Sistema **32.b** ***Muraca Giuseppe*** Matr. ***47553***

2° TESINA

MECCANISMI ATTIVATORI-INIBITORI

INDICE

PARTE PRIMA

Qualunque segnale periodico può essere scomposto nella somma di un eventuale termine costante e di segnali sinusoidali, dei quali il primo, avente lo stesso periodo e quindi la stessa frequenza del segnale considerato, si chiama prima armonica o fondamentale, e gli altri, aventi periodi sottomultipli e quindi frequenze multiple, si chiamano armoniche superiori. In questo modo sembra possibile scomporre praticamente ogni moto o vibrazione periodica anche complessa in moti o vibrazioni più semplici basati su seni e coseni.

L'armonica fondamentale ha frequenza minima rispetto alle armoniche di ordine superiore ed è quella che dà il maggiore contributo nella costruzione dell'onda risultante della serie.

Affinché la serie trigonometrica di Fourier converga effettivamente a *f(t)* si deve rispettare

il Criterio (o Condizioni) di Dirichlet *che impone:*

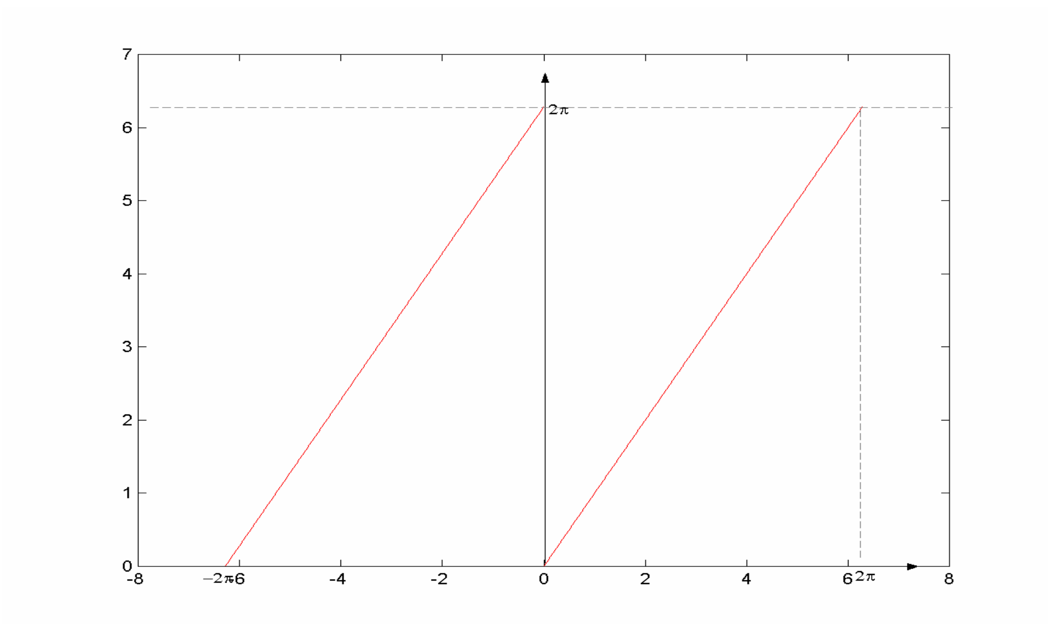
1. *f(t) deve essere definita nell'intervallo* t_0-t_0+T*; sono ammessi anche eventuali punti di discontinuità purchè in numero finito.*
2. *f(t) e la sua derivata prima f'(t) devono essere continue a tratti nell'intervallo* t_0-t_0+T.

Se *f(t)* soddisfa le ipotesi del Teorema di Dirichlet parleremo di **sviluppo di f(t) in serie di Fourier** anche se la serie di Fourier di f(t) può non coincidere nei punti di discontinuità con *f(t).*

Il segnale (periodico) da studiare è il seguente:

$$\boxed{f(t) = t + 2p \qquad \text{se} \quad -2p \le t \le 0}$$

che ha il seguente grafico



Lo sviluppo in serie di Fourier del segnale è dato dalla sommatoria:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{npt}{P}\right) + b_n \sin\left(\frac{npt}{P}\right)\right]$$

dove $a_0 = \frac{1}{P}\int_0^{2P} f(t)dt$,

(questa costante ha valore nullo se il segnale e' *alternato* perché tale costante rappresenta il **valore medio** della funzione periodica.)

$$a_n = \frac{1}{P}\int_0^{2P} f(t)\cos\left(\frac{np}{P}t\right)dt$$

$$b_n = \frac{1}{P}\int_0^{2P} f(t)\sin\left(\frac{np}{P}t\right)dt$$

e dove 2P è il periodo.

Nel nostro caso

$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-2p}^{0}(t+2p)dt = \frac{1}{p}$ che moltiplica l'area sottostante la curva quindi $a_0 = \frac{1}{p}\left(\frac{2p \cdot 2p}{2}\right) = 2p$

Integrando per parti otteniamo che:

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-2p}^{0}(t+2p)\cos(nt)dt = \frac{1}{p}\left\{\left[(t+2p)\left(\frac{1}{n}\sin(nt)\right)\right]_{-2p}^{0} - \int_{-2p}^{0}\frac{1}{n}\sin(nt)\right\} =$$

$$= \frac{1}{p}\left\{\left[(t+2p)\left(\frac{1}{n}\sin(nt)\right) + \frac{1}{n^2}\cos(nt)\right]_{-2p}^{0}\right\} = \frac{1}{p}\left\{\frac{1}{n^2}\cos(-n2p) - \frac{2p}{n}\sin(-n2p) - \frac{1}{n^2}\right\} = 0$$

e

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-2p}^{0}(t+2p)\sin(nt)dt = \frac{1}{p}\left\{\left[(t+2p)\left(\frac{1}{n}\cos(nt)\right)\right]_{-2p}^{0} - \int_{-2p}^{0}\frac{1}{n}\cos(nt)\right\} =$$

$$= \frac{1}{p}\left\{\left[(t+2p)\left(\frac{1}{n}\cos(nt)\right) + \frac{1}{n^2}sen(nt)\right]_{-2p}^{0}\right\} = \frac{1}{p}\left\{\frac{1}{n^2}\sin(-n2p) - \frac{2p}{n}\cos(-n2p) - \frac{1}{n^2}\sin(-n2p)\right\} =$$

