RISOLUZIONE PROVA SCRITTA

Classe 4 A - aprile 2011

PROVA A

1. Dato il triangolo isoscele ABC avente $\overline{AC} = \overline{CB} = l$ e $\cos\widehat{A} = \cos\widehat{B} = \dfrac{1}{3}$, calcolare:

   a) il perimetro $2p$;

   b) le misure delle tre altezze;

   c) la distanza $\overline{CM}$, essendo M l'ortocentro.

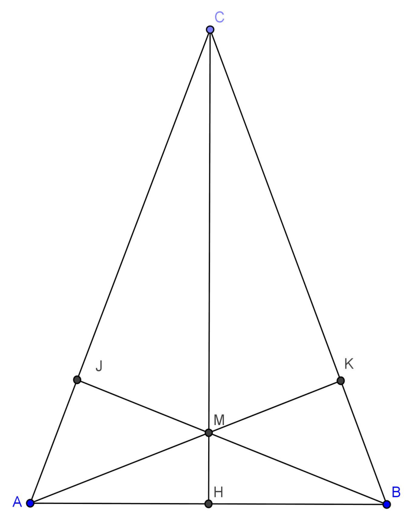

Figura 1: Eserczio 1

Ovviamente $2p = AB + AC + CB$, quindi è necessario trovare la base AB. Secondo una buona prassi da attuare coi triangoli isosceli, tracciamo l'altezza CH che divide il triangolo in due triangoli rettangoli. Si ha che:

$$AB = 2 \cdot AC \cos\widehat{A} = 2 \cdot l \cdot \frac{1}{3}$$

Quindi:

$$\boxed{2p = 2l + \frac{2}{3}l = \frac{8}{3}l}$$

L'altezza CH vale ovviamente $AC \cdot \sin\widehat{A}$, ove:

$$\sin\widehat{A} = \sqrt{1 - \cos^2\widehat{A}} = \sqrt{1 - 1/9} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Quindi:

$$\boxed{CH = \frac{2l\sqrt{2}}{3}}$$

Le due altezze $AK = BJ$ si trovano considerando i triangoli rettangoli AKC o BJC. Si ha che, per esempio, $AK = AC\sin\widehat{C}$. Per procurarci $\sin\widehat{C}$, essendo $\widehat{C} = \pi - 2\widehat{A}$ è ovviamente:

$$\sin\widehat{C} = \sin(\pi - 2\widehat{A}) = \sin 2\widehat{A} = 2\sin\widehat{A}\cos\widehat{A} = \cdot 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{9}\cdot\sqrt{2}$$

Quindi:

$$\boxed{AK = BJ = \frac{4}{9}\cdot l\sqrt{2}}$$

Sia ora M l'ortocentro, punto di intersezione delle altezze.

Il segmento CM si potrebbe trovare, ad esempio, considerando il triangolo rettangolo CKM. Si avrebbe che:

$$CK = CM\cdot\cos M\widehat{C}K \Rightarrow CM = \frac{CK}{\cos M\widehat{C}K}$$

A sua volta,

$$\cos M\widehat{C}K = \cos\widehat{C}/2 = \sqrt{\frac{1+\cos\widehat{C}}{2}}$$

Sapendo che $\sin\widehat{C} = \frac{4}{9}\cdot\sqrt{2}$, $\cos\widehat{C} = \sqrt{1-\sin^2\widehat{C}} = \sqrt{1-\frac{32}{81}} = \frac{7}{9}$ e quindi:

$$\cos M\widehat{C}K = \sqrt{\frac{1+7/9}{2}} = \sqrt{\frac{16}{18}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Per trovare CK basta considerare il triangolo rettangolo AKC ed osservare che:

$$AC\cdot\cos\widehat{C} = l\cdot\frac{7}{9}$$

Infine:

$$\boxed{CM = \frac{\frac{7}{9}l}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{7}{12}\sqrt{2}l}$$

