Sistema **32.b** ***Muraca Giuseppe*** Matr. ***47553***

MECCANISMI ATTIVATORI-INIBITORI

INDICE

1° PARTE –
Linearizzazione attorno ad un punto di equilibrio stabile

2° PARTE –
Ricerca autovalori ed autovettori in funzione dei parametri

3° PARTE -
Soluzione analitica del sistema nel caso di a=1 e b=1
Integrale generale e integrale particolare con i dati iniziali
Y(0)=1 e x(0)=1

4° PARTE -
Soluzione analitica del sistema nel caso di a=1 e b=0
Integrale generale e integrale particolare con i dati iniziali
Y(0)=1 e x(0)=1

5° PARTE -
Risoluzione numerica in Matlab con il comando ODE23
E confronto con la soluzione analitica

PARTE PRIMA

Meccanismi attivatori-inibitori regolati dal seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = a - u + u^2 v \\ \dfrac{dv}{dt} = b - u^2 v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u} = a - u + u^2 v \\ \dot{v} = b - u^2 v \end{cases}$$

Per linearizzare il sistema consideriamo: $\begin{cases} \dot{u} = f_1(u,v) \\ \dot{v} = f_2(u,v) \end{cases}$

Troviamo i punti di equilibrio del sistema cioè i punti in cui risulti:

$$\begin{cases} f_1(u,v) = 0 \\ f_2(u,v) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - u + u^2 v = 0 \\ b - u^2 v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - u + \cancel{u^2}\dfrac{b}{\cancel{u^2}} = 0 \\ v = \dfrac{b}{u^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = a + b \\ v = \dfrac{b}{u^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = a + b \\ v_0 = \dfrac{b}{(a+b)^2} \end{cases}$$

L'unico punto di equilibri è dunque $P\left(a+b, \dfrac{b}{(a+b)^2}\right)$ che risulta stabile se gli autovalori del sistema linearizzato attorno a questo punto hanno parte reale minore di zero.

Adesso applichiamo lo sviluppo in serie di Taylor per funzioni a due variabili attorno al punto di equilibrio (u_0,v_0) troncato al 1° ordine:

$$f(u,v) = f(u_0,v_0) + \left[\frac{f'}{\partial u}(u_0,v_0)\right](u-u_0) + \left[\frac{f'}{\partial v}(u_0,v_0)\right](v-v_0)$$

le derivate parziali di f_1 e f_2 sono:

$$\frac{f_1'}{\partial u} = -1 + 2uv \qquad \frac{f_1'}{\partial v} = u^2$$

$$\frac{f_2'}{\partial u} = -2uv \qquad \frac{f_2'}{\partial v} = -u^2$$

la $f_1(u,v)$ allora diventa:

$$f_1(u,v) = \underbrace{f_1(u_0,v_0)}_{=0} + \left(-1 + 2\frac{b}{(a+b)}\right)(u - (a+b)) + \left((a+b)^2\left(v - \frac{b}{(a+b)^2}\right)\right)$$

$$= -u + (a+b) + \frac{2b}{a+b}u - \cancel{\frac{2b}{a+b}(a+b)} + (a+b)^2 v - \cancel{(a+b)^2}\frac{b}{\cancel{(a+b)^2}}$$

$$= \left(\frac{2b}{a+b} - 1\right)u + (a+b)^2 v + a - 2b$$

quindi

$$f_1(u,v) = \left(\frac{b-a}{a+b}\right)u + (a+b)^2 v + (a-2b)$$

stessa cosa per $f_2(u,v)$

$$f_2(u,v) = \underbrace{f_2(u_0,v_0)}_{=0} + \left(-2\frac{b}{(a+b)}\right)(u-(a+b)) + \left(-(a+b)^2\left(v - \frac{b}{(a+b)^2}\right)\right)$$

$$f_2(u,v) = \left(-\frac{2b}{a+b}\right)u - (a+b)^2 v + 3b$$

il sistema linearizzato diventa:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{u} = \left(\dfrac{b-a}{a+b}\right)u + (a+b)^2 v + (a-2b) \\ \dot{v} = \left(-\dfrac{2b}{a+b}\right)u - (a+b)^2 v + 3b \end{cases}}$$

