TRIGONOMETRIA

`Equazioni goniometriche`

Le equazioni goniometriche (che presentano l'incognita come variabile di una funzione goniometrica) più importanti sono:

- ELEMENTARI: $\sin x = m$, $\cos x = n$ (con $|m|, |n| \leq 1$) e $\tan x = l$
- QUADRATICHE in una sola funzione: es. $\cos^2 x - \cos x = 0$
- LINEARI in seno e coseno: $\sin x + \cos x = 1$
- QUADRATICHE in seno e coseno, suddivise queste, in omogenee (come $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$) e non omogenee (come $\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 2$).
- SIMMETRICHE in seno e coseno: es. $\sin x + \cos x + 2\sin x \cos x = 0$

1 Equazioni elementari

Le equazioni elementari vanno prima ridotte a forma normale, in modo da avere UNA SOLA funzione a primo membro ed un numero reale a secondo membro.

I metodi risolutivi presuppongono

a) la sicura conoscenza delle definizioni di funzioni goniometriche elementari: si consiglia sempre di disegnare un grafico della circonferenza goniometrica, costruendo gli angoli (*soluzioni-base*) che soddisfano alla relazione data.

b) la sicura conoscenza dei valori delle funzioni goniometriche elementari per archi notevoli

c) un conveniente studio della periodicità. Ricordare che un'equazione elementare, quando non è impossibile, ammette sempre infinite soluzioni periodiche, che si ottengono addizionando alle *soluzioni-base* la periodicità $2k\pi$ per seno e coseno e $k\pi$ per la tangente.

ES. *Risolvere l'equazione* $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Si inizia disegnando la circonferenza goniometrica e costruendo TUTTI gli angoli aventi seno pari a $\frac{\sqrt{2}}{2}$: se il seno è l'ordinata del punto di intersezione del secondo lato dell'angolo, basterà *salire* (perchè il secondo membro è positivo) sull'asse y di $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e *spostarsi lateralmente* fino ad incontrare la circonferenza nei due punti B_1 e B_2. Basta poi congiungere detti punti con l'origine per formare i due angoli-base che sono soluzione, ossia x_1 e x_2. Notare che x_1 è nel primo quadrante e x_2 nel secondo.

x_1 è presto trovato: si sa che il seno vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$ per $x = \pi/4$. Per trovare x_2 si nota che è $x_2 = \pi - x_1$ e con le formule relative agli archi associati si trova dunque che $x_2 = \pi - \pi/4 = 3/4\pi$. Le soluzioni sono pertanto:

$$x = \pi/4 + 2k\pi, \quad x = 3/4\pi + 2k\pi$$

Stessa cosa per le equazioni elementari in coseno (qui bisognerà spostarsi LATERALMENTE, o a destra o a sinistra sull'asse x della quantità pari al termine noto e poi salire/scendere per incontrare la circonferenza goniometrica) e per quelle in tangente, dove si dovrà invece salire o scendere sulla tangente geometrica (secondo la definizione di tangente). Attenzione: per le equazioni in tangente, una volta trovata una soluzione, basta semplicemente aggiungere la periodicità $k\pi$ per determinare le altre soluzioni, inclusa l'eventuale altra che si è disegnata sul grafico (vedi esempi)

ESERCIZI: risolvere le seguenti equazioni goniometriche

a) $2\sin x + 3 = 2(1 + 2\sin x)$

Effettuando la riduzione a forma normale si ha:

$$2\sin x - 4\sin x = 2 - 3 \Rightarrow -2\sin x = -1 \Rightarrow 2\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

Gli angoli che hanno il seno pari a $1/2$ sono $\pi/6$ e quello relativo nel secondo quadrante, ossia $\pi - \pi/6 = 5/6\pi$. Dunque, le soluzioni saranno

$$x = \pi/6 + 2k\pi, \quad x = 5/6\pi + 2k\pi$$

b) $3 - 2\cos x = 2(1 - 2\cos x)$

Riducendo, si ha: $-2\cos x + 4\cos x = -3 + 2 \Rightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2}$