2. Data la semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ e centro O, sia C il punto medio di AO. Sia E un punto sull'arco AB, in modo che $E\widehat{A}B = x$. Condotta la tangente t in E alla semicirconferenza, traccia da C la parallela alla corda AE che incontri t in D.

   a) Quanto misura la corda AE?
   b) Sia P il punto di intersezione tra CD e OE. Come sono i triangoli POC e AEO? Alla luce di ciò, quanto misura il lato PC?
   c) Di che natura è il triangolo PED? Quanto misura EP? Quanto misura $E\widehat{P}D$? Quanto misura PD?
   d) per quale valore di x si ha che $\overline{CD} = \sqrt{2}r$?

La corda AE, per il teorema della corda, misura $AE = 2r\sin E\widehat{B}A$, visto che $E\widehat{B}A$ è l'angolo alla circonferenza che insiste sullo stesso arco (e di cui si possono avere informazioni). Per trovare detto angolo consideriamo EAB, rettangolo perchè inscritto in una semicirconferenza.

Se $EAB = x$, allora $EBA = \frac{\pi}{2} - x$ e quindi:

$$\boxed{AE = 2r\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 2r\cos x}$$

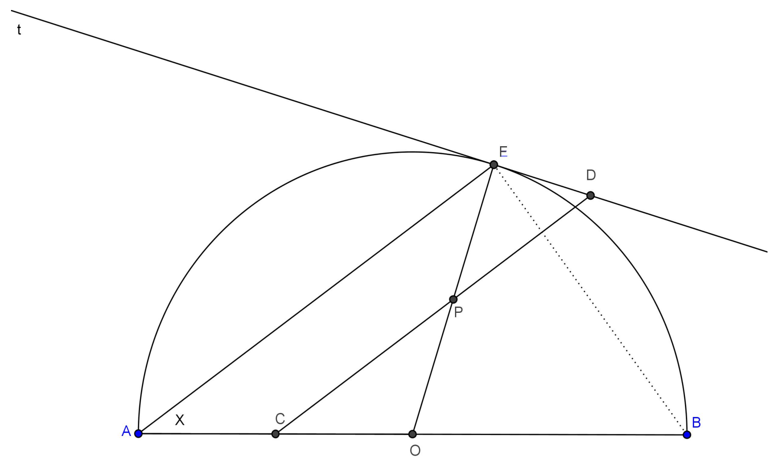

Figura 2: Eserczio 2

Si poteva calcolare la misura della corda anche tracciando l'altezza del triangolo isoscele AEO relativa alla base AE ed applicare il relativo teorema dei triangoli rettangoli a ciascuno dei triangoli in cui AEO veniva diviso...

Sia P il punto di intersezione tra CD e OE. I triangoli POC e AEO sono ovviamente simili, per noti teoremi sulle parallele. Dunque:

$$AO : CO = AE : PC = EO : PO$$

Se $AC = 2CO$, allora fra questi triangoli vige un rapporto di proporzionalità $2 : 1$, quindi sicuramente

$$\boxed{PC = \frac{1}{2}AE = r\cos x}$$

Il triangolo PED è chiaramente rettangolo, visto che $EO \perp ED$ (E è punto di tangenza!).

Visto che PCO è simile a AEO e che EPD e CPO sono opposti al vertice:

$$CPO = x = EPD$$

dal momento che PCO è isoscele e $PCO = OCP = EAO$. Considerando ora PED, visto che $PD\cos x = EP$, allora $PD = \dfrac{EP}{\cos x}$, ma per i rapporti di similitudine $EP = \dfrac{1}{2}EO = \dfrac{r}{2}$. Per cui:

$$\boxed{PD = \frac{r}{2\cos x}}$$

Ora, ovviamente $CD = CP + PD$. Quindi:

$$CD = r\cos x + \frac{r}{2\cos x}$$

Se deve essere $CD = r\cos x + \dfrac{r}{2\cos x} = \sqrt{2}r$, si dovrà risolvere l'equazione goniometrica:

$$r\cos x + \frac{r}{2\cos x} = \sqrt{2}r \Rightarrow \cos x + \frac{1}{2\cos x} = \sqrt{2}$$

che risolta in forma normale (con $\cos x \neq 0$) è quadratica in coseno:

$$2\cos^2 x - 2\sqrt{2}\cos x + 1 = 0$$

Risolta, dà:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \wedge \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$$

ma dovendo essere $0 < x < \pi/2$, l'unica soluzione accettabile è:

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4}}$$

3. Si consideri il triangolo ABC rettangolo in A ed avente l'ipotenusa che misura $2a$ con $a > 0$. Sia P il punto medio di AC e Q la sua proiezione ortogonale su BC. Determinare l'angolo $A\widehat{B}C$ in modo tale che si abbia:

$$\overline{PQ} + \overline{QC} = k \cdot \overline{BQ}$$

con $k > 0$.

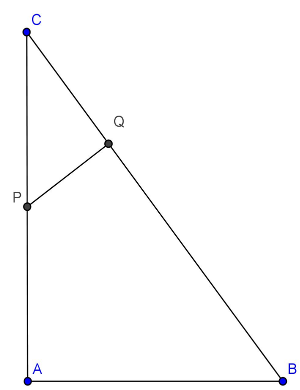

Figura 3: Eserczio 3

Sia allora $A\widehat{B}C = x$. Osserviamo subito la evidente similitudine tra i triangoli rettangoli ABC e CPQ, visto che hanno un angolo in comune ed un altro angolo retto. Quindi:

$$QP : AB = CQ : CA = CP : BC$$

Risolvendo ABC, si ha ovviamente che:

$$AB = CB\cos x = 2a\cos x, \quad AC = CD\sin x = 2a\sin x$$

Secondo la proporzione di cui sopra, visto anche che per ipotesi $CP = \dfrac{1}{2}AC = s\sin x$, si ha:

$$CQ : CA = CP : BC \Rightarrow CQ = CA \cdot \frac{CP}{BC} = 2a\sin x \cdot \frac{a\sin x}{2a} = a\sin^2 x$$

$$QP : AB = CP : BC \Rightarrow QP = AB \cdot \frac{CP}{BC} = 2a\cos x \cdot \frac{a\sin x}{2a} = a\sin x\cos x$$

Osservando che $QB = CB - CQ = 2a - a\sin^2 x$, si può costruire la relazione $\overline{PQ} + \overline{QC} = k \cdot \overline{BQ}$:

$$a\sin x\cos x + a\sin^2 x = k(2a - a\sin^2 x) \Rightarrow \sin x\cos x + \sin^2 x = k(2 - \sin^2 x)$$

La relazione va discussa, con le limitazioni $0 \le x \le \pi/2$. A tale scopo, moltiplichiamo il termine noto $2k$ per l'identità fondamentale $(\sin^2 x + \cos^2 x)$:

$$\sin x\cos x + \sin^2 x = 2k\sin^2 x + 2k\cos^2 x - k\sin^2 x \Rightarrow (1-k)\sin^2 x + \sin x\cos x - 2k\cos^2 x = 0$$

Si deve quindi discutere il sistema parametrico

$$\begin{cases} (1-k)\sin^2 x + \sin x\cos x - 2k\cos^2 x & = & 0 \\ 0 & \le x & \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Dividendo per $\cos^2 x$, ponendo $\tan x = t$ e $y = t^2$, rimane da discutere il seguente sistema parametrico:

$$\begin{cases} y & = & t^2 \\ (1-k)y + t - 2k & = & 0 \\ t & \ge & 0 \end{cases}$$

che vede l'intersezione del fascio proprio di rette $(1-k)y+t-2k = 0$ con l'arco di parabola illimitato $y = t^2$ che parte dall' estremo $O(0,0)$.