PARTE SECONDA

Troviamo gli autovalori della matrice associata al sistema in funzione dei parametri a,b

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{a-b}{a+b} & (a+b)^2 \\ \dfrac{2b}{a+b} & -(a+b)^2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - lI) = \begin{vmatrix} \dfrac{a-b}{a+b} - l & (a+b)^2 \\ -\dfrac{2b}{a+b} & (a+b)^2 - l \end{vmatrix} = \left(\frac{a-b}{a+b} - l\right)\left(-(a+b)^2 - l\right) + \frac{2b}{(a+b)}(a+b)^2 =$$

$$= l^2 + (a+b)^2 l + \frac{a-b}{a+b} l + \frac{a-b}{a+b}(a+b)^2 + 2b(a+b) = l^2 + \left[(a+b)^2 + \frac{a-b}{a+b}\right] l + (a+b)^2$$

da cui:

$$\boxed{\begin{aligned} l_1 &= -\frac{a-b}{2(a+b)} - \frac{(a+b)^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a-b}{2(a+b)}\right)^2 - (a+b)^2} \\ \\ l_2 &= -\frac{a-b}{2(a+b)} - \frac{(a+b)^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a-b}{2(a+b)}\right)^2 - (a+b)^2} \end{aligned}}$$

Conoscendo gli autovalori, troviamo gli autovettori

$$(A - l_{1I}) = \begin{bmatrix} -\frac{a-b}{a+b} + \frac{a-b}{2(a+b)} + \frac{(a+b)^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a-b}{2(a+b)}\right)^2 - (a+b)^2} & (a+b)^2 \\ -\frac{2b}{a+b} & -(a+b)^2 + \frac{a-b}{2(a+b)} + \frac{(a+b)^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a-b}{2(a+b)}\right)^2 - (a+b)^2} \end{bmatrix}$$

$$(A - l_1 I) = \begin{bmatrix} -\frac{a-b}{2(a+b)} + \frac{(a+b)^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a-b}{2(a+b)}\right)^2 - (a+b)^2} & (a+b)^2 \\ -\frac{2b}{a+b} & \frac{a-b}{2(a+b)} - \frac{(a+b)^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a-b}{2(a+b)}\right)^2 - (a+b)^2} \end{bmatrix}$$

Il sistema risultante è:

$$\begin{cases} \left[-\frac{a-b}{2(a+b)} + \frac{(a+b)^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a-b}{2(a+b)}\right)^2 - (a+b)^2}\right] x + (a+b)^2 y = 0 \\ -\frac{2b}{a+b} x + \left[\frac{a-b}{2(a+b)} + \frac{(a+b)^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a-b}{2(a+b)}\right)^2 - (a+b)^2}\right] y = 0 \end{cases}$$

se pongo $x=a$

$$\begin{cases} y = \left(\dfrac{\dfrac{a-b}{2(a+b)} - \dfrac{(a+b)^2}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{(a+b)^2}{2} + \dfrac{a-b}{2(a+b)}\right)^2 - (a+b)^2}}{(a+b)^2} \right) a \\ x = a \end{cases}$$

$$ponendo \frac{\dfrac{a-b}{2(a+b)} - \dfrac{(a+b)^2}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{(a+b)^2}{2} + \dfrac{a-b}{2(a+b)}\right)^2 - (a+b)^2}}{(a+b)^2} = k$$

$$\begin{cases} x = a \\ y = ka \end{cases}$$

l’autovettore che soddisfa il sistema è del tipo $\bar{v} / \bar{v} = a\,(1, k)$ quindi l’autovettore corrispondente è $\begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}$

procedendo allo stesso modo per l_2 si trova che:

$$\begin{cases} y = \left(\dfrac{-\dfrac{a-b}{2(a+b)} - \dfrac{(a+b)^2}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{(a+b)^2}{2} + \dfrac{a-b}{2(a+b)}\right)^2 - (a+b)^2}}{(a+b)^2} \right) a \\ x = a \end{cases}$$

$$ponendo \frac{-\dfrac{a-b}{2(a+b)} - \dfrac{(a+b)^2}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{(a+b)^2}{2} + \dfrac{a-b}{2(a+b)}\right)^2 - (a+b)^2}}{(a+b)^2} = q$$

$$\begin{cases} y = qa \\ x = a \end{cases}$$

la soluzione è del tipo $\bar{v}^{'} / \bar{v}^{'} = a\,(1, q)$ quindi l’autovettore corrispondente è $\begin{bmatrix} 1 \\ q \end{bmatrix}$