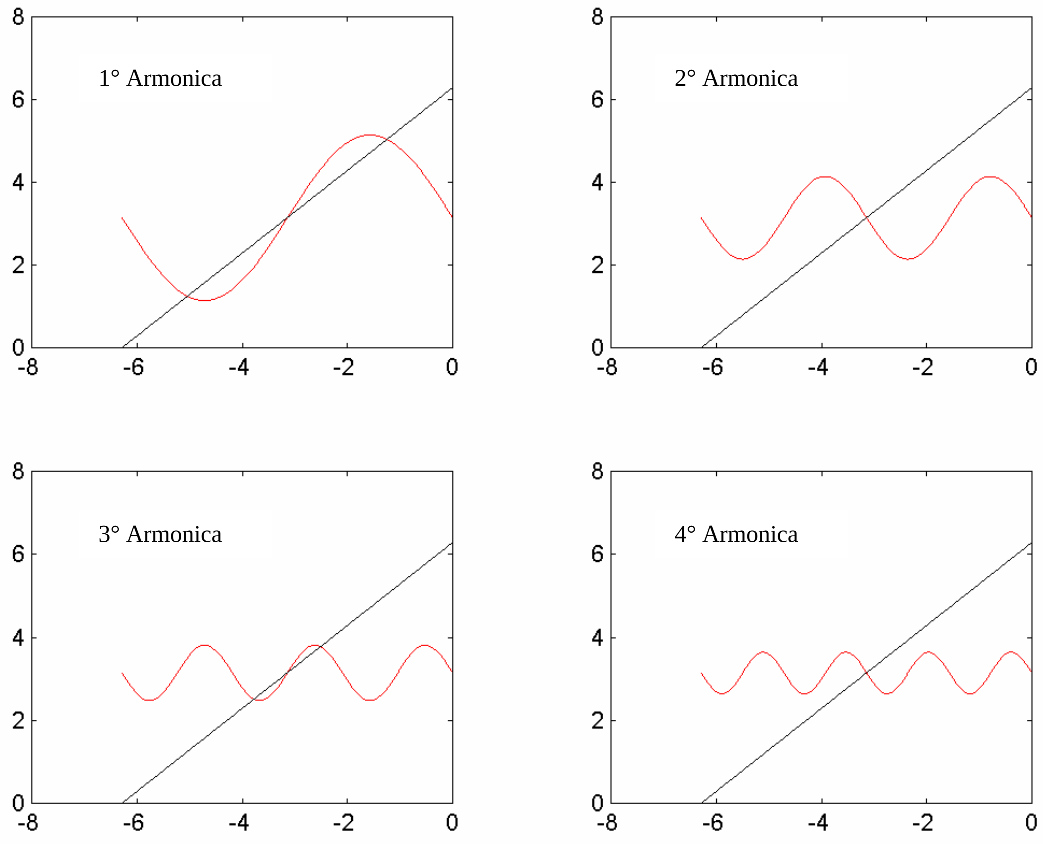
$$= \frac{1}{p}\left(-\frac{2p}{n}\right) = -\frac{2}{n}$$

Quindi lo sviluppo in serie di Fourier del nostro segnale è:

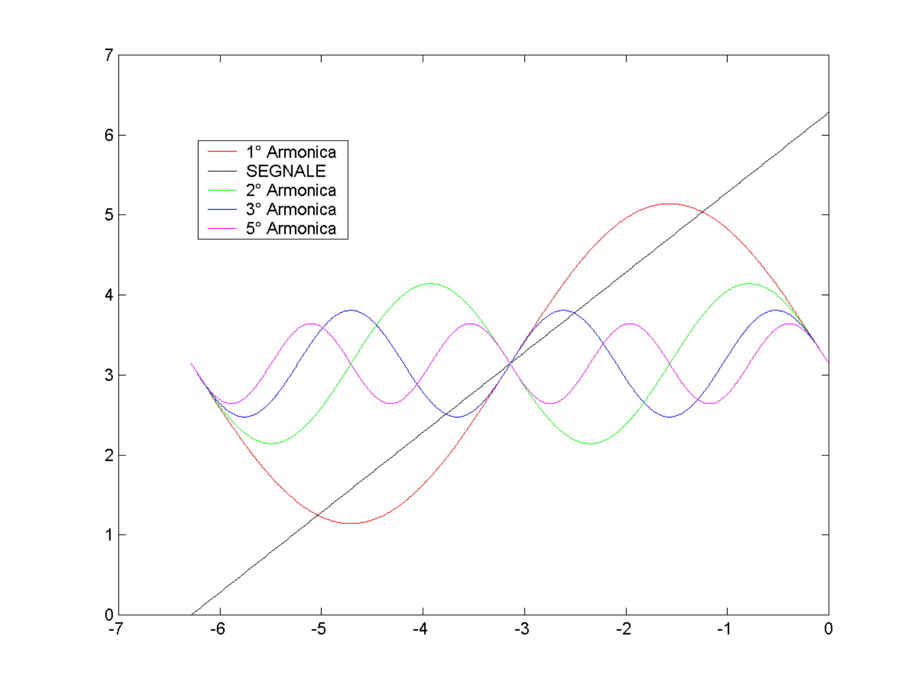
$$\boxed{f(t) = p - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \sin(nt)}$$