Se si fattorizza l'equazione del fascio rispetto a k, si hanno le due generatrici:

$$g_1 : -y - 2 = 0 \; g_2 : y + t = 0$$

La loro intersezione dà il centro P del fascio: $P(2;-2)$.

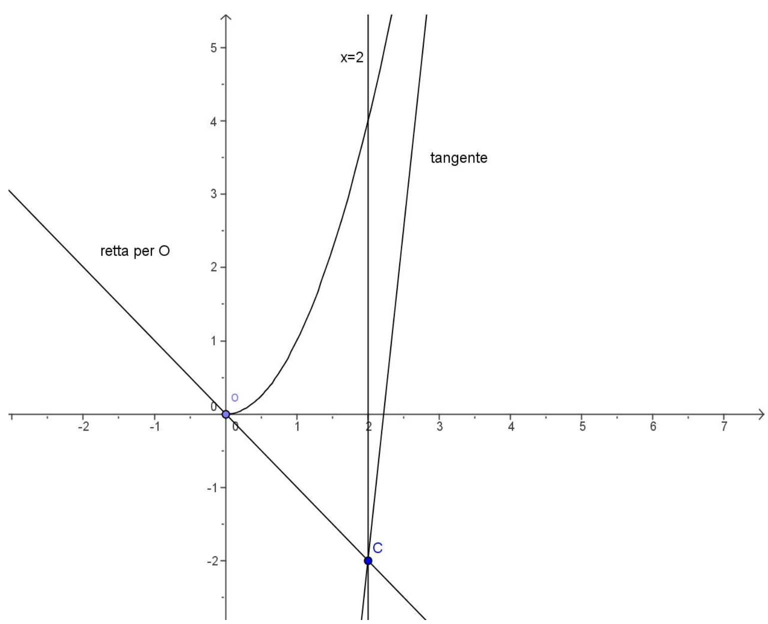

Figura 4: Discussione es 3

Si vede allora che il problema può ammettere una o due soluzioni:

- Se la retta è compresa fra quella che passa per l'origine e quella verticale per C, la soluzione è unica

- Se la retta è compresa fra la suddetta verticale e la tangente nel primo quadrante, la soluzione è doppia

Il passaggio per il punto $O(0,0)$ si ha per $(1-k)\cdot 0 + 1\cdot 0 - 2k = 0 \Rightarrow k = 0$.

La retta verticale avrà un k che rende infinito il coefficiente angolare. Esplicitiamo l'equazione del fascio:

$$1-k)y + t - 2k = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{1-k}x + \frac{2k}{1-k}$$

Quindi, visto che $k = -\frac{1}{1-k}$, la retta verticale si avrà per $k = 1$.

Troviamo ora la retta tangente all'arco di parabola, annullando il discriminante del sistema:

$$\begin{cases} y & = & t^2 \\ (1-k)y + t - 2k & = & 0 \end{cases}$$

L'equazione risolvente è: $(1-k)t^2 + t - 2k = 0$ il cui Δ vale

$$1 - 4\cdot(1-k)\cdot(-2k) \Rightarrow 8k^2 - 8k - 1 = 0$$

che ammette per soluzioni

$$k = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{4}$$

La tangente che fa al caso nostro è quella con $k > 0$, quindi $k_T = \frac{2+\sqrt{6}}{4} \simeq 1.11$.

Ovviamente $k_T > 1$, per cui il problema ammetterà:

- una soluzione per $k \in [0; 1]$
- due soluzioni per $k \in \left]1; \frac{2+\sqrt{6}}{4}\right[$

PROVA B

1. Sia data una circonferenza di centro O e raggio r, ed una retta t distante dal centro $\frac{4}{3}r$. Sia H il punto in cui la perpendicolare condotta dal centro incontra la circonferenza. Si conduca da H una retta che incontri la circonferenza nell'ulteriore punto A e la retta t in B, in modo che $AH = \frac{8}{5}r$. Determina:

   a) $\cos O\widehat{H}A$;

   b) la misura di HB;

   c) la distanza $\overline{CM}$, essendo M l'ortocentro.[1]

Sia J la proiezione ortogonale di H su t e C il punto medio di AH.