PARTE TERZA

Consideriamo adesso un caso particolare in cui sostituiamo ai parametri i valori

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Il sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio $P\left(2, \frac{1}{4}\right)$ diventa:

$$\begin{cases} \dot{u} = 4v - 1 \\ \dot{v} = -u - 2v + 3 \end{cases}$$

Troviamo prima la soluzione del sistema omogeneo

$$l_1 = l_2 = -\frac{1-1}{4} - \frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2} + \frac{1-1}{4}\right)^2 - 4} = -2 \pm 0$$

siccome l'autovalore è minore di zero il punto P attorno al quale abbiamo linearizzato è un punto di equilibrio stabile.

In questo caso abbiamo un solo autovalore con molteplicità algebrica 2

l'autovettore corrispondente è

$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ per semplificare i calcoli posso prendere anche $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$(moltiplico per –2)

Siccome ho un solo autovettore la soluzione è del tipo

$$x(t) = c_1 \cdot v \cdot e^{lt} + c_2 \left\{ v \cdot t \cdot e^{lt} + v' \cdot e^{lt} \right\}$$

dove v' è un vettore che soddisfa il seguente sistema:

$\begin{cases} 2x + 4y = -2 \\ -x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2y - 1 \\ x = -2y - 1 \end{cases} \Rightarrow$ se pongo *y=0 allora x=-1*

un vettore che soddisfa il sistema è quindi $v' = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

la soluzione del sistema omogeneo è allora

$$x(t) = c_1 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{lt} + c_2 \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t \cdot e^{lt} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e^{lt} \right\}$$

che si scrive nel nostro caso:

$$\begin{cases} u(t) = -2c_1 e^{lt} + c_2\left\{-2te^{lt} - e^{lt}\right\} \\ v(t) = c_1 e^{lt} + c_2 t \cdot e^{lt} \end{cases}$$

ora consideriamo il sistema non omogeneo

$$\dot{X} = AX + B(t)$$

$X(t) = Y(t) + B$ dove *Y(t)* è la soluzione del sistema omogeneo

nel nostro caso $B(t) = B_0 e^{at}$ con $a=0$ e B_0 termine noto non dipendente dal tempo, siccome *0* non è soluzione del polinomio caratteristico la soluzione è:

$$(A - aI)B = -B_0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} B = -\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4b_2 = 1 \\ -b_1 - 4b_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2 = \dfrac{1}{4} \\ b_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow B_0 \begin{bmatrix} 2 \\ \dfrac{1}{4} \end{bmatrix}$$

la soluzione generale del sistema è quindi:

$$\boxed{\begin{cases} u(t) = -2c_1 e^{-2t} - 2c_2 te^{-2t} - c_2 e^{-2t} + 2 \\ v(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 te^{-2t} + \dfrac{1}{4} \end{cases}}$$

