TRIGONOMETRIA

`formule goniometriche, parte 2`

SAPER FARE:

1. `Conoscendo le funzioni dell'angolo` x`, trovare il valore delle funzioni goniometriche dell'angolo somma/differenza tra` x `ed un qualsiasi angolo` y`, dell'angolo doppio` $2x$ `e dell'angolo` $x/2$
2. `semplificare espressioni contenenti formule goniometriche`
3. `Verificare identità contenenti formule goniometriche`

Siano dati due angoli x e y. Valgono le seguenti formule:

FORMULE DI ADDIZIONE:

a) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

b) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

c) $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$

FORMULE DI SOTTRAZIONE:

a) $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

b) $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

c) $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$

Sia dato un angolo x. Valgono le seguenti formule:

FORMULE DI DUPLICAZIONE:

a) $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

c) $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

FORMULE DI BISEZIONE:

a) $\sin x/2 = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$

b) $\cos x/2 = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

c) $\tan x/2 = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$

Il segno $\pm$ dipende, come al solito, dai quadranti di appartenenza.

1 Calcolo di funzioni

ES. *Dati due angoli x e y del primo quadrante di cui si conosce* $\cos x = \dfrac{1}{5}$ *e* $\sin y = \dfrac{2}{3}$*, calcolare il valore di* $\cos(x+y)$ *e di* $\sin(x+y)$

Per risolvere questi esercizi, è sempre necessario determinare le altre funzioni degli angoli, cioè, nel nostro caso, $\sin x$ e $\cos y$. Si ha:

$$\sin x = +\sqrt{1 - 1/25} = \frac{\sqrt{24}}{5}, \quad \cos y = +\sqrt{1 - 4/9} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

A questo punto possiamo applicare le due formule di addizione:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} - \frac{\sqrt{24}}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5} - 2\sqrt{24}}{15}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y = \frac{\sqrt{24}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot - \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{24 \cdot 5} - 2}{15}$$

Es. *Usando le formule goniometriche, sapendo che* $\sin \alpha = 2/3$, *con* α *nel primo quadrante, calcola:*

1. $\cos 2\alpha$
2. $\sin(\alpha + 30)$
3. $\tan(45 - \alpha)$
4. $\sin \alpha/2$

Preventivamente, ci procuriamo il valore di $\cos\alpha$ e di $\tan\alpha$: $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-4/9} = \sqrt{5}/3$, $\tan\alpha = \dfrac{2/3}{\sqrt{5}/3} = 2/\sqrt{5} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

1. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 5/9 - 4/9 = \dfrac{1}{9}$
2. $\sin(\alpha+30) = \sin\alpha\cos 30 + \cos\alpha \sin 30 = \sin\alpha\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \cos\alpha \cdot \dfrac{1}{2} = 2/3 \cdot \sqrt{3}/2 + \sqrt{5}/3 \cdot 1/2 = \dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{6}$
3. $\tan(45-\alpha) = \dfrac{\tan 45 - \tan\alpha}{1 + \tan 45 \tan\alpha} = \dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} = ...$
4. $\sin\alpha/2 = +\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}} = ...$

ES.Usando le formule goniometriche, sapendo che $\cos\alpha = -1/3$, *con* α *nel secondo quadrante, calcola:*

1. $\sin 2\alpha$
2. $\sin(\alpha - 60)$
3. $\tan(45 + \alpha)$
4. $\cos\alpha/2$

Preventivamente, ci procuriamo il valore di $\sin\alpha$ e di $\tan\alpha$: $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-1/9} = \sqrt{8}/3 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}/3}{-1/3} = -2\sqrt{2}$

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2(-1/3)\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) = ...$
2. $\sin(\alpha-60) = \sin\alpha\cos 60 - \cos\alpha\sin 60 = \sin\alpha\dfrac{1}{2} - \cos\alpha \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{2}/3 \cdot 1/2 - \sqrt{3}/2 \cdot (-1/3) = \dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$
3. $\tan(45+\alpha) = \dfrac{\tan 45 + \tan\alpha}{1 - \tan 45 \tan\alpha} = \dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = ...$
4. $\sin\alpha/2 = +\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} = ...$

2 Espressioni

ES. Semplifica il più possibile le seguenti espressioni:

1. $\sin(x+150) - \cos(x-60)$

$$= \sin x \cos 150 + \cos x \sin 150 - (\cos x \cos 60 + \sin x \sin 60) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x - \left(\cos x \frac{1}{2} + \sin x \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x - \cos x \frac{1}{2} - \sin x \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} = -\sqrt{3}\sin x$$

2. $\sin(240 - x) + \cos(x - 330)$

$$= \sin 240 \cos x - \cos 240 \sin x + \cos x \cos 330 + \sin x \sin 330 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \left(-\frac{1}{2}\sin x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = 0$$

3. $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x} - \tan x$

$$= \frac{2\sin x \cos x}{1 + 2\cos^2 - 1} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2\cos^2} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

Si noti che per la duplicazione del coseno è stata usata la formula $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ per la presenza dell'addendo $+1$, così da semplificarlo. La nostra uguaglianza continua con:

$$\frac{2\sin x \cos x}{2\cos^2} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

4. $\tan(x/2) \cdot 2\cos^2(x/2) \cdot \csc x$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x} \cdot 2\frac{1+\cos x}{2} \cdot \frac{1}{\sin x} = 1$$

5. $\sin(7/4\pi + x) + \cos(3/4\pi - x)$

$$= \sin(7/4\pi)\cos x + \cos(7/4\pi)\sin x + \cos(3/4\pi)\cos x + \sin(3/4\pi)\sin x =$$

$$= \sin(2\pi - \pi/4)\cos x + \cos(2\pi - \pi/4)\sin x + \cos(\pi - \pi/4)\cos x + \sin(\pi - \pi/4)\sin x$$

$$= -\sin(\pi/4)\cos x + \cos(\pi/4)\sin x - \cos(\pi/4)\cos x + \sin(\pi/4)\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$$

$$= \sqrt{2}(\sin x - \cos x)$$

6. $\sin^2(x + \pi/6) + \cos x \cos(x - 4/3\pi) - \sin^2 x$

$$= (\sin x \cos \pi/6 + \cos x \sin \pi/6)^2 + \cos x[\cos(4/3\pi)\cos x + \sin x \sin(4/3\pi)] - \sin^2 x$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right)^2 + \cos x \cdot (\cos(\pi + \pi/3)\cos x + \sin x \sin(\pi + \pi/3)) - \sin^2 x$$

$$= \frac{3}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x + \cos x(-\cos(\pi/3)\cos x - \sin x \sin(\pi/3)) - \sin^2 x$$

$$= \frac{3}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x - \frac{1}{2}\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \cos x - \sin^2 x = -\frac{1}{4}\sin^2 x - \frac{1}{4}\cos^2 x = -\frac{1}{4}$$

7. $\dfrac{\cos(x + \pi/4)}{\sin(x - \pi/4)} + \cos^2(\pi/2 - x)$

$$= \frac{\cos x \cos \pi/4 - \sin x \sin \pi/4}{\sin x \cos \pi/4 - \cos x \sin \pi/4} + \sin^2 x = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x} - \sin^2 x = \frac{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x} + \sin^2 x$$

$$= -1 + \sin^2 x = -(1 - \sin^2 x) = -\cos^2 x$$

8. $(\cos x+\sin x)^2-\sin 2x+\cos 2x$

$$=\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x-2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1=1+2\cos^2 x-1=2\cos^2 x$$

9. $\cos(2x+\pi/3)-\sin(2x+\pi/6)$

$$=\cos 2x\cos\pi/3-\sin 2x\sin\pi/3-(\sin 2x\cos\pi/6+\cos 2x\sin\pi/6)$$

$$=\cos 2x\frac{1}{2}-2\sin x\cos x\frac{\sqrt{3}}{2}-2\sin x\cos x\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos 2x\frac{1}{2}=-2\sqrt{3}\sin x\cos x$$

10. $\cot 2x-\dfrac{1}{\sin 2x}$

$$=\frac{1-\tan^2 x}{2\tan x}-\frac{1}{2\sin x\cos x}=\frac{1-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{2\dfrac{\sin x}{\cos x}}-\frac{1}{2\sin x\cos x}$$

$$=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x}{2\sin x}-\frac{1}{2\sin x\cos x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sin x\cos x}-\frac{1}{2\sin x\cos x}=$$

$$=\frac{1-2\sin^2 x-1}{2\sin x\cos x}=\frac{-2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

3 Identità goniometriche

Un'identità goniometrica è una uguaglianza tra due espressioni contenenti funzioni goniometriche di un certo angolo α, verificata per ogni qualsiasi valore attribuito all'angolo.