Considerando il triangolo OHC, ovviamente $AC = CH = \frac{1}{2}AH = \frac{4}{5}r$. Siccome $OH \cos O\widehat{H}A = \frac{4}{5}r$, allora:

$$\boxed{\cos O\widehat{H}A = \frac{4/5r}{r} = \frac{4}{5}}$$

E' ovvia la similitudine di OCH e di HBJ, quindi:

$$HB : OH = HJ : HC \Rightarrow HB = \frac{HJ \cdot OH}{CH}$$

[1] Questa ultima domanda era imprecisa, in quanto non era specificato chi fosse C. E' stato precisato agli alunni di chiamare C il punto medio di AH e quindi M era l'ortocentro di AOH

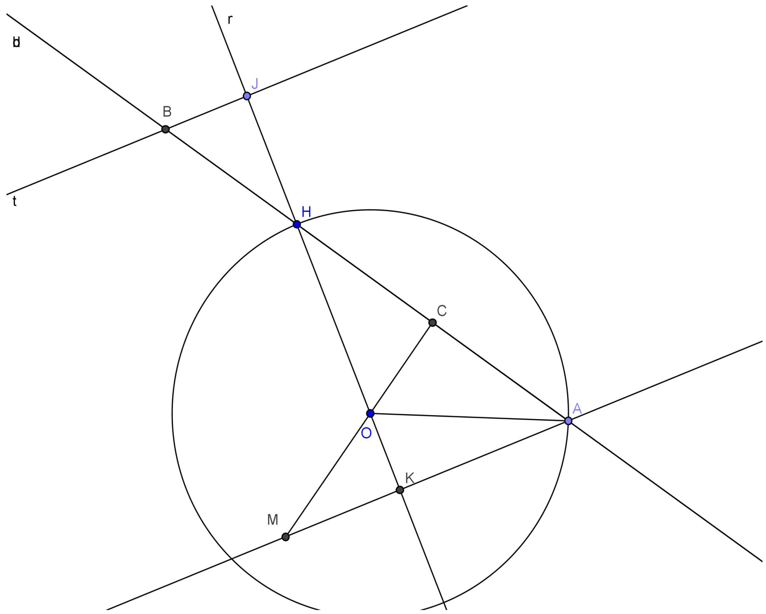

Figura 5: Esercizio 1

Visto che $HJ = \dfrac{r}{3}$, sostituendo:

$$\boxed{HB = \frac{r/3r \cdot r}{4/5r} = \frac{5}{12}r}$$

Per trovare l'ortocentro, bisogna osservare che il triangolo AHO è ottusangolo, quindi M è esterno al triangolo. Sia K il piede dell'altezza (esterna al triangolo!) relativa al lato OH.

Considerando il triangolo rettangolo AHK, ovviamente

$$AK = AH \sin H\widehat{A}K = \frac{8/5}{r} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}r$$

Considerando il triangolo rettangolo AKO:

$$AO \cdot \cos K\widehat{A}O = AK \Rightarrow \cos K\widehat{A}O = \frac{AK}{AO} = \frac{24}{25}$$

A questo punto, considerando il triangolo rettangolo AMC:

$$\frac{MC}{AC} = \tan M\widehat{A}C \Rightarrow MC = AC \tan M\widehat{A}C = AC \tan(OAC + OAK) = AC \cdot \frac{\tan AOC + \tan AOK}{1 - \tan AOC \cdot \tan AOK}$$