PARTE SECONDA

Adesso vediamo graficamente cosa rappresenta questa serie di Fourier .
Qui sotto sono riportati i grafici delle prime 4 armoniche cioè della serie con n=1,2,3,4

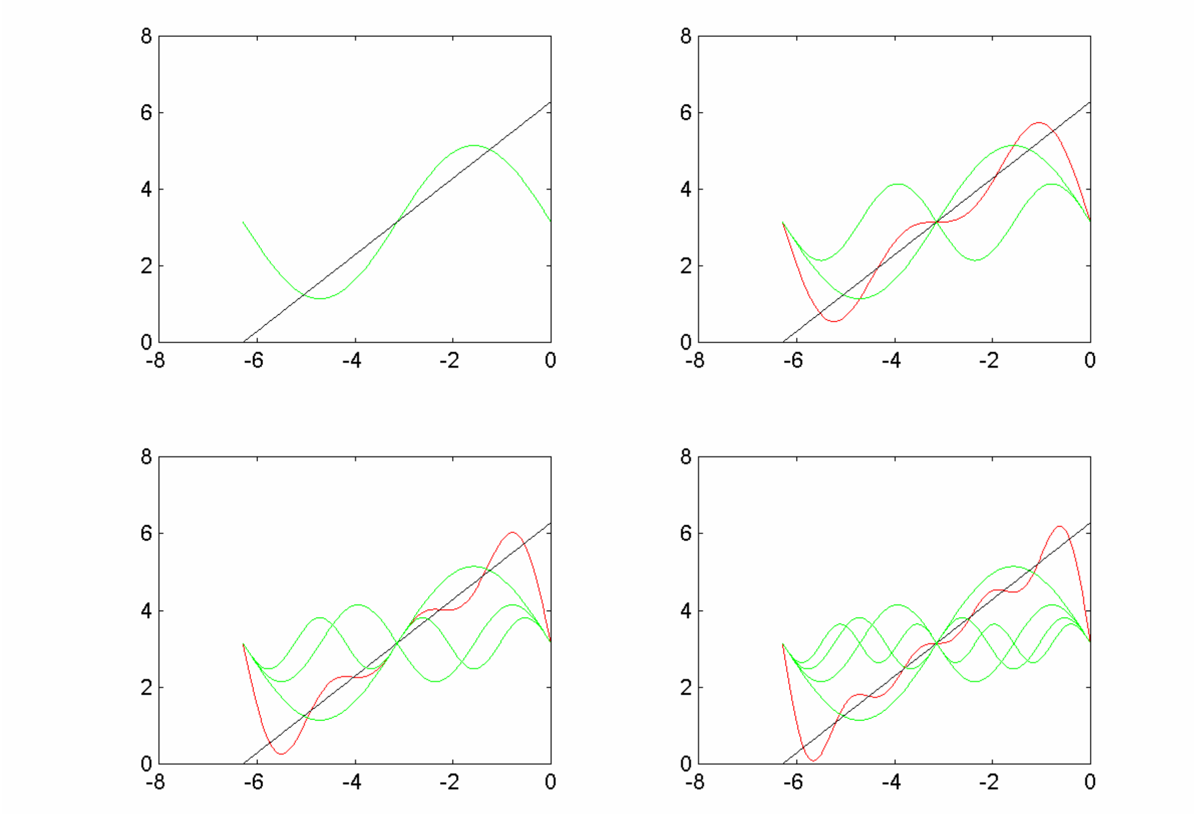


che possiamo vedere sovrapposte anche in quest'altro grafico:

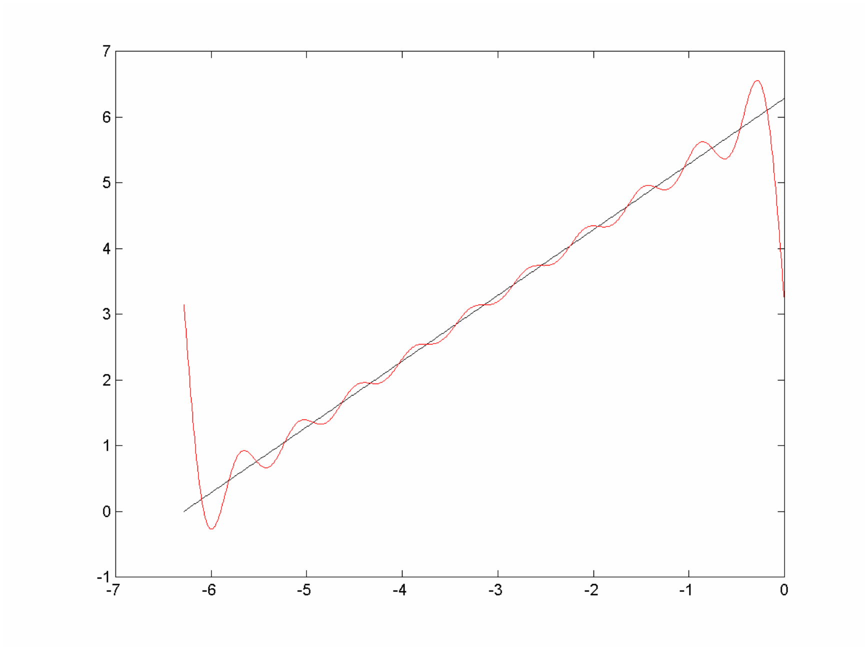


se sovrapponiamo le armoniche e tracciamo il grafico della loro somma ci rendiamo conto visivamente come la loro sovrapposizione ,al crescere de numero di armoniche e quindi di *n*, approssimi la nostra funzione di partenza.