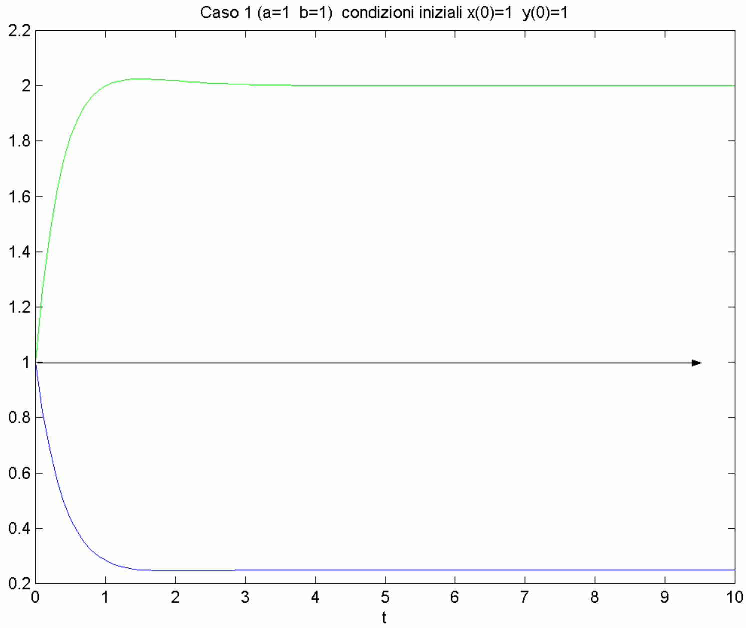
adesso poniamo le condizioni iniziali *u(0)=1* *e* *v(0)=1* per confrontare la soluzione analitica con quella numerica ottenuta in Matlab .

$$\begin{cases} -2c_1 - c_2 + 2 = 1 \\ c_1 + \dfrac{1}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 2 - 1 - \dfrac{3}{2} \\ c_1 = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -\dfrac{1}{2} \\ c_1 = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

la soluzione particolare è

$$\begin{cases} u(t) = -\dfrac{3}{2}e^{-2t} + te^{-2t} + \dfrac{1}{2}e^{-2t} + 2 \\ v(t) = \dfrac{3}{4}e^{-2t} - \dfrac{1}{2}te^{-2t} + \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(t) = -e^{-2t} + te^{-2t} + 2 \\ v(t) = \dfrac{3}{4}e^{-2t} - \dfrac{1}{2}te^{-2t} + \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Il Grafico della soluzione analitica è:



PARTE QUARTA

Vediamo un altro caso particolare

Vediamo il caso in cui $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

Il sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio $P(1{,}0)$ diventa:

$$\begin{cases} \dot{u} = -u + v + 1 \\ \dot{v} = -v \end{cases}$$

Troviamo prima la soluzione del sistema omogeneo

$$l_1 = l_2 = -1$$

l’autovettore associato all’unico autovalore trovato è:

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

anche in questo caso avendo un solo autovetture la soluzione è del tipo:

$$x(t) = c_1 \cdot v \cdot e^{lt} + c_2 \{ v \cdot t \cdot e^{lt} + v' \cdot e^{lt} \}$$

dove v' è un vettore che soddisfa il seguente sistema:

$$\begin{cases} 0x + y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$ e un vettore che soddisfa il sistema è $v' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

la soluzione del sistema omogeneo è allora

$$x(t) = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e^{lt} + c_2 \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot t \cdot e^{lt} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot e^{lt} \right\}$$

che si scrive anche:

$$\begin{cases} u(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \{te^{-t} + e^{-t}\} \\ v(t) = c_2 e^{-t} \end{cases}$$

ora consideriamo il sistema non omogeneo

$$\dot{X} = AX + B(t)$$

$X(t) = Y(t) + B$ dove *Y(t)* è la soluzione del sistema omogeneo

anche in questo caso come nel precedente caso $B(t) = B_0 e^{at}$ con α=0 e siccome 0 non è soluzione del polinomio caratteristico la soluzione è

$$(A - aI)B = -B_0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} B = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -b_1 + b_2 = -1 \\ -b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 0 \end{cases}$$

la soluzione generale del sistema è quindi:

$$\boxed{\begin{cases} u(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \{te^{-t} + e^{-t}\} + 1 \\ v(t) = c_2 e^{-t} \end{cases}}$$

