TRIGONOMETRIA

Goniometria, parte 1

1 Funzioni goniometriche elementari

SAPER FARE:

1. `dato il valore di una funzione goniometrica e conoscendo il quadrante di appartenenza di un angolo, determinare il valore delle altre tre funzioni.`
2. `semplificare espressioni contenenti le relazioni fondamentali della goniometria e verificare identità goniometriche, servendosi di dette relazioni`
3. `calcolare il valore di espressioni contenenti funzioni goniometriche di angoli notevoli`

Dato un angolo orientato x (per semplicità misurato in gradi), si danno per note le DEFINIZIONI di $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, come anche i valori notevoli di tali funzioni (angoli notevoli $= 0$, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$, π, $3/2\pi$, 2π), riassunti nella tabella seguente:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3/2\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non esiste	0	non esiste	0
$\cot x$	non esiste	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	non esiste	0	non esiste

Di vitale importanza è ricordare anche l'andamento delle funzioni elementari relativamente al segno, come riassunto nella tabella seguente:

	I	II	III	IV
	$0 < x < 90$	$90 < x < 180$	$180 < x < 270$	$270 < x < 360$
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\tan x$	+	-	+	-
$\cot x$	+	-	+	-

Fra queste funzioni vi sono delle RELAZIONI FONDAMENTALI (facilmente dimostrabili):

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (il teorema di Pitagora!)
2. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
3. $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$
4. $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
5. $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

Tali relazioni ci permettono, conoscendo il valore di UNA QUALSIASI funzione, di determinare le altre tre, conoscendo anche il quadrante di appartenenza dell'angolo.

Se è noto per esempio il seno di un angolo, dalla prima relazione possiamo facilmente determinare il coseno, perchè:

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

Il segno verrà deciso a seconda del quadrante di appartenenza.

Se è noto per esempio il coseno di un angolo, dalla prima relazione possiamo facilmente determinare il seno, perchè:

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$$

Il segno verrà deciso a seconda del quadrante di appartenenza.

Es. *Dato* $0 < x < 90$ *e sapendo che* $\sin x = 0.37$*, determinare* $\cos x$*,* $\tan x$*,* $\cot x$*.*

Dalla relazione $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$, scegliendo il segno positivo, visto che l'angolo x è nel primo quadrante (e quindi il suo coseno è positivo), abbiamo:

$$\cos x = +\sqrt{1-0.37^2} \simeq 0.93$$

Ricordando ora che:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0.37}{0.93} \simeq 0.40$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{0.4} \simeq 2.5$$

1.1 Trovare seno e coseno

1. Dato $0 < x < 90$ e sapendo che $\cos x = \frac{1}{5}$, determinare $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$.

   Nel primo quadrante, il seno è positivo, quindi:

   $$\sin x = \sqrt{1-(1/5)^2} = \sqrt{24/25} = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \quad \tan x = \sin x/\cos x = \frac{2\sqrt{6}/5}{1/5} = 2\sqrt{6}, \quad \cot x = 1/2\sqrt{6}$$

2. Dato $90 < x < 180$ e sapendo che $\cos x = -\frac{3}{4}$, determinare $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$.

   Nel secondo quadrante il seno è positivo, quindi:

   $$\sin x = \sqrt{1-(-3/4)^2} = \sqrt{7/16} = \frac{\sqrt{7}}{4}, \quad \tan x = \sin x/\cos x = -\frac{\sqrt{7}/4}{3/4} = -\sqrt{7}/3, \quad \cot x = -3/\sqrt{7}$$

3. Dato $180 < x < 270$ e sapendo che $\sin x = \frac{2}{3}$, determinare $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

   Nel terzo quadrante il coseno è negativo, quindi:

   $$\cos x = -\sqrt{1-(2/3)^2} = -\sqrt{5/9} = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \tan x = \sin x/\cos x = \frac{-2/3}{-\sqrt{5}/3} = 2/\sqrt{5}, \quad \cot x = \sqrt{5}/2$$

4. Dato $270 < x < 360$ e sapendo che $\sin x = -\frac{2}{7}$, determinare $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$. Nel quarto quadrante il coseno è positivo, quindi:

   $$\cos x = \sqrt{1-(-2/7)^2} = \sqrt{45/49} = \frac{3\sqrt{5}}{7}, \quad \tan x = \sin x/\cos x = \frac{-2/7}{3\sqrt{5}/7} = -2/3\sqrt{5}, \quad \cot x = -3\sqrt{5}/2$$