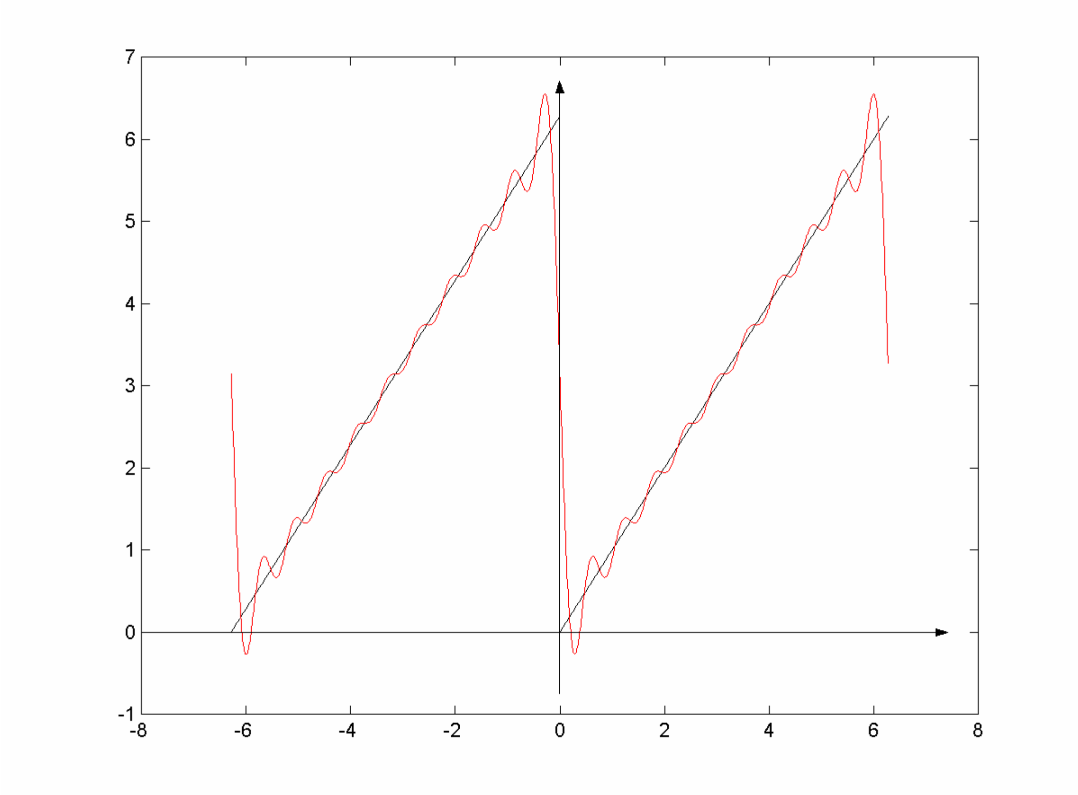
Nel grafico sottostante sono tracciate in verde le armoniche ed in rosso la loro sovrapposizione.



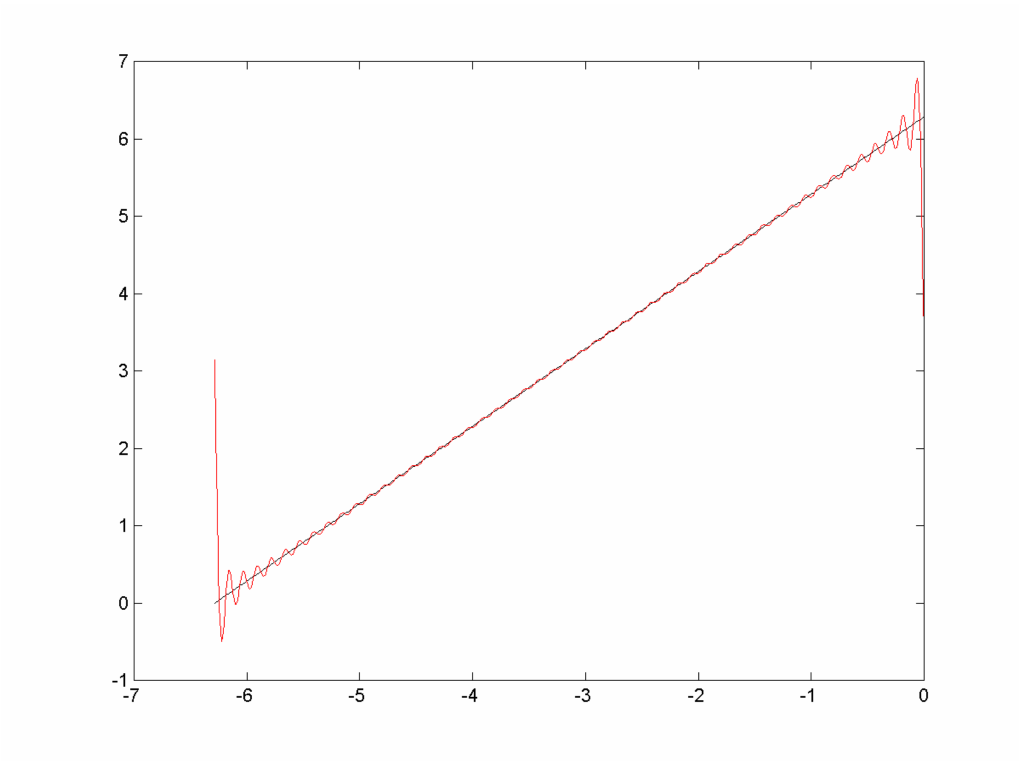
Il grafico per 10 armoniche è invece il seguente:



che è possibile osservare anche nell'intervallo *-2p<t<2p* :