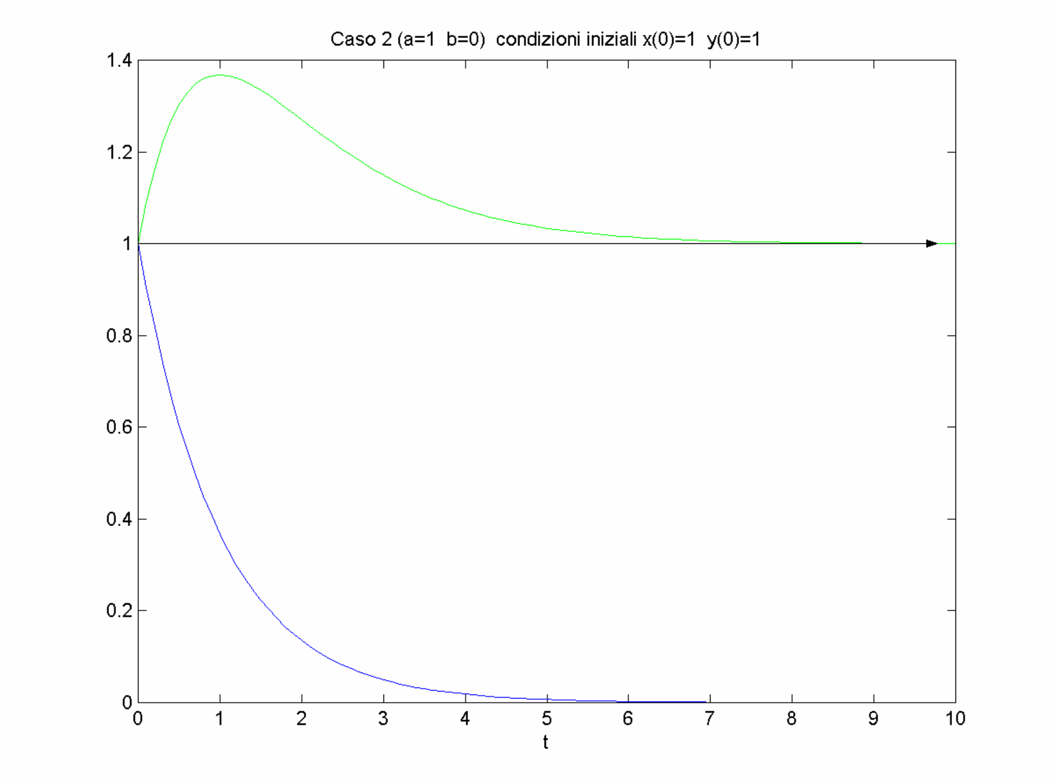
ponendo le condizioni iniziali *u(0)=1* *e* *v(0)=1*

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

la soluzione particolare è

$$\begin{cases} u(t) = te^{-t} + 1 \\ v(t) = e^{-t} \end{cases}$$

Il grafico della soluzione analitica è il seguente:



PARTE QUINTA

A questo punto risolviamo numericamente il sistema nei due casi particolari visti prima
L'algoritmo che risolve questo problema si basa sul comando ODE23, il quale usa il metodo di Runge-Kutta del 2° -3° ordine prendendo in ingresso: il sistema di equazioni differenziali, l'istante iniziale, l'istante finale e un vettore di dati iniziale; e restituendo in uscita una matrice soluzione del sistema.

L'algoritmo utilizzato si trova nel file "inibitorilin.m" e la funzione richiede in ingresso i valori dei due parametri (a,b) mentre i dati iniziali sono fissati ai valori [1 1].
L'algoritmo è il seguente:

```
function inibitorilin(c,d)

t0=0;
tf=10;
x0=[1 1];
```

```
global a b ;
a=c;
b=d;

[t,x]=ode23s('sistemalin',[t0,tf],x0);
figure (2);

 plot(t,x)
 title('Condizioni iniziali x(0)=1  y(0)=1');
 xlabel('t');
```

mentre il file che realizza il sistema è “sistemalin.m”

```
function xpunto=sistemalin(t,x)

global a b;

xpunto(1,1)=((b-a)/(a+b))*x(1)+(a+b)^2*x(2)+a-2*b;
xpunto(2,1)=((-2*b)/(a+b))*x(1)-(a+b)^2*x(2)+3*b;
```

I grafici risultanti rispettivamente del caso1 e del caso2 sono: