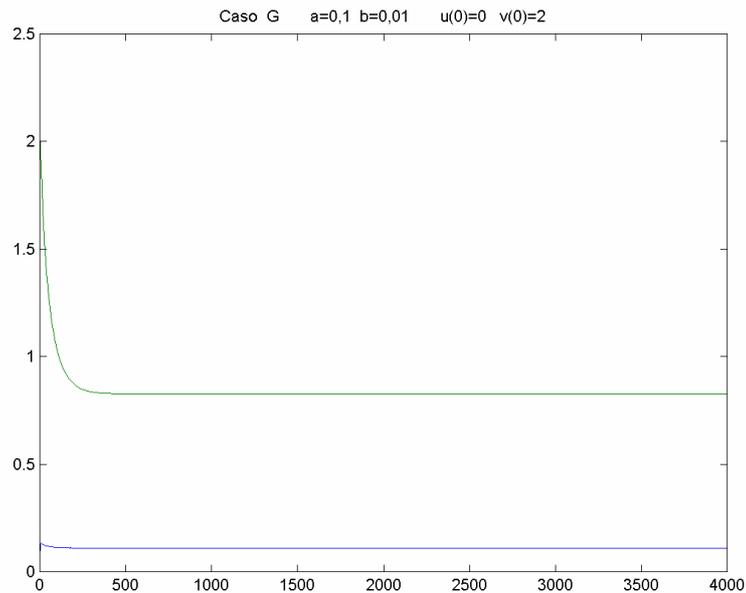
CASO G

Quest'ultimo caso è il più interessante tra quelli esaminati finora.

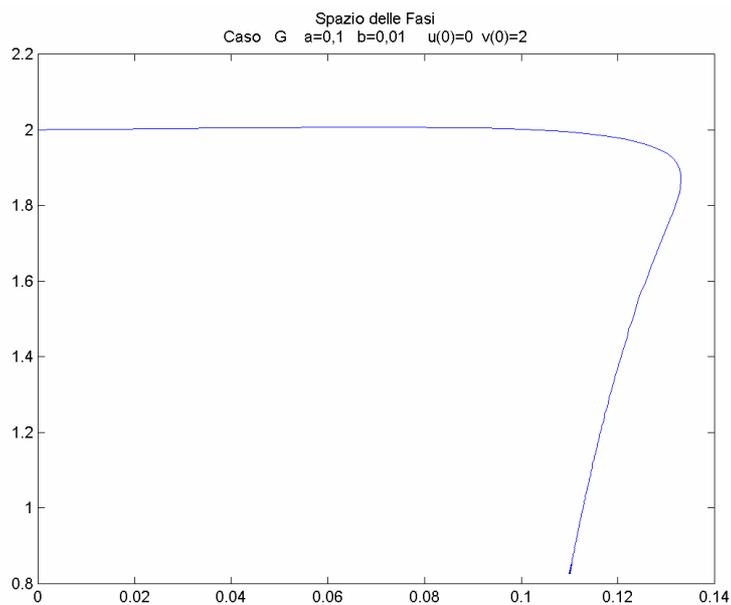
I parametri utilizzati sono : $a=0,1$ $b=0,01$

I dati iniziali: $u(0)=0$ $v(0)=2$.

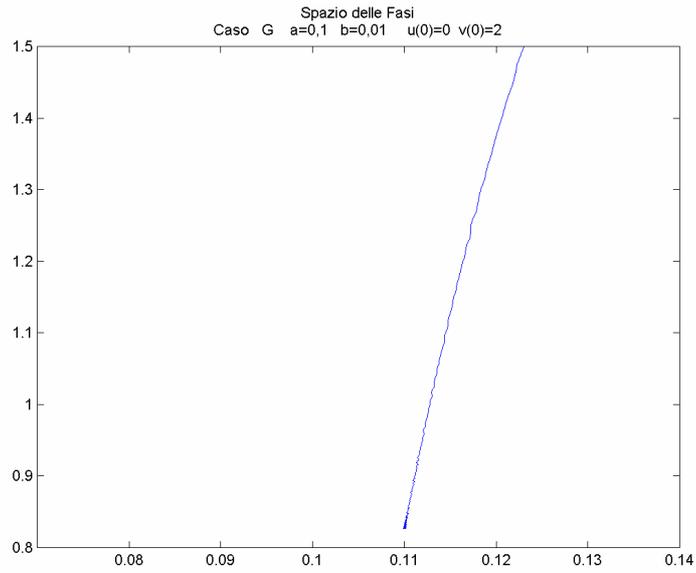
Questo è il grafico della $u(t)$ e $v(t)$:



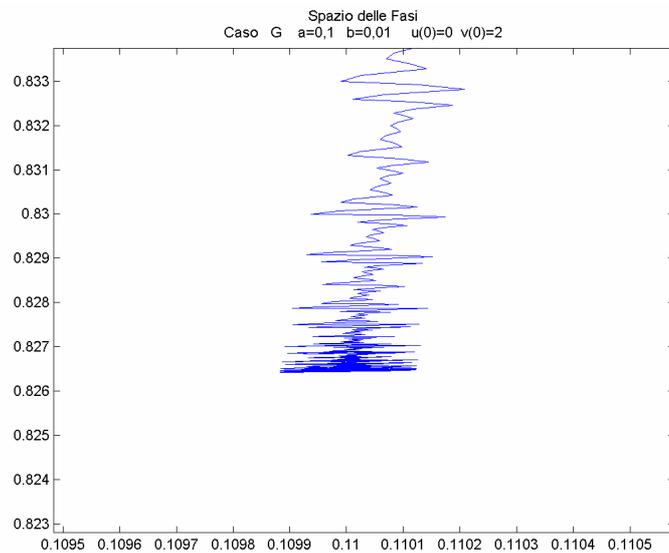
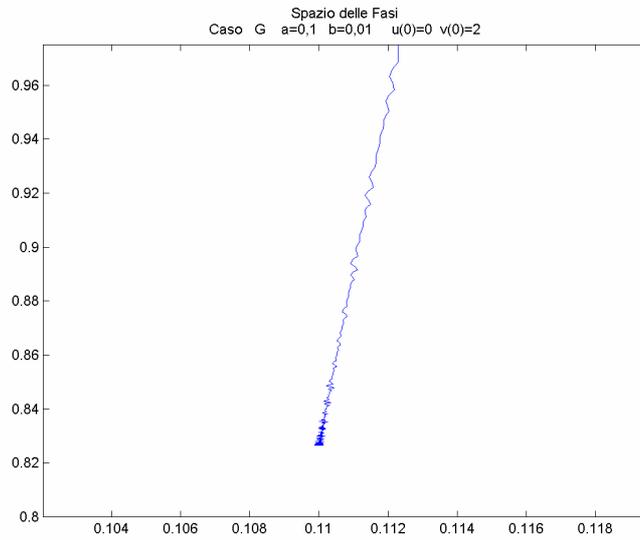
la rappresentazione nel piano delle fasi è la seguente:



Vedendola così questa curva non presenta niente di strano. Ma se ingrandiamo la parte finale della curva notiamo delle oscillazioni.



che vengono evidenziate maggiormente nei due ingrandimenti successivi.

