TRIGONOMETRIA

`Sistemi parametrici (senza figure!)`

Un sistema goniometrico parametrico è composto da:

- Un'equazione goniometrica parametrica, contenente funzioni goniometriche più un parametro reale. L'incognita dell'equazione è sempre un angolo x
- Una o più limitazioni sull'angolo x, espresse da una o più disequazioni

Un esempio è:

$$\begin{cases} 2k\cos x - (k-1)\sin x &= 0 \\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

in cui l'incognita è sempre x, $k \in \mathbb{R}$ è il parametro e la soluzione deve essere compresa nel primo quadrante, come si può evincere dalla disequazione che compare.

Ribadiamo che la consegna è sempre quella di DISCUTERE l'equazione, ossia specificare per certi valori del parametro (in questo caso, k) quale sia il numero delle soluzioni e non determinare quali esse siano!.

Dividiamo la trattazione per casi, visto che di solito l'approccio consiste nella discussione per via grafica, in cui si ricercherà l'intersezione geometrica tra un fascio di rette (associato all'equazione parametrica) e la circonferenza goniometrica $x^2 + y^2 = 1$ oppure la parabola $y = x^2$.

1 Fascio improprio e circonferenza

Rientrano in tale sezione le equazioni LINEARI in seno e coseno, a cui sono associati dei fasci impropri, quindi equazioni del tipo

$$a\sin x + b\cos x = f(k)$$

ove i coefficienti a e b sono numeri reali non dipendenti da k e $f(x)$ è una qualsiasi funzione del parametro k.

Il segreto è sempre trasformare tale equazione in quella di un fascio, in questo caso improprio, di rette (cioè rette tutte parallele ad una retta base detta generatrice), mediante la posizione:

$$\cos x = X, \quad \sin x = Y$$

da completare con la relazione fondamentale

$$X^2 + Y^2 = 1$$

che è quella della circonferenza goniometrica, di cui dovremo considerare i sottoinsiemi denotati dalla disequazione che compare nel nostro sistema.

1.1 Esempio 1

$$\begin{cases} \sin x &= 3k-2 \\ 0 < x < \dfrac{5}{6}\pi \end{cases}$$

Se si pone $\sin x = Y$, si trasforma l'equazione nel sistema:

$$\begin{cases} Y &= 3k-2 \\ X^2+Y^2 &= 1 \\ 0 < x < \dfrac{5}{6}\pi \end{cases}$$

che vede l'intersezione fra il fascio $Y = 3k - 1$ e la parte di circonferenza goniometrica per $0 < x < \dfrac{5}{6}\pi$.

Il fascio è ovviamente improprio, visto che i coefficienti delle variabili (in tal caso X e Y) sono costanti e non dipendono da k. Siccome la retta è del tipo $Y = cost$, il fascio è composto da infinite rette orizzontali.

Dobbiamo ora trovare l'intersezione fra queste rette e l'arco $\widehat{AB}$ di circonferenza goniometrica che sottende un angolo di $\dfrac{5}{6}\pi$. Gli estremi dell'arco sono i punti $A(1,0)$ e $B(-\sqrt{3}/2; 1/2)$.

Come si vede dalla figura, ogni retta del fascio può intersecare l'arco in questione una volta oppure due:

- Se la retta è sotto l'asse x, ossia ha una quota inferiore all'ordinata del punto A, non si hanno soluzioni.
- Se la retta ha una quota compresa tra le ordinate di A e di B c'è una sola soluzione
- Se la retta ha una quota compresa fra l'ordinata di B e l'estremo superiore della circonferenza goniometrica, ossia il punto $C(0,1)$
- se la retta ha una quota superiore a 1, non ci sono soluzioni

Vediamo ora fra quali valori del parametro (capisaldi) si ha tale intersezione. Le posizioni limite, al di fuori delle quali la retta non interseca $\widehat{AB}$ sono dunque due:

- Passaggio per $A(1,0)$: $0 = 3k - 2 \Rightarrow k_A = \dfrac{2}{3}$
- Passaggio per $B(-\sqrt{3}/2; 1/2)$: $1/2 = 3k - 2 \Rightarrow k_B = \dfrac{5}{6}$
- Passaggio per $C(0,1)$ ossia condizione di tangenza: $1 = 3k - 2 \Rightarrow k_T = 1$

Per concludere, allora, diremo che il nostro sistema ammette:

- una soluzione per $k \in \left]\dfrac{2}{3}; \dfrac{5}{6}\right[$
- due soluzioni per $k \in \left[\dfrac{5}{6}; 1\right]$

specificando che se $k = 1$ le due soluzioni sono coincidenti.

1.2 Esempio 2

$$\begin{cases} \sin x + \cos x + k - 1 & = & 0 \\ 0 < x < \dfrac{2}{3}\pi \end{cases}$$

Se si pone $\cos x = X$, $\sin x = Y$, si trasforma l'equazione nel sistema:

$$\begin{cases} X + Y + k - 1 & = & 0 \\ X^2 + Y^2 & = & 1 \\ 0 < x < \dfrac{2}{3}\pi \end{cases}$$

che vede l'intersezione fra il fascio $X + Y = 1 - k$ e la parte di circonferenza goniometrica per $0 < x < \dfrac{2}{3}\pi$.

Il fascio è ovviamente improprio, visto che i coefficienti delle variabili (in tal caso X e Y) sono costanti e non dipendono da k. Il fascio è costituito da infinite rette parallele ad una generatrice che si ottiene ponendo il termine noto pari a zero nell'equazione del fascio stesso. Nel nostro caso la generatrice è:

$$X + Y = 0$$

che è la bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Dobbiamo ora trovare l'intersezione fra queste rette e l'arco $\widehat{AB}$ di circonferenza goniometrica che sottende un angolo di $\dfrac{2}{3}\pi$. Gli estremi dell'arco sono i punti $A(1,0)$ e $B(-1/2; \sqrt{3}/2)$.

Come si vede dalla figura, ogni retta del fascio può intersecare l'arco in questione una volta oppure due. Avremo tre posizioni limite: passaggio per B (r_B), passaggio per A (r_A) e tangente t.

- Se la retta è intermedia fra r_B ed r_A si ha una sola intersezione
- Se la retta è intermedia fra r_A ed t si hanno due intersezioni
- Se la retta è al di fuori di questi intervalli non interseca mai l'arco in questione

Vediamo ora fra quali valori del parametro (capisaldi) si ha tale intersezione. Le posizioni limite, al di fuori delle quali la retta non interseca $\widehat{AB}$ sono dunque due:

- Passaggio per $A(1,0)$: $1 + 0 = 1 - k \Rightarrow k_A = 0$

- Passaggio per $B(-1/2; \sqrt{3}/2)$: $-1/2 + \sqrt{3}/2 = 1 - k \Rightarrow k_B = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$
- Condizione di tangenza. Usiamo in tal caso il metodo della distanza, imponendo che la retta $x + y + k - 1 = 0$ sia distante $r = 1$ dal centro della circonferenza $O(0,0)$. Si ha, ricordando la formula della distanza punto-retta:

  $$1 = \frac{|0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + k - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \Rightarrow |k - 1| = \sqrt{2}$$

  Elevando al quadrato, si ha:

  $$(k-1)^2 = 2 \Rightarrow k^2 - 2k - 1 = 0$$

  equazione che è risolta dalle due soluzioni $k = 1 \pm \sqrt{2}$. Dobbiamo ora capire quale valore di k fa al caso nostro, perchè la formula ci ha dato le due tangenti. In corrispondenza ai due valori si ottengono le due tangenti:

  $$x + y = 1 - (1 \pm \sqrt{2}) \Rightarrow t_1 : y = -x + \sqrt{2}, \quad t_2 : y = -x - \sqrt{2}$$

  Se le disegnamo, ci accorgiamo che la seconda interseca l'arco nel settore in interesse, quindi possiamo concludere che $k_T = 1 - \sqrt{2}$

Per concludere, allora, diremo che il nostro sistema ammette:

- due soluzioni per $k \in \left[1 - \sqrt{2}; 0\right[$
- una soluzione per $k \in \left[0; \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right]$

specificando che se $k = 1 - \sqrt{2}$ le due soluzioni sono coincidenti.