Ora, si osserva che il coseno vale $-1/2$ per $x = \pm\dfrac{2}{3}\pi$. Sarebbe buona norma usare solo archi positivi, per cui, visto che $-\dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{4}{3}\pi$, possiamo dire che le soluzioni sono:

$$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$$

c) $2 - \sqrt{2}\sin x = 2\sqrt{2}\sin x + 5$

Riducendo:

$$-\sqrt{2}\sin x - 2\sqrt{2}\sin x = 5 - 2 \Rightarrow -3\sqrt{2}\sin x = 3 \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

La soluzione è allora $x = \dfrac{5}{4}\pi$, $x = \dfrac{7}{4}\pi$.

d) $2(\tan x - 1) + 3 = \tan x + 1 + \sqrt{3}$

Riducendo:

$$2\tan x - 2 + 3 = \tan x + 1 + \sqrt{3} \Rightarrow 2\tan x - \tan x = 2 - 3 + 1 + \sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \sqrt{3}$$

che ha per soluzione $x = \pi/3 + k\pi$.

e) $2(\tan x + 1) + 3(1 - \tan x) = -2(\tan x - 1) + 4$

Riducendo:

$$2\tan x + 2 + 3 - 3\tan x = -2\tan x + 2 + 4 \Rightarrow 2\tan x - 3\tan x + 2\tan x = -2 - 3 + 2 + 4 \Rightarrow \tan x = 1$$

Che ha per soluzione $x = \pi/4 + k\pi$

1.1 Equazioni elementari del primo tipo

Una altra categoria di equazioni elementari è quella che comprende equazioni lineari in una sola funzione che presentano ad argomento una funzione di x, per esempio:

$$2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Queste si riducono in forma elementare operando una conveniente sostituzione, nel caso sopra $t = 2x - \pi/4$.

In tal modo, l'equazione diviene:

$$2\sin t = 1 \Rightarrow \sin t = 1/2 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad t_2 = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

$$\Rightarrow 2x_1 - \pi/4 = \pi/6 + 2k\pi \Rightarrow x_1 = \frac{5}{24}\pi + k\pi, \quad 2x_2 - \pi/4 = 5/6\pi + 2k\pi \Rightarrow x_2 = \frac{13}{24}\pi + k\pi$$

Si noti che nel caso delle equazioni in tangente del tipo $\tan f(x) = t$, se si opera la sostituzione $f(x) = t$, è necessario porre le condizioni di esistenza:

$$t \neq \pi/2 + k\pi$$

ESEMPIO: *Risolvere* $\tan\left(x - \dfrac{2}{3}\pi\right) = 1$

Per quanto detto, si pone: $t = x - \frac{2}{3}\pi$. Essendo una equazione in tangente, poniamo delle C.E:

$$t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Risolvendo, si ha che $\tan t = 1$. La soluzione dà, come noto, $t = \frac{\pi}{4} + k\pi$, quindi essa è perfettamente accettabile!

Ricordiamo che $t = x - 2/3\pi$, quindi $x - 2/3\pi = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Questa equazione ci dà la soluzione finale, che è:

$$x = 2/3\pi + \pi/4 + k\pi = \frac{11}{12}\pi + k\pi$$

1.2 Equazioni elementari del secondo tipo

Rientrano in tale categoria tutte le equazioni del tipo:

- $\sin f(x) = \sin g(x)$, uguaglianza di seni;
- $\cos f(x) = \cos g(x)$, uguaglianza di coseni;
- $\tan f(x) = \tan g(x)$, uguaglianza di tangenti

ove $f(x)$ e $g(x)$ sono due espressioni arbitrarie di x. Ricordando quando due angoli hanno lo stesso seno, coseno e tangente, si ha:

- $\sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \vee f(x) = \pi - g(x)$
- $\cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \vee f(x) = -g(x)$
- $\tan f(x) = \tan g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \vee f(x) = \pi + g(x)$

Per l'ultima condizione, si pongano sempre le condizioni di esistenza:$f(x) \neq \pi/2 + k\pi$ e $g(x) \neq \pi/2 + k\pi$.
ESEMPI:

1. $\sin(2x - \pi/6) = \sin(x + \pi/3)$

   Osserviamo che $f(x) = 2x - \pi/6$, $g(x) = x + \pi/3$. Ricordando quanto detto in precedenza, le soluzioni si ottengono dalle seguenti relazioni:

   $$2x - \pi/6 = x + \pi/3 \Rightarrow x = \pi/2 + 2k\pi, \quad 2x - \pi/6 = \pi - (x + \pi/3)$$

   $$\Rightarrow 3x = 5/6\pi + 2k\pi \Rightarrow x = 5/18\pi + 2/3k\pi$$

2. $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

   Osserviamo che $f(x) = 2x$, $g(x) = x - \pi/4$. Ricordando quanto detto in precedenza, le soluzioni si ottengono dalle seguenti relazioni:

   $$2x = x - \pi/4 \Rightarrow x = -\pi/4 + 2k\pi, \quad 2x = -(x - \pi/4)$$

   $$\Rightarrow 3x = \pi/4 + 2k\pi \Rightarrow x = \pi/12 + 2/3k\pi$$

3. $\tan(2x + \pi/3) = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

   Osserviamo che $f(x) = 2x + \pi/3$, $g(x) = x - \pi/4$. Ricordando quanto detto in precedenza, le soluzioni si ottengono dalle seguenti relazioni:

   $$2x + \pi/3 = x - \pi/4 \Rightarrow x = -7/12\pi + k\pi, \quad 2x + \pi/3 = x - \pi/4 + \pi$$

   $$\Rightarrow x = -\pi/3 - \pi/4 + k\pi \Rightarrow x = -19\pi/12 + k\pi$$

   Bisognerebbe anche controllare che $2x + \pi/4 \neq \pi/2 + k\pi$ e $x - \pi/4 \neq \pi/2 + k\pi$...

2 Equazioni quadratiche

Si parla di equazioni quadratiche in una sola incognita. Il segreto è il metodo della sostituzione, ponendo $\sin x$, $\cos x$ oppure $\tan x$ pari a t e generando quindi un'equazione di secondo grado che va risolta coi metodi consueti[1]. In base al numero di soluzioni in t si avranno quindi una o due equazioni elementari (vedi § precedenti).

ES. *Risolvere l'equazione* $2\cos^2 x - \cos x = 0$

Si inizia ponendo, in questo caso, $\cos x = t$, generando l'equazione di secondo grado:

$$2t^2 - t = 0$$

Essa è spuria ed ammette le due soluzioni $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{2}$. In corrispondenza della prima si ha l'equazione elementare in coseno:

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2 + k\pi$$

La seconda soluzione genera a sua volta l'equazione elementare in coseno:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\pi/3 + 2k\pi$$

ESERCIZI: Risolvere le seguenti equazioni quadratiche in una sola funzione

a) $2\cos^2 x - 1 = 0$

b) $2\sin^2 x - \sin x = 0$

c) $\sqrt{3}\tan x - \tan^2 x = 0$

d) $4\sin^2 x - 8\sin x - 5 = 0$
Ponendo $\sin x = t$, si ha:

$$4t^2 - 8t - 5 = 0 \Rightarrow t_1 = -1/2, \quad t_2 = 5/2$$

Scartando l'evenienza che sia $\sin x = 5/2 > 1$, resta da risolvere:

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \quad x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$$

e) $2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$

3 Equazioni lineari in seno e coseno

Si presentano sotto la forma $a\cos x + b\sin x + c = 0$ (se $c = 0$ prendono il nome di *lineari omogenee*) e si possono risolvere con diversi metodi.

1. METODO DELLA DIVISIONE (vale solo se $c = 0$)

   In tale metodo, che è valido solo nel caso omogeneo, si opera una divisione di ogni addendo per il termine $\cos x$, generando un'equazione elementare in tangente. E' però necessario accertarsi prima di effettuare la divisione, che il valore $x = \pi/2 + k\pi$ non sia soluzione. Questo meccanismo, che sarà charito nel § successivo, si attua sostituendo il valore $x = pi/2$ nell'equazione di partenza e vedendo se viene realizzata l'uguaglianza. In caso negativo, si procede con la risoluzione, ma in caso affermativo, è necessario, prima di effettuare la divisione, includere la soluzione $x = \pi/2 + k\pi$.

   ESEMPIO:

   $$\sin x + \cos x = 0$$

   Si tratta di un'equazione lineare omogenea. Allo scopo di attuare il metodo della divisione, verifichiamo inizialmente se $x = \pi/2$ è soluzione:

   $$\sin\pi/2 + \cos\pi/2 = 1 \neq 0$$

[1] E' indispensabile che lo studente conosca con estrema sicurezza i metodi di risoluzione delle equazioni di secondo grado

Quindi, la verifica è negativa e possiamo continuare con la divisione. Riscriviamo l'equazione come:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \tan x + 1 = 0$$

Quest'ultima equazione (elementare in tangente) ha per soluzione $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$, che è anche la soluzione dell'equazione di partenza.

2. METODO RAZIONALE

   Si usa indifferentemente per il caso omogeneo o non. Consiste nel trasformare la nostra equazione in un'equazione di tipo algebrico fratta, facendo uso delle formule parametriche razionali, col cambio di variabili:

$$t = \tan x/2 \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

   ESEMPIO:

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x - 2 = 0$$

   Si ponga: $t = \tan x/2$. Usando le formule parametriche si ha:

$$\sqrt{3} \cdot \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 2 = 0$$

   Con facili passaggi, l'equazione risulta essere:

$$2\sqrt{3}t + 1 - t^2 - 2 - 2t^2 = 0 \Rightarrow 3t^2 - 2\sqrt{3}t + 1 = 0$$

   Tale equazione ammette per soluzione: $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$, in corrispondenza del quale si ha:

$$\tan(x/2) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x/2 = \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

   N.B: Il metodo delle formule parametriche razionali potrebbe essere difficoltoso allorquando si presentino equazioni lineari in cui compaiano, fra i coefficienti, numeri riconducibili a $\sqrt{2}$, in quanto potrebbe presentarsi le funzioni dell'angolo di $\pi/8$ che in genere sono difficili da ricordare!

3. METODO GRAFICO. Consiste nel cambiare le variabili nell'equazione ponendo:

$$\cos x = X, \quad \sin x = Y$$

   ed accoppiando l'equazione risultante con quella della circonferenza goniometrica $X^2 + Y^2 = 1$. Si risolve quindi il sistema risultante

$$\begin{cases} aX + bY + c & = & 0 \\ X^2 + Y^2 & = & 1 \end{cases}$$

   nelle incognite X e Y: di fatto, equivale ad intersecare una retta corrispondente alla prima equazione con una circonferenza. Tale valenza geometrica permette di risolvere il problema anche con l'aiuto della geometria analitica (sarebbe buona norma sempre rappresentare retta e circonferenza sul piano cartesiano e studiare graficamente le loro intersezioni).

   Le eventuali coppie-soluzione, generano a loro volta una coppia di equazioni elementari, che risolte danno la soluzione relativa alla x di partenza (ricordarsi di aggiungere la periodicità $2k\pi$).

ES. *Risolvere la seguente equazione:* $\cos x - \sin x = 1$

Iniziamo a porre la usuale sostituzione $\cos x = X, \quad \sin x = Y$, cosicchè l'equazione diviene $X - Y = 1$, da accoppiare con l'equazione della circonferenza goniometrica $X^2 + Y^2 = 1$. Nel nostro caso, dunque, il sistema da risolvere diviene:

$$\begin{cases} X - Y & = & 1 \\ X^2 + Y^2 & = & 1 \end{cases}$$

La soluzione (si può usare il metodo della sostituzione) è costituita dalle due coppie

$$(X = 1; Y = 0), \quad (X = 0; Y = -1)$$

Visualizzando questi punto sulla circonferenza goniometrica e congiungendoli con l'origine otteniamo subito i due angoli - base che sono soluzione. E' facile accorgersi che $x_1 = 0$ e $x_2 = 3/2\pi$, difatti $\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0$ e $\cos 3/2\pi = 0, \quad \sin 3/2\pi = -1$. Le soluzioni dell'equazione di partenza sono allora:

$$x = 2k\pi, \quad x = 3/2\pi + 2k\pi$$

ESERCIZI: Risolvere le seguenti equazioni lineari

a) $\sin x + \cos x = 1$

b) $\sin x - \cos x = 1$

c) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$

d) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{3}$

Col metodo delle formule razionali:

$$\sqrt{3} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3}t^2 + 2t = \sqrt{3} + \sqrt{3}t^2 \Rightarrow \sqrt{3}t^2 - t = 0$$

Ciò implica che $t = 0 \vee t = 1/\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ricordando che è $t = \tan x/2$, abbiamo:

$$\tan x/2 = 0 \Rightarrow x/2 = k\pi \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$\tan x/2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x/2 = \pi/6 + k\pi \Rightarrow x = \pi/3 + 2k\pi$$

e) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

4 Equazioni quadratiche in seno e coseno

Sono equazioni che si presentano sotto la forma generale:

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x + d = 0$$

In particolare:

- Se $d = 0$ si dicono OMOGENEE
- se $d \neq 0$ si dicono NON OMOGENEE

La risoluzione deve iniziare rendendo omogenee le equazioni che eventualmente non lo fossero (se $d = 0$ si può già partire con il metodo risolutivo). Per fare questo basta moltiplicare il termine d per l'identità fondamentale $\sin^2 x + \cos^2 x$: di fatto, si ottiene un'equazione equivalente perchè è come se lo si moltiplicasse per 1. In tal modo si sommano i termini simili, pervenendo alla forma omogenea. Quindi si seguono i seguenti passi:

1. controllare se $x = \pi/2$ è soluzione dell'equazione (basta sostituire il valore $x = \pi/2$ nell'equazione). In caso affermativo, scrivere subito che una soluzione è $x = \pi/2 + k\pi$, in caso negativo, saltare al punto seguente (e non fermarsi scrivendo solo tale soluzione!!!)

2. dividere TUTTI i termini per $\cos^2 x$ ed ottenere dunque un'equazione quadratica in tangente (sfruttare le identità fondamentali!)

3. risolvere l'equazione aggiungendo la periodicità $k\pi$

ES. *Risolvere l'equazione* $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin\cos x = 0$

Osserviamo che è quadratica in seno e coseno ed è già omogenea. Sostituendo $x = \pi/2$ abbiamo:

$$\sin^2 \pi/2 - \sqrt{3}\sin\pi/2\cos\pi/2 \neq 0$$

dunque $x = 90$ non è soluzione. Dividiamo tutti gli addendi per $\cos^2 x$:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sqrt{3}\frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow \tan^2 x - \sqrt{3}\tan x = 0$$

Abbiamo ottenuto un'equazione quadratica in tangente: sostituendo $\tan x = t$ si ha $t^2 - \sqrt{3}t = 0$ che è risolta ovviamente da $t_1 = 0$ e $t_2 = \sqrt{3}$, in corrispondenza dei quali valori di t si ha:

$$x = k\pi, \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

ES. *Risolvere l'equazione* $2\sin x\cos x + 1 = 0$

Osserviamo che è quadratica in seno e coseno e non è omogenea. Per renderla omogenea moltiplichiamo il termine noto 1 per $\sin^2 x + \cos^2 x$, ottenendo:

$$2\sin x\cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$$

equazione che ora è omogenea.