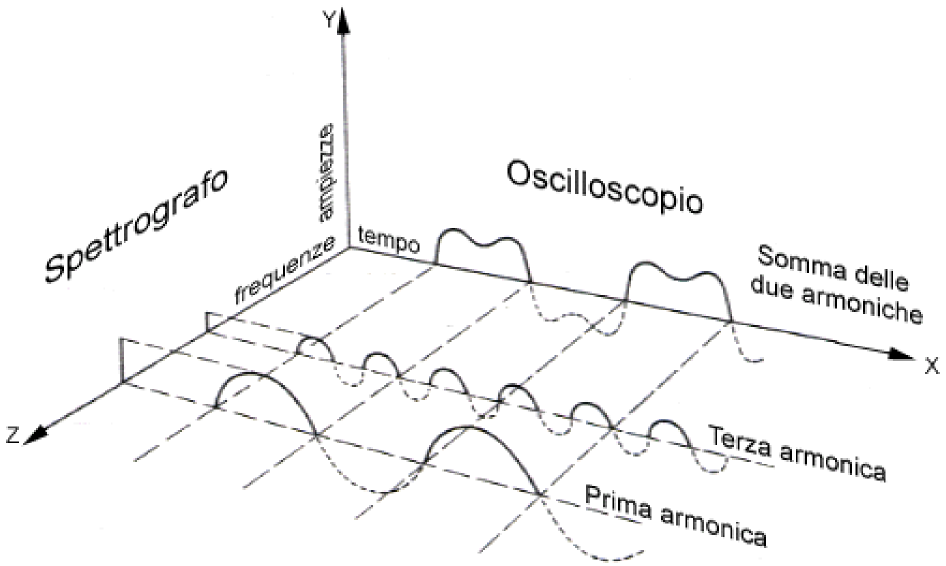
Ed infine vediamo l'approssimazione con 50 armoniche che si può già considerare una buona approssimazione:



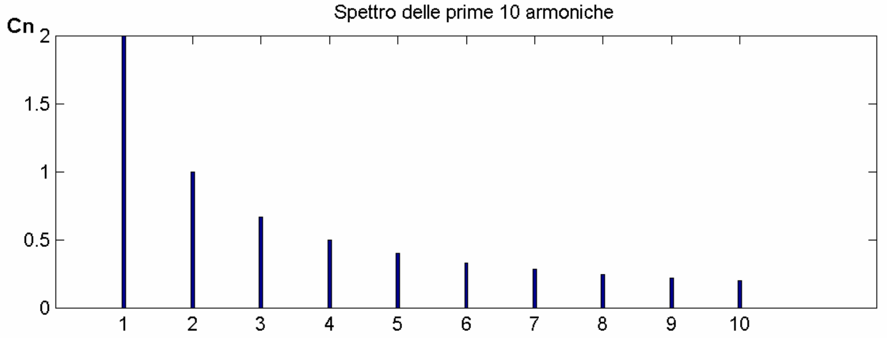
Lo Spettro lineare

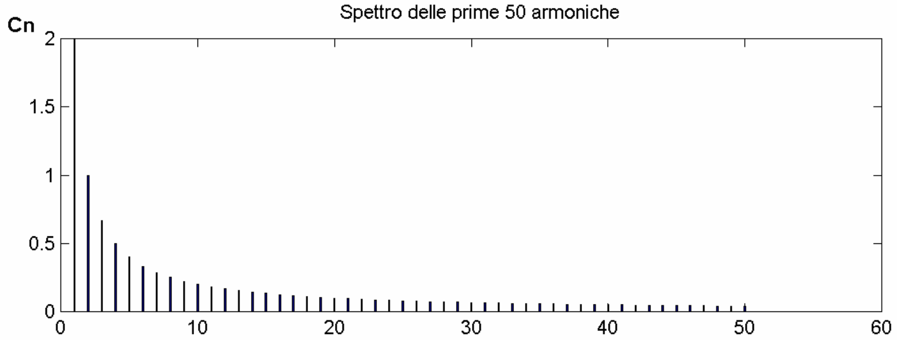
Una rappresentazione grafica che mette in evidenza l'ampiezza delle armoniche è lo *spettro lineare*, attraverso il quale ci si rende conto della rapidità di convergenza della serie alla funzione di partenza. La lunghezza dei segmenti che compongono questo tipo di spettro, quindi, decresce rapidamente nelle funzioni il cui sviluppo in serie ha rapida convergenza. Lo spettro per funzioni che presentano discontinuità (come quella appena esaminata) presenta invece ampiezze a diminuzione lenta, poiché i rispettivi sviluppi in serie presentano armoniche di elevato ordine e notevole ampiezza. Spesso in questi casi le armoniche di ordina dieci presentano un valore ancora importante rispetto alla fondamentale.

Un esempio tridimensionale di uno spettro è il seguente:



Lo spettro nel nostro caso e dato dal seguente grafico:





dove i valori di Cn sono dati da:

$$c_0 = \left|\frac{a_0}{2}\right|$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

La funzione implementata in Matlab che traccia lo spettro è nel file ‘spettro.m’ e richiede in ingresso il numero di armoniche, mentre la funzione per tracciare questi grafici delle armoniche è allegata nel file “segnale.m”:

```
% n in ingresso rappresenta il numero di armoniche

function segnale (n)

T=2*pi;
dt=0.01;
t=-T:dt:0;
funz=t+2*pi;

ff=T/2;
for k=1:n
   coeff=-2/k;
   ff=ff+coeff*sin(k*t);
end

figure(1);
plot (t,funz,'k',t,ff,'r');
```

PARTE TERZA

Possiamo a questo punto trovare i coefficienti di Eulero numericamente. Ciò è possibile integrando numericamente un ad uno i coefficienti a_n, b_n e a_0 con il comando disponibile in Matlab 'Quad8('F', a,b)' che, prendendo in ingresso la funzione e gli estremi di integrazione a,b , restituisce il valore numerico ottenuto.
Siccome i coefficienti vanno integrati uno alla volta, possiamo innescare *n* volte un ciclo in cui alla k-esima iterazione vengono integrati numericamente i coefficienti a_k e b_k, vengono moltiplicati rispettivamente per *cos(kt)* e *sin(kt)* e vengono sommati alla funzione di partenza $\frac{1}{2}a_0$.

L'algoritmo implementato in Matlab che ne scaturisce è:

```
%file 'segnalenum.m'
% n è il numero di armoniche
function segnalenum (n)

T=2*pi;
dt=0.01;
t=-T:dt:0;
funz=t+2*pi;
a0=(1/pi)*(quad8('a0',-T,0));

ff=a0/2
global k
for k=1:n
   an=(1/pi)*(quad8('an',-T,0));
   bn=(1/pi)*(quad8('bn',-T,0));
   ff=ff+an*cos(k*t)+bn*sin(k*t);
end
figure(2);
plot (t,funz,'r',t,ff,'b');
```

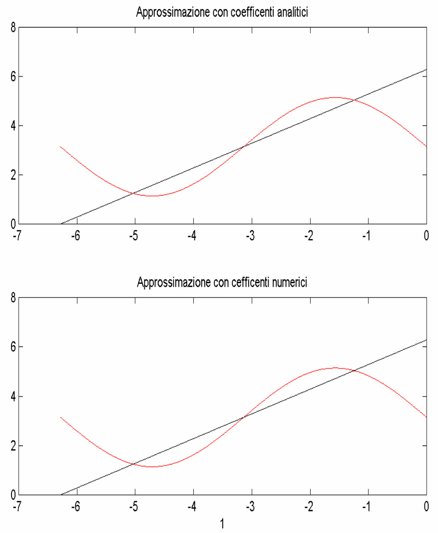
le funzioni an,bn,ao si trovano nei file omonimi:

```
function y=a0(t)
y=t+2*pi;


function y=an(t)
global k
y=(t+2*pi).*cos(k.*t);


function y=bn(t)
global k
y=(t+2*pi).*sin(k.*t);
```

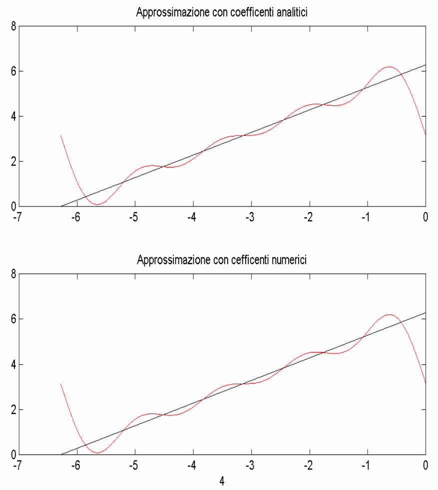
PARTE QUARTA

Ora andiamo a confrontare i grafici ottenuti con i coefficienti analitici con i grafici ottenuti con i coefficienti numerici.

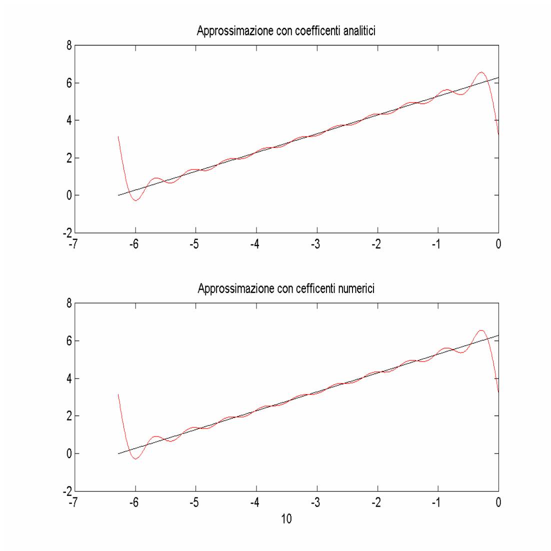
Per quanto riguarda la 1° armonica essa è identica nei due casi:

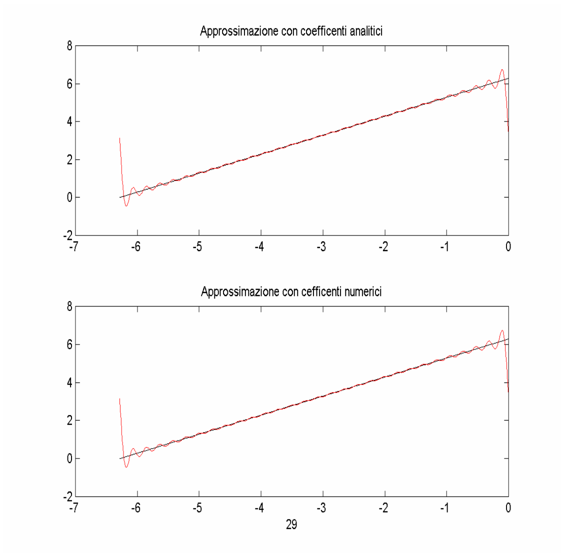


per le prime 4 armoniche succede la stessa cosa:

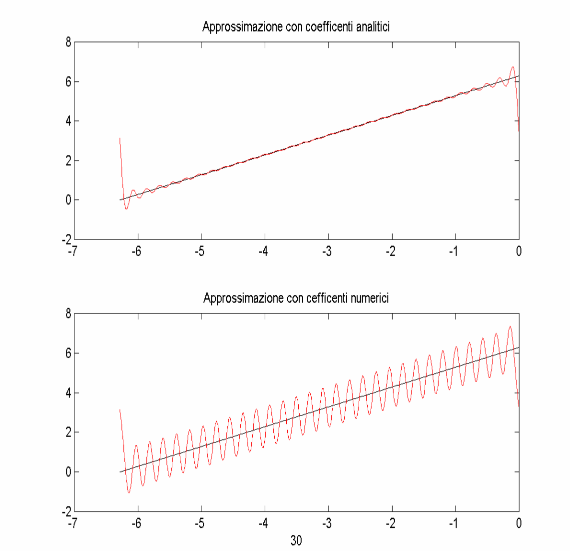


vediamo anche rispettivamente le prime 10 e le prime 29 armoniche:

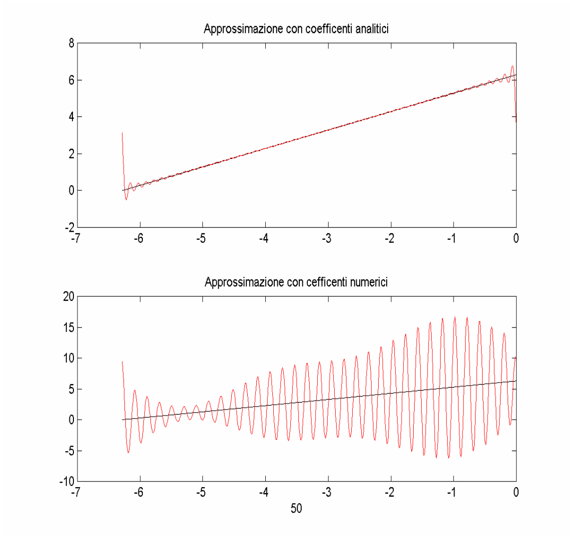




Le cose invece cambiano se confrontiamo le prime 30 armoniche:



è la differenza si accentua ancora di più se confrontiamo le prime 50 armoniche:



(la funzione che stampa i grafici confrontandoli è “segnale2.m”)

Per valori di *n* molto bassi i grafici sono praticamente identici. Se invece assegniamo a n valori maggiori di 29 si vede subito che la curva risultante non approssima più il segnale di partenza ma oscilla in modo strano attorno al segnale.

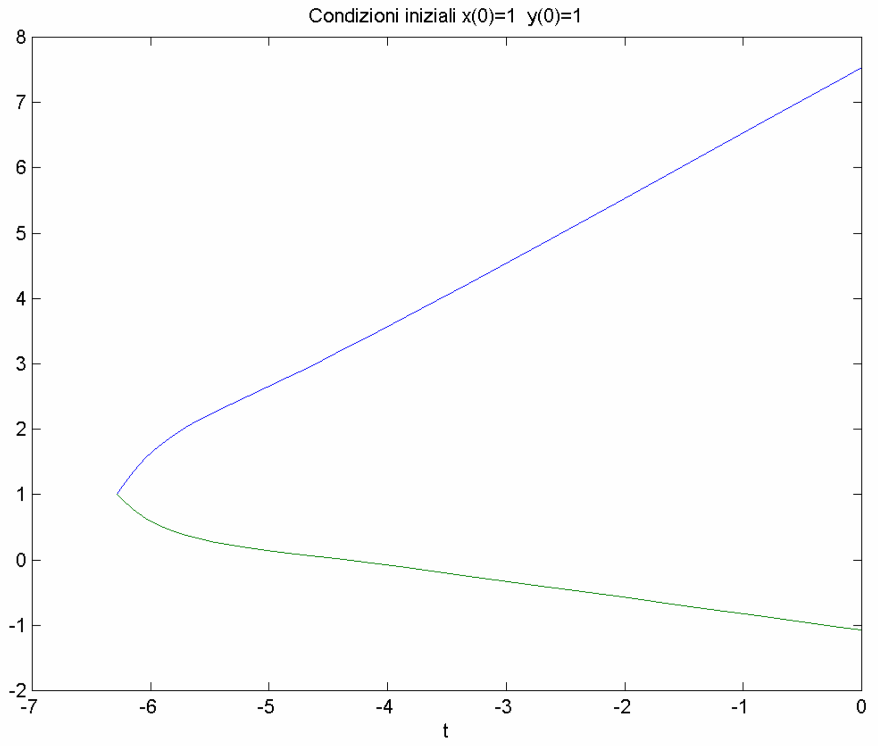
Se si confrontano i valori dei coefficienti ottenuti analiticamente con quelli ottenuti numericamente attraverso la funzione Quad8(..) ci si accorge che i valori di b_{30},b_{31},b_{33},b_{34} ottenuti numericamente non coincidono con quelli analitici:

b_k	Risultato analitico	Risultato numerico
b_{29}	-0,0689…	-0.0689…
b_{30}	-0,0666…	1
b_{31}	-0,0645…	2
b_{32}	-0,0625…	-0,0625…
b_{33}	-0,0606…	-2
b_{34}	-0,0588…	-1
b_{35}	-0,0571…	-0,0571…
b_{36}	-0,0555…	-0,0555…

Questo porta alla sostanziale differenza ottenuta tra i due grafici osservati sopra.

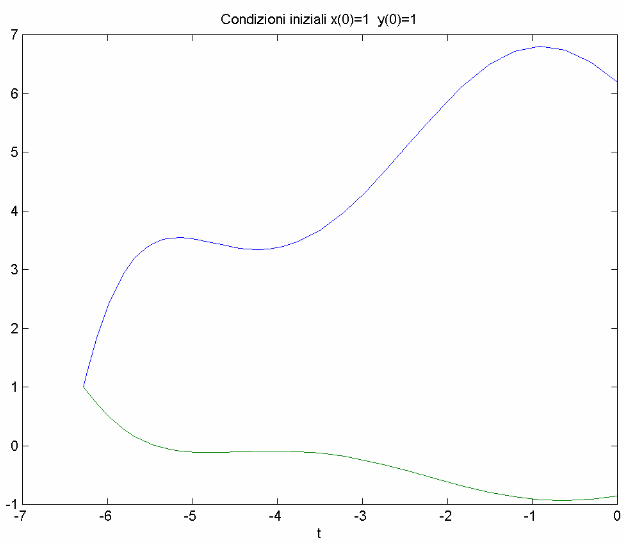
PARTE QUINTA

A questo punto iniziamo ad inserire nel sistema linearizzato (caso a=1 b=1) il segnale. Inseriamo il segnale per il momento solo nella prima equazione e consideriamo l'intervallo di tempo $-2p<t<0$ il grafico della soluzione del sistema differenziale è il seguente:

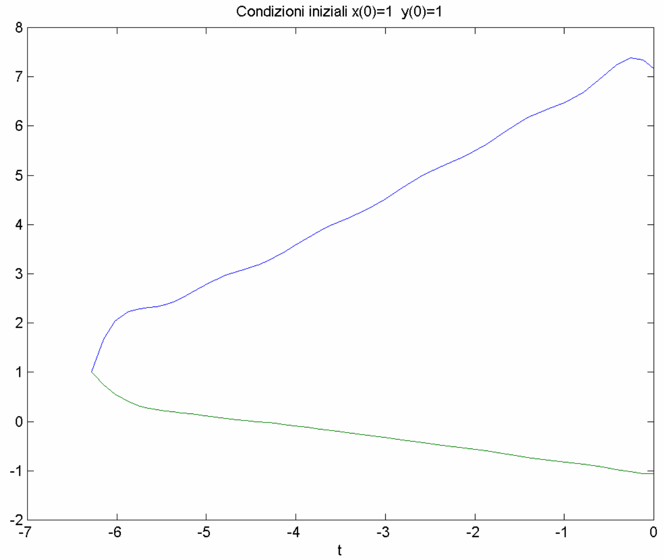


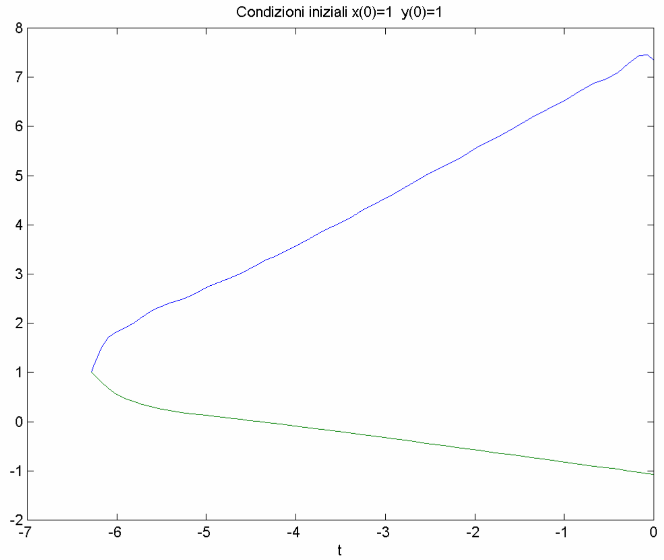
se a questo punto inseriamo invece del segnale f(t) la sua approssimazione in serie di Fourier notiamo che al crescere del numero di armoniche i grafici delle due soluzioni si assomigliano sempre più.

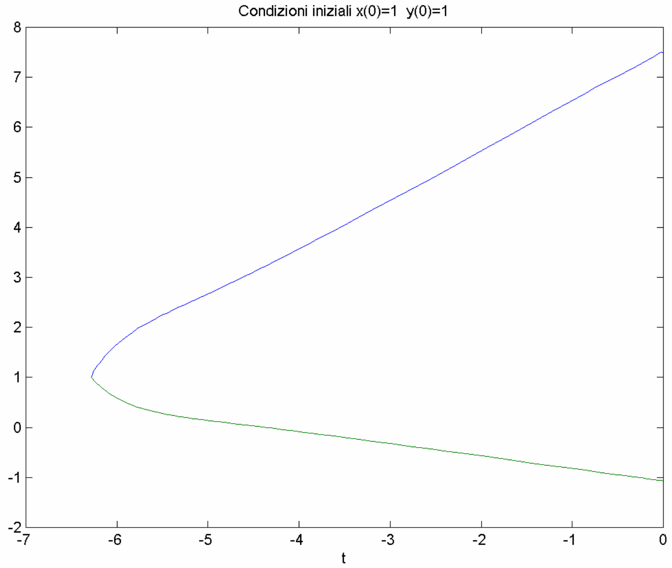
Infatti il grafico del sistema nel quale abbiamo inserito solo la 1° armonica è il seguente:



vediamo ora cosa succede aumentando le armoniche. Quelli che seguono sono i grafici rispettivamente delle prime 5,10 e 50 armoniche:







Si può notare quindi come all'aumentare del numero di armoniche il sistema assume sempre più il comportamento che ha assunto quando abbiamo inserito il segnale originario.

La funzione che disegna la soluzione del sistema lineare con inserito il segnale si trova nel file 'inibitorisegn.m' mentre il sistema è definito nel file 'sistemalins.m' come segue:

```
%% FILE CHE DEFINISCE IL SISTEMA LINEARIZZATO DEI MECCANISMI
%% ATTIVATORI-INIBITORI CON INSERITO IL SEGNALE f(t)

function xpunto=sistemalins(t,x)

global a b;

n=50
ff=pi;
for k=1:n
   coeff=-2/k;
   ff=ff+coeff*sin(k*t);
end

xpunto(1,1)=((b-a)/(a+b))*x(1)+(a+b)^2*x(2)+a-2*b+ff;
xpunto(2,1)=((-2*b)/(a+b))*x(1)-(a+b)^2*x(2)+3*b;
```

in cui si può cambiare la riga

*xpunto(1,1)=((b-a)/(a+b))*x(1)+(a+b)^2*x(2)+a-2*b+ff;*

con

*xpunto(1,1)=((b-a)/(a+b))*x(1)+(a+b)^2*x(2)+a-2*b+t+2*pi;*

se si vuole stampare il risultato ottenuto inserendo il segnale originario e dove con n si fissano il numero di armoniche.

Ecco infine come si comporta il sistema se inseriamo il segnale f(t) nella seconda (sempre con a=1 e b=1):