1.3 Esempio 3

$$\begin{cases} 3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 3m \\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Se si pone $\cos x = X$, $\sin x = Y$, si trasforma l'equazione nel sistema:

$$\begin{cases} 3Y + \sqrt{3}X = 3m \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

che vede l'intersezione fra il fascio $3Y + \sqrt{3}X = 3m$ e la parte di circonferenza goniometrica per $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, consistente nel primo quadrante

Il fascio è ovviamente improprio, visto che i coefficienti delle variabili (in tal caso X e Y) sono costanti e non dipendono da k. Il fascio è costituito da infinite rette parallele ad una generatrice che si ottiene ponendo il termine noto pari a zero nell'equazione del fascio stesso. Nel nostro caso la generatrice è:

$$3Y + \sqrt{3}X = 0 \Rightarrow Y = -\frac{\sqrt{3}}{3}X$$

Dobbiamo ora trovare l'intersezione fra queste rette e l'arco $\widehat{AB}$ di circonferenza goniometrica che sottende un angolo di $\dfrac{\pi}{2}$. Gli estremi dell'arco sono i punti $A(1,0)$ e $B(0;1)$.

Come si vede dalla figura, ogni retta del fascio può intersecare l'arco in questione una volta oppure due. Avremo tre posizioni limite: passaggio per B (r_B), passaggio per A (r_A) e tangente t.

- Se la retta è intermedia fra r_A ed r_B si ha una sola intersezione
- Se la retta è intermedia fra r_B ed t si hanno due intersezioni
- Se la retta è al di fuori di questi intervalli non interseca mai l'arco in questione

Vediamo ora fra quali valori del parametro (capisaldi) si ha tale intersezione. Le posizioni limite, al di fuori delle quali la retta non interseca $\widehat{AB}$ sono dunque due:

- Passaggio per $A(1;0)$: $3 \cdot 0 + \sqrt{3} \cdot 1 = 3m \Rightarrow m_A = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- Passaggio per $B(0;1)$: $3 \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 0 = 3m \Rightarrow m_B = 1$
- Condizione di tangenza. Usiamo in tal caso il metodo della distanza, imponendo che la retta $3Y + \sqrt{3}X - 3m = 0$ sia distante $r = 1$ dal centro della circonferenza $O(0,0)$. Si ha, ricordando la formula della distanza punto-retta:

  $$1 = \frac{|\sqrt{3} \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 3m|}{\sqrt{3+9}} \Rightarrow |-3m| = \sqrt{12}$$

  Elevando al quadrato, si ha:

  $$9m^2 = 12 \Rightarrow m = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

  Dobbiamo ora capire quale valore di m fa al caso nostro, perchè la formula ci ha dato le due tangenti. In corrispondenza ai due valori si ottengono le due tangenti:

  $$3Y + \sqrt{3}X \pm 3 \cdot 2\sqrt{3}/3 = 0 \Rightarrow t_1 : 3Y + \sqrt{3}X - 2\sqrt{3} = 0, \quad t_2 : 3Y + \sqrt{3}X + 2\sqrt{3} = 0$$

  Se le disegnamo, ci accorgiamo che la prima interseca l'arco nel settore in interesse, quindi possiamo concludere che $m_T = 2\sqrt{3}/3$

Per concludere, allora, diremo che il nostro sistema ammette:

- una soluzione per $m \in \left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}; 1\right[$
- due soluzioni per $m \in \left[1; \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

specificando che se $m = 2\sqrt{3}/3$ le due soluzioni sono coincidenti.