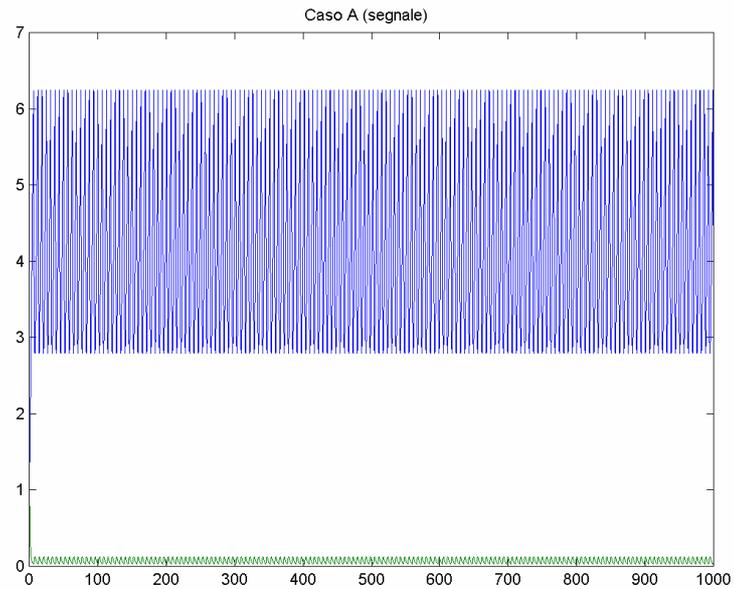


PARTE QUINTA

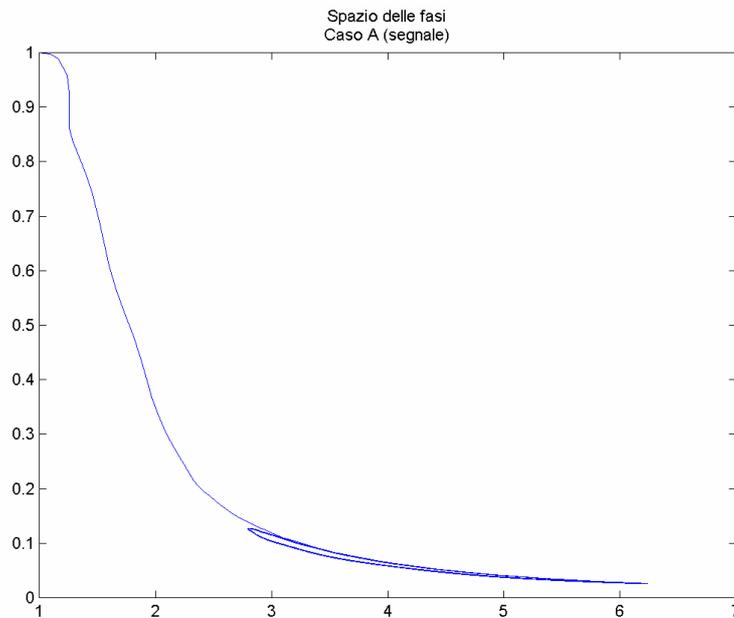
In questa ultima sezione vediamo il comportamento del sistema nel caso A ($a=0,0001$ $b=1$ $u(0)=1$ $v(0)=1$) inserendo il nostro segnale prima nella 1° equazione, poi nella seconda e infine in tutte e due.

Vediamo i grafici risultanti:

(segnale inserito nella 1° equazione del sistema)

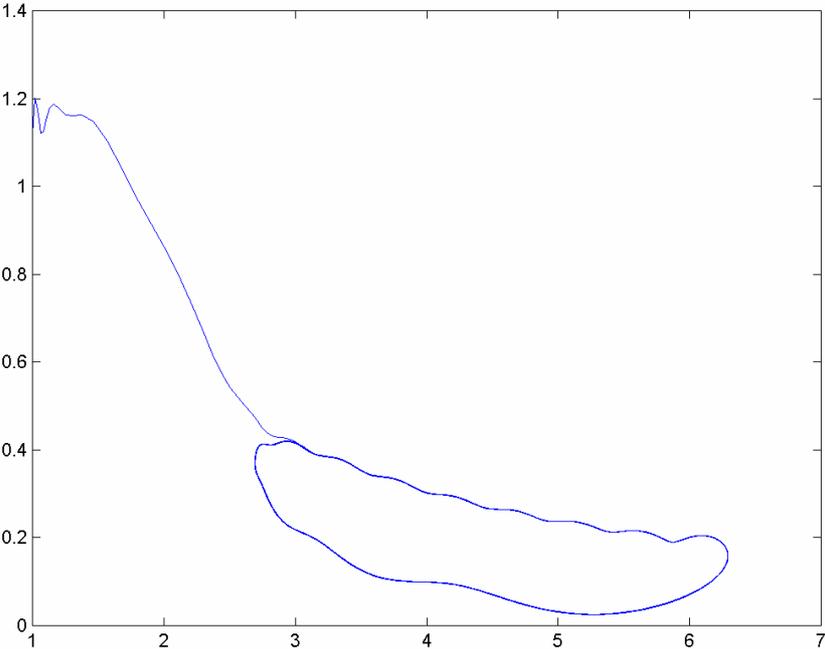
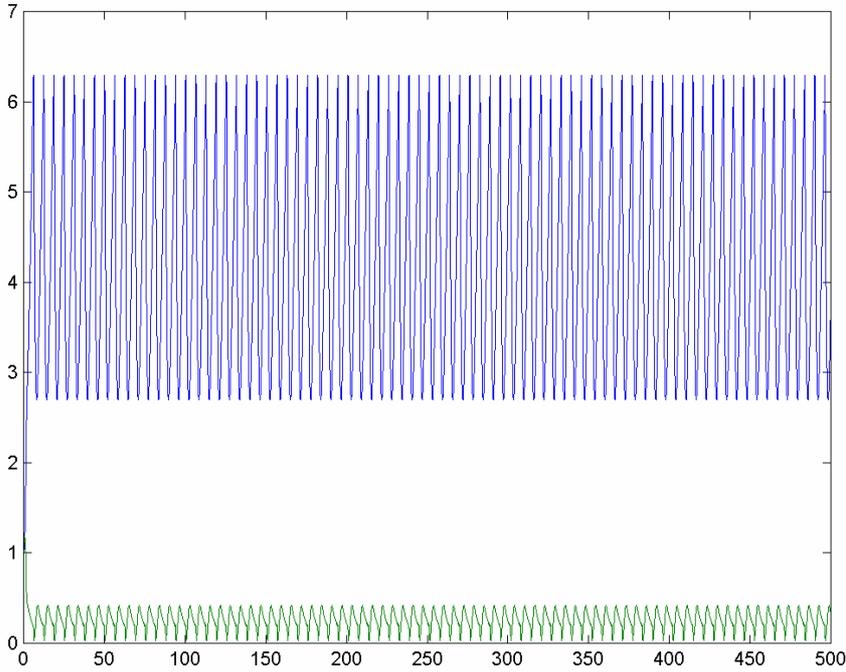


Spazio della fasi :

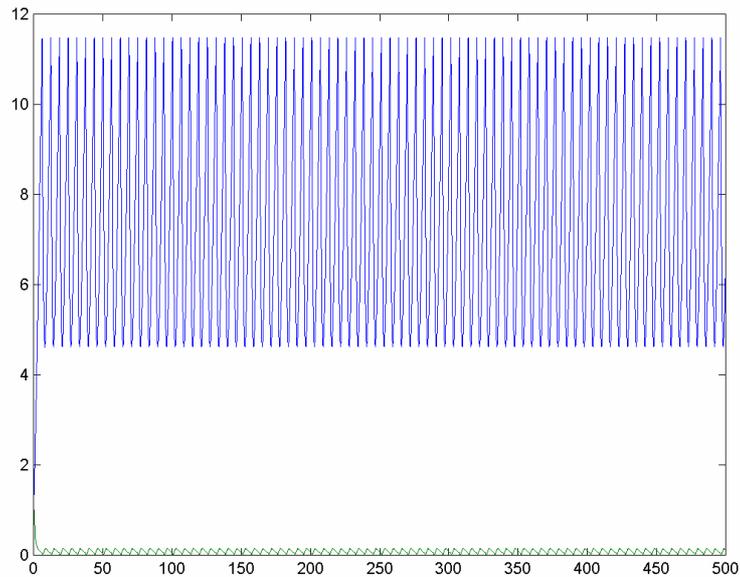


vediamo adesso il caso in cui inseriamo il segnale nella seconda equazione.

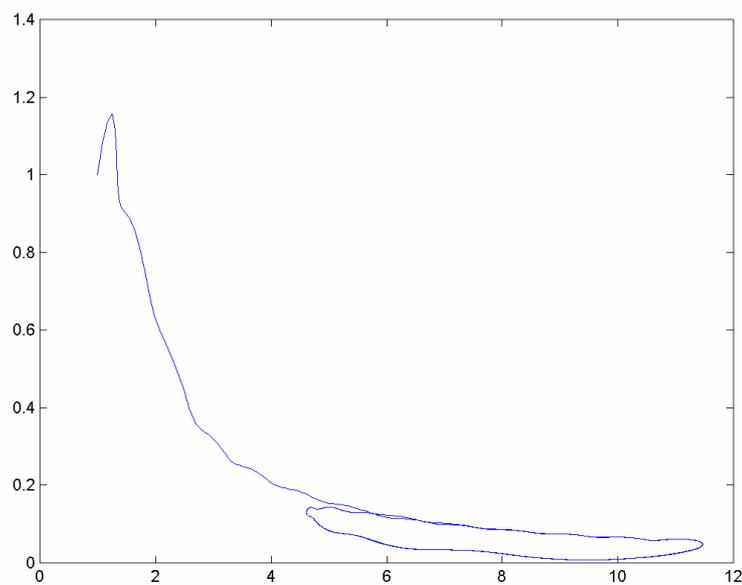
Disegniamo sia il grafico di $u(t)$ e $v(t)$, sia la loro rappresentazione nel piano delle fasi.



e infine vediamo il caso in cui il segnale viene inserito in entrambe le equazioni:



Spazio delle fasi:



E' da notare come in questo caso di sistema non autonomo la curva nello spazio delle fasi si intersechi con se stessa , cosa che non può accadere in caso di sistema isolato.

I diagrammi fin qui tracciati sono ottenuti con la funzione '*inibitori(a,b,u(0),v(0))*' per quanto riguarda il sistema isolato e '*inibitorisegn(a,b,u(0),v(0))*' per quanto riguarda il sistema in cui viene inserito il segnale in entrambe le equazioni.

NOTA: Per quanto riguarda il segnale, non viene inserito il segnale vero e proprio ma le prime 12 armoniche dello sviluppo in serie di Fourier del segnale stesso.