Ora: $\cos AOC = 4/5 \Rightarrow \sin AOC = 3/5 \Rightarrow \tan AOC = 3/4$ e $\cos AOK = 24/25 \Rightarrow \sin AOK = 7/25 \Rightarrow \tan AOK = 7/24$

Quindi, effettuando i calcoli:

$$\boxed{MC = \frac{4}{5}r \cdot \frac{\frac{3}{4} + \frac{7}{24}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{24}} = \frac{16}{15}r}$$

2. Data una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ e centro O, si prendano dalla parte opposta rispetto ad O due punti P e Q in modo tale che $OP = OQ$. Si conducano da P e Q le tangenti alla semicirconferenza e sia S il loro punto comune. Sia $S\widehat{P}A = x$, H la proiezione ortogonale di O su PS.

a) Considerando il triangolo PHO, quanto misura PO?

b) Considerando il triangolo POS, quanto misurano SO e $PS = SQ$?

c) Trova quanto deve valere l'angolo x affinchè:

$$\overline{PQ} + \overline{SQ} = 2(\sqrt{3}+1)\overline{SO}$$

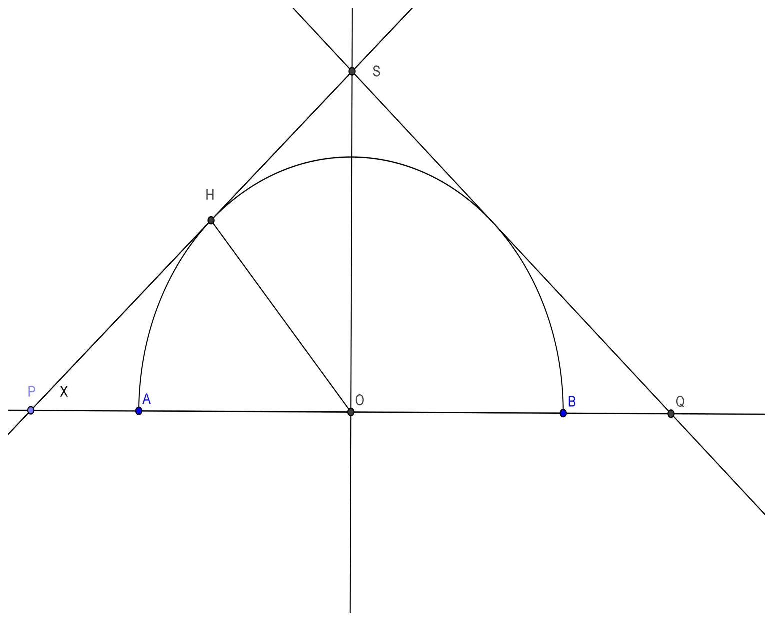

Figura 6: Esercizio 2

Considerando il triangolo rettangolo PHO, ovviamente $HO = r$ e

$$\boxed{PO \sin x = HO \Rightarrow PO = \frac{r}{\sin x}}$$

Considerando il triangolo OPS, $\dfrac{SO}{PO} \tan x \Rightarrow SO = PO \cdot \tan x$, quindi:

$$\boxed{SO = \frac{r}{\cos x}}$$

Dal momento che $PS \cos x = PO$, allora:

$$\boxed{PS = \frac{r}{\sin x \cdot \cos x}}$$

Componendo la relazione $\overline{PQ} + \overline{SQ} = 2(\sqrt{3}+1)\overline{SO}$, si ha:

$$2 \cdot \frac{r}{\sin x} + \frac{r}{\sin x \cdot \cos x} = 2(\sqrt{3}+1) \cdot \frac{r}{\cos x}$$

Tale relazione si scrive, facendo denominatore comune e semplificando per r:

$$2\cos x + 1 = 2(\sqrt{3}+1)\sin x, \quad x \neq k\pi/2$$

L'equazione lineare in seno e coseno si può risolvere col metodo preferito e dà, visto che $0 < x < \pi/2$, come unica soluzione accettabile $x = \pi/6$, dunque:

$$\boxed{x = \frac{\pi}{6}}$$

3. Si consideri il triangolo ABC rettangolo in A ed avente l'ipotenusa che misura $2a$ con $a > 0$. Sia P il punto medio di AC e Q la sua proiezione ortogonale su BC. Determinare l'angolo $A\widehat{C}B$ in modo tale che si abbia:
$$\overline{PQ} + \overline{QC} = k \cdot \overline{BQ}$$
con $k > 0$.