2 Fascio proprio e circonferenza

Rientrano in tale sezione le equazioni LINEARI in seno e coseno, a cui sono associati dei fasci propri, quindi equazioni del tipo

$$a(k)\sin x + b(k)\cos x + c(k) = 0$$

ove i coefficienti a, b e c sono dipendenti dal parametro k (o lo è almeno uno tra a e b).

Il segreto è sempre trasformare tale equazione in quella di un fascio, in questo caso proprio, di rette (cioè rette tutte incidenti in un punto P detto centro del fascio), mediante la posizione:

$$\cos x = X, \quad \sin x = Y$$

da completare con la relazione fondamentale

$$X^2 + Y^2 = 1$$

che è quella della circonferenza goniometrica, di cui dovremo considerare i sottoinsiemi denotati dalla disequazione che compare nel nostro sistema.

2.1 Esempio 1

$$\begin{cases} k\sin x + \cos x - 2 + k & = & 0 \\ 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Se si pone $\cos x = X$, $\sin x = Y$, si trasforma l'equazione nel sistema:

$$\begin{cases} kY + X - 2 + k & = & 0 \\ X^2 + Y^2 & = & 1 \\ 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

che vede l'intersezione fra il fascio $kY + X - 2 + k = 0$ e la parte di circonferenza goniometrica nel primo e nel secondo quadrante.

Il fascio è ovviamente proprio, visto che almeno un coefficiente delle variabili (in tal caso Y) dipende da k. Cerchiamo di capire come è fatto il fascio, determinando prima il centro P.

A tale scopo, scriviamo l'equazione fattorizzando k:

$$k(Y + 1) + X - 2 = 0$$

evidenziando così le due generatrici (vedi teoria), che sono:

$$g_1 : Y + 1 = 0, \quad g_2 : X - 2 = 0$$

Il loro punto di intersezione è il centro del fascio, per cui, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} Y + 1 & = & 0 \\ X - 2 & = & 0 \end{cases}$$

Si vede subito che $P(2; -1)$. Il nostro fascio è pertanto costituito da tutte le rette passanti per P (ad eccezione, come noto, della retta verticale $X = 2$).

Dobbiamo ora trovare l'intersezione fra queste rette e l'arco $\widehat{AB}$ di circonferenza goniometrica che sottende un angolo di π. Gli estremi dell'arco sono i punti $A(1, 0)$ e $B(-1; 0)$.

Come si vede dalla figura, ogni retta del fascio può intersecare l'arco in questione una volta oppure due. Avremo tre posizioni limite: passaggio per B (r_B), passaggio per A (r_A) e tangente t.

- Se la retta è intermedia fra r_B ed r_A si ha una sola intersezione
- Se la retta è intermedia fra r_A ed t si hanno due intersezioni
- Se la retta è al di fuori di questi intervalli non interseca mai l'arco in questione

Vediamo ora fra quali valori del parametro (capisaldi) si ha tale intersezione. Le posizioni limite, al di fuori delle quali la retta non interseca $\widehat{AB}$ sono dunque due:

- Passaggio per $A(1, 0)$: $k \cdot 0 + 1 - 2 + k = 0 \Rightarrow k_A = 1$
- Passaggio per $B(-1; 0)$: $k \cdot 0 - 1 - 2 + k = 0 \Rightarrow k_B = 3$
- Condizione di tangenza. Usiamo in tal caso il metodo della distanza, imponendo che la retta $X + kY - k + 2 = 0$ sia distante $r = 1$ dal centro della circonferenza $O(0, 0)$. Si ha, ricordando la formula della distanza punto-retta:

  $$1 = \frac{|1 \cdot 0 + k \cdot 0 - k + 2|}{\sqrt{1 + k^2}} \Rightarrow |-k + 2| = \sqrt{1 + k^2}$$

  Elevando al quadrato, si ha:

  $$k^2 - 4k + 4 = 1 + k^2 \Rightarrow 3 - 4k = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

  Quindi possiamo concludere che $k_T = \dfrac{3}{4}$

Per concludere, allora, diremo che il nostro sistema ammette:

- una soluzione per $k \in]1; 3]$
- due soluzioni per $k \in \left[\frac{3}{4}; 1\right]$

specificando che se $m = \dfrac{3}{4}$ le due soluzioni sono coincidenti.