Ad esempio:

$$\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha+1=4\sin^2\alpha-2$$

perchè, se $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ allora

$$\sin^2\alpha-3(1-\sin^2\alpha)+1=\sin^2\alpha-3+3\sin^2\alpha+1=4\sin^2\alpha-2$$

Per verificare un'identità, si possono adottare le seguenti tecniche, tenendo ben presenti le identità fondamentali e le formule goniometriche:

- si lavora per esempio solo sul primo membro, fino a trasformarlo nel secondo o viceversa;
- si lavora in parallelo sui due membri fino a renderli uguali;
- si porta tutto a primo membro, dimostrando che l'intera espressione è uguale a zero, usando le proprietà delle equazioni

L'esperienza e l'attenzione possono indirizzare verso la strada giusta!

Verificare le seguenti identità goniometriche:

1. $\sin(x-y)+\sin(x+y)=2\tan x\cot y\cos x\sin y$

$$\sin x\cos y-\cos x\sin y+\sin x\cos y+\cos x\sin y=2\frac{\sin x}{\cos x}\frac{\cos y}{\sin y}\cdot\cos x\sin y$$

$$2\sin x\cos y=2\sin x\cos y$$

2. $\cot(x-\pi/4)(\sin x-\cos x)+\cos(\pi-x)=\sin x$

$$\Rightarrow\frac{1+\tan x\tan\pi/4}{\tan x-\tan\pi/4}(\sin x-\cos x)-\cos x=\sin x$$

$$\Rightarrow\frac{1+\tan x}{\tan x-1}(\sin x-\cos x)-\cos x=\sin x$$

$$\Rightarrow\frac{1+\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{\sin x}{\cos x}-1}(\sin x-\cos x)-\cos x=\sin x$$

$$\Rightarrow\frac{\cos x+\sin x}{\sin x-\cos x}(\sin x-\cos x)-\cos x=\sin x$$

$$\Rightarrow\cos x+\sin x-\cos x=\sin x\Rightarrow\sin x=\sin x$$

3. $\tan x + \cot x = 2\csc 2x$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2}{\sin 2x} \Rightarrow \frac{\sin x^2 + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{2\sin x \cos x}$$

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

4. $\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x \cos x$

$$\Rightarrow \sin(2x + x) + \sin x = 2 \cdot 2\sin x \cos x \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x + \sin x = 4\sin x \cos^2 x$$

$$\Rightarrow 2\sin x \cos^2 x + (2\cos^2 x - 1)\sin x + \sin x = 4\sin x \cos x$$

$$\Rightarrow 2\sin x \cos^2 x + 2\sin x \cos^2 x - \sin x + \sin x = 4\sin x \cos x \Rightarrow 4\sin x \cos^2 x = 4\sin x \cos^2 x$$

5. $\sin x \cos 2x - \cos x \sin 2x = \cos(\pi/2 + x)$

$$\Rightarrow \sin x(2\cos^2 x - 1) - 2\sin x \cos^2 x = -\sin x$$

$$\Rightarrow 2\sin x \cos^2 s - \sin x - 2\sin x \cos^2 = -\sin x \Rightarrow -\sin x = -\sin x$$

6. $\sec 2x + \tan 2x = \tan(x + \pi/4)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos 2x} + \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{\tan x + \tan \pi/4}{1 - \tan x \tan \pi/4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \frac{2\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x - \sin^2}{\cos^2 x}} = \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} + \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 2\sin x \cos x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} - \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 2\sin x \cos x - (\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 0 \Rightarrow \frac{1 + 2\sin x \cos x - (\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 2\sin x \cos x - 1 - 2\sin x \cos x = 0$$