Per la figura si veda quella dell'es.3 della prova A.

Questo esercizio è del tutto analogo al corrispondente della prova A: se ora l'incognita è $x = A\widehat{C}B$, ovviamente è $PC = \dfrac{1}{2}AC = a\cos x$.

Considerando il triangolo rettangolo PCQ, abbiamo che $PQ = a\sin x\cos x$ e che $CQ = a\cos^2 x$. Quindi:

$$\overline{PQ} + \overline{QC} = k \cdot \overline{BQ} \Rightarrow a\sin x\cos x + a\cos^2 x = k(2a - a\cos^{x})$$

Si perviene,quindi, alla seguente relazione:

$$2k\sin^2 x - \sin x\cos x + (k-1)\cos^2 x = 0$$

che vede la discussione del seguente sistema parametrico:

$$\begin{cases} y & = & t^2 \\ 2ky - t + k - 1 & = & 0 \\ t & \geq & 0 \end{cases}$$

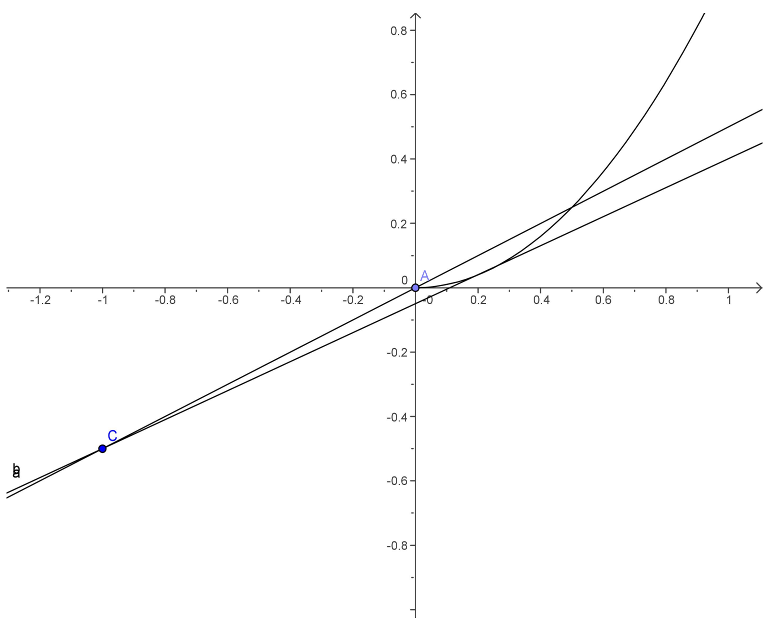

Figura 7: Discussione es 3

Il centro del fascio è dato da $C(-1; -1/2)$. Si vede allora che il problema ammettte sempre due soluzioni. Imponendo il passaggio per O si ha che:

$$2k \cdot 0 - 0 + k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1$$

Ponendo la condizione di tangenza, si ha che si deve annullare il Delta dell'equazione $2kt^2 - t + k - 1 = 0$ e cioè:

$$1 - 4 \cdot (2k) \cdot (k-1) = 0 \Rightarrow 8k^2 - 8k - 1 = 0$$

L'equazione ammette le due soluzioni

$$k = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{4}$$

La tangente che fa al caso nostro è quella con $k > 0$.

Il problema ammetterà due soluzioni per $k \in [1; \frac{2+\sqrt{6}}{4}[$