Sostituendo $x = \pi/2$ abbiamo:

$$2\sin\pi/2\cos\pi/2 + \sin^2 \pi/2 + \cos^2 \pi/2 \neq 0$$

dunque $x = \pi/2$ non è soluzione. Dividiamo tutti gli addendi per $\cos^2 x$:

$$2\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow 2\tan x + \tan^2 x + 1 = 0$$

Abbiamo ottenuto un'equazione quadratica in tangente: sostituendo $\tan x = t$ si ha $t^2 + 2t + 1 = 0$ che è risolta ovviamente da $t = -1$ in corrispondenza del quale valore di t si ha:

$$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$$

ESERCIZI: Risolvere le seguenti equazioni:

a) $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x = 0$

b) $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x = 0$

c) $2\sin x\cos x + \cos^2 + \sin^2 x = 0$

d) $\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$

e) $2\sin^2 + 3\sin x\cos x = 2 + \cos^2 x$

f) $\sin^2 x - \cos^2 + 2\sin x\cos x = 1$

g) $7\sin^2 x - 5\sin x\cos x = 2 - 2\cos^2 x$

L'equazione diviene: $7\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 - 2 = 0$, che non è omogenea. Moltiplichiamo per l'identità fondamentale, avendo:

$$7\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$\Rightarrow 7\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow 5\sin^2 x - 5\sin x\cos x = 0$$

Questa equazione omogenea si può fattorizzare oppure risolvere con la divisione per $\cos^2 x$, dopo aver notato che $\frac{\pi}{2}$ non è soluzione. Dividendo, si ha:

$$\tan^2 x - \tan x = 0 \Rightarrow \tan x = 0 \vee \tan x = 1$$

Ciò implica $x = k\pi \vee x = \pi/4 + k\pi$.

5 Equazioni simmetriche in seno e coseno

Si tratta di equazioni che possono essere trasformate in equazioni equivalenti dal semplice scambio di $\sin x$ con $\cos x$. La loro forma base è:

$$a(\sin x \cdot \cos x) + b(\sin x + \cos x) + c = 0$$

con c numero reale.

La tecnica risolutiva-base consiste nell'operare il cambio di variabili:

$$y = x + \pi/4 \Rightarrow x = y - \pi/4$$

Con le formule di sottrazione si genera un'equazione di solito quadratica in seno.

ESEMPIO:

Risolvere $4 \sin x \cos x + \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 0$

Se si pone: $x = y - \pi/4$, l'equazione si trasforma come segue:

$$4 \sin(y - \pi/4) \cos(y - \pi/4) + \sqrt{2}(\sin(y - \pi/4) + \cos(y - \pi/4)) = 0$$

Usando le formule di sottrazione:

$$4(\sin y \cos \pi/4 - \cos y \sin \pi/4)(\cos y \cos \pi/4 + \sin y \sin \pi/4)+$$

$$+\sqrt{2}(\sin y \cos \pi/4 - \cos y \sin \pi/4 + \cos y \cos \pi/4 + \sin y \sin \pi/4) = 0$$

Ricordando i valori del seno e del coseno di $\pi/4$, si ha subito:

$$4\left(\frac{1}{2}\sin^2 y - \frac{1}{2}\cos^2 y\right) + \sqrt{2}(\sqrt{2}\sin y) = 0 \Rightarrow 2\sin^2 y - 2\cos^2 y + 2\sin y = 0$$

Se ora è $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$, allora l'equazione diventa quadratica in seno:

$$2\sin^2 y + \sin y - 1 = 0$$

Tale equazione porge le due soluzioni:

$$\sin y = -1, \quad \sin y = 1/2$$

La prima è risolta per $y = 3/2\pi + 2k\pi$, mentre la seconda da $y = \pi/6 + 2k\pi$ oppure da $y = 5/6\pi + 2k\pi$. Se ricordiamo la sostituzione iniziale, $y = x + \pi/4$, si ha:

$$x + \pi/4 = 3/2\pi + 2k\pi \Rightarrow x = 5/4\pi + 2k\pi$$

$$x + \pi/4 = \pi/6 + 2k\pi \Rightarrow x = -\pi/12 + 2k\pi$$

$$x + \pi/4 = 5/6\pi + 2k\pi \Rightarrow x = 7/12\pi + 2k\pi$$