2.2 Esempio 2 - caso particolare

$$\begin{cases} (1-k)\sin x + \cos x + 1 & = & 0 \\ 0 < x \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Se si pone $\cos x = X$, $\sin x = Y$, si trasforma l'equazione nel sistema:

$$\begin{cases} (1-k)Y + X + 1 & = & 0 \\ X^2 + Y^2 & = & 1 \\ 0 < x \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

che vede l'intersezione fra il fascio $(1-k)Y + X + 1 = 0$ e la parte di circonferenza goniometrica per $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, ossia il primo quadrante

Il fascio è ovviamente proprio, visto che almeno un coefficiente delle variabili (in tal caso Y) dipende da k. Cerchiamo di capire come è fatto il fascio, determinando prima il centro P.

A tale scopo, scriviamo l'equazione fattorizzando k:

$$Y - kY + X + 1 = 0$$

evidenziando così le due generatrici (vedi teoria), che sono:

$$g_1 : X + Y + 1 = 0, \quad g_2 : -Y = 0$$

Il loro punto di intersezione è il centro del fascio, per cui, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} X + Y + 1 & = & 0 \\ -Y & = & 0 \end{cases}$$

Si vede subito che $P(-1;0)$. Il nostro fascio è pertanto costituito da tutte le rette passanti per P (ad eccezione, come noto, della retta verticale $X = -1$).

Dobbiamo ora trovare l'intersezione fra queste rette e l'arco $\widehat{AB}$ di circonferenza goniometrica che sottende un angolo di $\frac{\pi}{2}$. Gli estremi dell'arco sono i punti $A(1,0)$ e $B(0;1)$.

Come si vede dalla figura, ogni retta del fascio può intersecare l'arco in questione una volta sola, se la retta è compresa tra le posizioni r_A e r_B, con ovvio significato dei simboli.

Vediamo ora fra quali valori del parametro (capisaldi) si ha tale intersezione. Le posizioni limite, al di fuori delle quali la retta non interseca $\widehat{AB}$ sono dunque due:

- Passaggio per $A(1,0)$: $(1-k) \cdot 0 + 1 + 1 = 0$, che genererebbe un'equazione impossibile. Dobbiamo allora ragionare in un altra maniera. Troviamo la cosiddetta equazione esplicita del fascio:

$$Y = \frac{X}{1-k} - \frac{1}{1-k}$$

  Osserviamo che se la retta deve passare per A, deve essere orizzontale e quindi il suo coefficiente angolare deve valere zero. Affinchè accada ciò è necessario che $\frac{1}{1-k} \to 0 \Rightarrow 1-k \to \infty$, ossia $k \to \infty$. Per vedere se esso ha segno positivo o negativo è necessario studiare prima il secondo caposaldo.

- Passaggio per $B(0;1)$: $(1-k) \cdot 1 + 0 + 1 = 0 \Rightarrow k_B = 2$

Se $k = 2$ allora la retta passa per B. Per effettuare il passaggio per A osserviamo che è necessario aumentare il valore di k, per cui $k_A > k_B$ e quindi il segno di k_A è positivo: in altre parole si ha il passaggio per A per $k \to +\infty$.

Per concludere, allora, diremo che il nostro sistema ammette una sola soluzione nell'intervallo $[2;+\infty[$

2.3 Esempio 3 - caso particolare

$$\begin{cases} \sin x + k \cos x & = & k - 1 \\ 0 < x \leq \dfrac{2}{3}\pi \end{cases}$$

Se si pone $\cos x = X$, $\sin x = Y$, si trasforma l'equazione nel sistema:

$$\begin{cases} Y + kX & = & k-1 \\ X^2 + Y^2 & = & 1 \\ 0 < x \leq \dfrac{2}{3}\pi \end{cases}$$

che vede l'intersezione fra il fascio $Y+kX = k-1$ e la parte di circonferenza goniometrica per $0 < x \leq \dfrac{2}{3}\pi$. Il fascio è ovviamente proprio, visto che almeno un coefficiente delle variabili (in tal caso X) dipende da k. Cerchiamo di capire come è fatto il fascio, determinando prima il centro P.

A tale scopo, scriviamo l'equazione fattorizzando k:

$$Y + kX + 1 - k = 0 \Rightarrow Y + 1 + k(X-1) = 0$$

evidenziando così le due generatrici (vedi teoria), che sono:

$$g_1 : Y + 1 = 0, \quad g_2 : X - 1 = 0$$

Il loro punto di intersezione è il centro del fascio, per cui, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} Y + 1 & = & 0 \\ X - 1 & = & 0 \end{cases}$$

Si vede subito che $P(1; -1)$. Il nostro fascio è pertanto costituito da tutte le rette passanti per P (ad eccezione, come noto, della retta verticale $X = 1$).

Dobbiamo ora trovare l'intersezione fra queste rette e l'arco $\widehat{AB}$ di circonferenza goniometrica che sottende un angolo di $\dfrac{2\pi}{3}$. Gli estremi dell'arco sono i punti $A(1, 0)$ e $B(-1/2; \sqrt{3}/2)$.

Come si vede dalla figura, ogni retta del fascio può intersecare l'arco in questione una volta sola, se la retta è compresa tra le posizioni r_A e r_B, con ovvio significato dei simboli.

Vediamo ora fra quali valori del parametro (capisaldi) si ha tale intersezione. Le posizioni limite, al di fuori delle quali la retta non interseca $\widehat{AB}$ sono dunque due:

- Passaggio per $A(1, 0)$: $0 + k \cdot 1 = k - 1$, che genererebbe un'equazione impossibile. Dobbiamo allora ragionare in un altra maniera. Troviamo la cosiddetta equazione esplicita del fascio:

  $$Y = -kX + k - 1$$

  Osserviamo che se la retta deve passare per A, deve essere verticale e quindi il suo coefficiente angolare deve essere infinito. Per vedere se esso ha segno positivo o negativo è necessario studiare prima il secondo caposaldo.

- Passaggio per $B(-1/2; \sqrt{3}/2)$: $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}k = k - 1 \Rightarrow k_B = \dfrac{\sqrt{3}+2}{3}$

Se $k = 2$ allora la retta passa per B. Per effettuare il passaggio per A osserviamo che è necessario aumentare il valore di k, per cui $k_A > k_B$ e quindi il segno di k_A è positivo: in altre parole si ha il passaggio per A per $k \to +\infty$.

Per concludere, allora, diremo che il nostro sistema ammette una sola soluzione nell'intervallo $\left[\dfrac{\sqrt{3}+2}{3}; +\infty\right[$

3 Equazioni quadratiche

Rientrano in tale sezione le equazioni QUADRATICHE in una sola funzione, in dipendenza da un parametro. Esempio:

$$\cos^2 x - k \cos x + 2k + 1 = 0$$

Il segreto è sempre trasformare tale equazione in quella di un fascio di rette (proprio o improprio), da accoppiare con l'equazione della parabola-base $y = x^2$, mediante la posizione, in questo caso:

$$\cos x = t, \quad t^2 = y$$

L'equazione diviene:

$$t^2 - kt + 2k + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y & = & t^2 \\ y - kt + 2k + 1 & = & 0 \end{cases}$$

Come si vede, qui siamo interessati ad intersecare un fascio di rette con la parabola $y = t^2$, o con un arco di essa, in funzione delle limitazioni che compaiono.

Gli esempi successivi chiariranno meglio questa procedura

3.1 esempio 1

$$\begin{cases} \sin^2 x + (2k-1)\sin x - 3k &= 0 \\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Se si pone $\sin x = t$, $y = t^2$, si trasforma l'equazione nel sistema:

$$\begin{cases} y + (2k-1)t - 3k &= 0 \\ y &= t^2 \end{cases}$$

Il sistema va completato trasformando la limitazione $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ applicando la funzione seno ai tre membri:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin 0 < \sin x < \sin \pi/2 \Rightarrow 0 < t < 1$$

Dovremo allora risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y + (2k-1)t - 3k &= 0 \\ y &= t^2 \\ 0 < t < 1 \end{cases}$$

che vede l'intersezione fra il fascio $y + (2k-1)t - 3k = 0$ e l'arco di parabola $y = t^2$ compreso tra i punti $O(0,0)$ e $A(1,1)$, variando la variabile t tra gli estremi $t = 0$ e $t = 1$ (e quindi la y tra i valori $y = 0^2 = 0$ e $y = 1^2 = 1$). Il fascio è ovviamente proprio, visto che almeno un coefficiente delle variabili (in tal caso X) dipende da k. Cerchiamo di capire come è fatto il fascio, determinando prima il centro P.

A tale scopo, scriviamo l'equazione fattorizzando k:

$$y + (2k-1)t - 3k = 0 \Rightarrow k(2t-3) + y - t = 0$$

evidenziando così le due generatrici (vedi teoria), che sono:

$$g_1 : 2t - 3 = 0, \quad g_2 : y - t = 0$$

Il loro punto di intersezione è il centro del fascio, per cui, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 2t - 3 &= 0 \\ y - t &= 0 \end{cases}$$

Si vede subito che $P(3/2; 3/2)$. Il nostro fascio è pertanto costituito da tutte le rette passanti per P (ad eccezione, come noto, della retta verticale $t = 3/2$).

Dobbiamo ora trovare l'intersezione fra queste rette e l'arco $\widehat{OA}$ di parabola. Gli estremi dell'arco sono i punti $O(0,0)$ e $A(1;1)$.

Come si vede dalla figura, ogni retta del fascio interseca l'arco di parabola in questione due volte, se la retta è compresa tra le posizioni $r_A = r_O$ e r_t, con ovvio significato dei simboli.

Vediamo ora fra quali valori del parametro (capisaldi) si ha tale intersezione. Avremo due posizioni limite: passaggio per O e anche per A, visto che i due punti sono allineati con P ($r_O = r_A$),tangente r_t.

- Passaggio per $O(0,0)$ e per A: $0 + (2k-1) \cdot 0 - 3k = 0 \Rightarrow k_O = 0$
- Condizione di tangenza. Possiamo usare solamente il metodo del delta. Mettendo a sistema il fascio con la parabola, dobbiamo imporre che sia nullo il discriminante dell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} y + (2k-1)t - 3k &= 0 \\ y &= t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y &= -(2k-1)t + 3k \\ -(2k-1)t + 3k &= t^2 \end{cases} \Rightarrow t^2 + t(2k-1) - 3k = 0$$

  Ponendo uguale a zero il discriminante dell'ultima equazione, si ha:

$$(2k-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3k) = 0 \Rightarrow 4k^2 + 8k + 1 = 0$$

  Quest' ultima equazione ci dà come soluzioni:

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{2}$$

  In corrispondenza delle quali si troveranno due tangenti.

  Se le disegnamo, ci accorgiamo che quella interseca l'arco nel settore in interesse si ha per $k = \dfrac{-2+\sqrt{3}}{2}$, quindi possiamo concludere che $k_T = \dfrac{-2+\sqrt{3}}{2}$

Per concludere, allora, diremo che il nostro sistema ammette sempre due soluzioni per $k \in \left[\frac{-2+\sqrt{3}}{2}, 0\right]$

3.2 Esempio 2

$$\begin{cases} (2+k)\sin^2 x + (1-k)\sin x \cos x + k\cos^2 x & = & 0 \\ -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione quadratica (parametrica) omogenea in seno e coseno, per cui, dividendo ambo i membri per il fattore $\cos^2 x$ (trasformando anche le limitazioni, prendendo la tangente di tutti i membri della disequazione), si ha:

$$\begin{cases} (2+k)\tan^2 x + (1-k)\tan x + k & = & 0 \\ \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) < \tan x < \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Se poi si pone $\tan x = t$, il sistema da risolvere sarà:

$$\begin{cases} (2+k)t^2 + (1-k)t + k & = & 0 \\ -1 < t < 1 \end{cases}$$

che come si vede è quadratico in t.
Se si pone $y = t^2$, il sistema da risolvere diviene:

$$\begin{cases} (2+k)y + (1-k)t + k & = & 0 \\ y & = & t^2 \\ -1 < t < 1 \end{cases}$$

Esso vede l'intersezione fra il fascio $(2+k)y + (1+k)t + k = 0$ e l'arco di parabola $y = t^2$ compreso tra i punti $A(-1,1)$ e $B(1,1)$, variando la variabile t tra gli estremi $t = -1$ e $t = 1$ (e quindi la y tra i valori $y = (-1)^2 = 1$ e $y = 1^2 = 1$).

Il fascio è ovviamente proprio, visto entrambi i coefficienti delle variabili dipendono da k. Cerchiamo di capire come è fatto il fascio, determinando prima il centro P.

A tale scopo, scriviamo l'equazione fattorizzando k:

$$2y + ky + t + kt + k = 0 \Rightarrow k(t+y+1) + 2y + t = 0$$

evidenziando così le due generatrici (vedi teoria), che sono:

$$g_1 : y + t + 1 = 0, \quad g_2 : 2y + t = 0$$

Il loro punto di intersezione è il centro del fascio, per cui, risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y + t + 1 & = & 0 \\ 2y + t & = & 0 \end{cases}$$

Si vede subito che $P(-2;1)$. Il nostro fascio è pertanto costituito da tutte le rette passanti per P (ad eccezione, come noto, della retta verticale $t = -2$).

Dobbiamo ora trovare l'intersezione fra queste rette e l'arco $\widehat{AB}$ di parabola. Gli estremi dell'arco sono i punti $A(-1;1)$ e $B(1;1)$.

Come si vede dalla figura, ogni retta del fascio interseca l'arco di parabola in questione due volte, se la retta è compresa tra le posizioni $r_A = r_B$ e r_T, con ovvio significato dei simboli.

Vediamo ora fra quali valori del parametro (capisaldi) si ha tale intersezione. Avremo due posizioni limite: passaggio per A e anche per B, visto che i due punti sono allineati con P ($r_A = r_B$),tangente r_T.

- Passaggio per $A(-1,1)$ e per B: $(2+k)\cdot 1 + (1+k)\cdot(-1) + k = 0 \Rightarrow k_A = -1$
- Condizione di tangenza. Possiamo usare solamente il metodo del delta. Mettendo a sistema il fascio con la parabola, dobbiamo imporre che sia nullo il discriminante dell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} (2+k)y + (1+k)t + k & = & 0 \\ y & = & t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y & = & t^2 \\ (2+k)t^2 + (1+k)t + k & = & 0 \end{cases} \Rightarrow t^2(2+k) + t(1+k) + k = 0$$

Ponendo uguale a zero il discriminante dell'ultima equazione, si ha:

$$(1+k)^2 - 4 \cdot (2+k) \cdot k = 0 \Rightarrow 3k^2 + 6k - 1 = 0$$

Quest' ultima equazione ci dà come soluzioni:

$$k_{1,2} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

In corrispondenza delle quali si troveranno due tangenti.

Se le disegnamo, ci accorgiamo che quella interseca l'arco nel settore in interesse si ha per $k = \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$, quindi possiamo concludere che $k_T = \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$

Per concludere, allora, diremo che il nostro sistema ammette sempre due soluzioni per $k \in \left[-1; \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}\right]$