5. Sapendo che $\tan x = \sqrt{2}$, con $0 < x < 90$, determinare $\sin x$.

   Sapendo che $\tan x = \sin x/\cos x$ e che nel primo quadrante il coseno è positivo, possiamo scrivere anche che $\tan x = \sin x/\sqrt{1-\sin^2 x} \Rightarrow \tan^2 x = \sin^2 x/1-\sin^2 x \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = \sin^2 x/1-\sin^2 \Rightarrow 2 = \sin^2 x/1-\sin^2 x$. A questo punto si avrà che, facendo denominatore comune:

   $$2-2\sin^2 x = \sin^2 x \Rightarrow 2 = 2\sin^2 + \sin^2 x \Rightarrow 3\sin^2 x = 2 \Rightarrow \sin x = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

   dove per la radice si è scelto il segno positivo, perchè il seno nel primo quadrante è positivo.

1.2 Semplificare espressioni

In questi esercizi viene richiesto di semplificare espressioni numeriche e non usando le relazioni fondamentali e i valori per gli archi notevoli.

1. Semplificare la seguente espressione:

$$(\cot x - \cos x) \cdot \tan x$$

Ricordando che $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ e che $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, si ha:

$$\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x\right) \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \left(\frac{\cos x - \sin x \cos x}{\sin x}\right) \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \left(\frac{\cos x(1-\sin x)}{\sin x}\right) \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 1 - \sin x$$

2. Semplificare la seguente espressione:

$$(\sin x + \cos x)^2 - 1$$

Elevando al quadrato, si ha $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x - 1$, ma ricordando che $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, allora avremo:

$$1 + 2\sin x \cos x - 1 = 2\sin x \cos x$$

3. Semplificare la seguente espressione:

$$(\tan x + \cot x) \cdot \sin x$$

Si ha:

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right) \cdot \sin x = \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}\right) \cdot \sin x = \frac{1}{\sin x \cos x} \cdot \sin x = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

4. Semplificare la seguente espressione:

$$\cos^2 x \cdot \tan^2 x + \sin^2 x \cdot \cot^2 x$$

si ha, facilmente che:

$$\cos^2 x \cdot \frac{\sin^2}{\cos^2 x} + \sin^2 x \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

5. Semplificare la seguente espressione:

$$(1 + \tan^2 x) \cdot (1 - \sin^2 x)$$

Si ha:

$$\left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) \cdot \cos^2 x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x = 1$$

6. Calcolare il valore della seguente espressione:

$$\sqrt{3}\cos 30 - \sin 45 - \sqrt{3}\sec 60 + \cos 60 \cdot \csc 45 - 8\sin^2 30$$

Ricordando i valori in tabella, si ha:

$$\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}\frac{1}{1/2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} - 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{8}{4} = -\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}$$

7. Semplificare la seguente espressione:

$$4 \cdot \cos 0 - 2\sec(\pi/4) + 2\csc(\pi/4) - 4\sin(\pi/4) + \cot(\pi/2)$$

Si ha:

$$4 \cdot 1 - 2\frac{1}{\sqrt{2}/2} + 2\frac{1}{\sqrt{2}/2} - 4 \cdot \sqrt{2}/2 + 0 = 4 - 2\sqrt{2}$$

8. Semplificare la seguente espressione

$$\cot(\pi/2) - 3\sec(\pi/6) + \csc(\pi/6)\sec(\pi/6) - 8\cot(\pi/6)\cos(\pi/3)$$

Si ha:

$$0 - 3\frac{1}{\sqrt{3}/2} + \frac{1}{1/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}/2} - 8\sqrt{3}\cdot 1/2 =$$

$$-3\frac{1}{\sqrt{3}/2} + 2\frac{1}{\sqrt{3}/2} - 4\sqrt{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}} - 4\sqrt{3} = -2\frac{\sqrt{3}}{3} - 4\sqrt{3} = -14\sqrt{3}/3$$

2 Archi associati

SAPER FARE:

1. `Dato il valore di un angolo nel 2, 3 o 4 quadrante, trovare il valore delle sue funzioni goniometriche, riferendolo ad un conveniente angolo del primo`
2. `semplificare espressioni contenenti funzioni di archi associati o verificare identità`

Dato x, angolo orientato, si dicono archi associati quelli che si ottengono addizionando o sottraendo ad/da x gli angoli notevoli 90, 180, 360. Si hanno quindi le seguenti formule:

a) Angoli opposti (IV Q): $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, $\tan(-x) = -\tan x$

b) angoli esplementari: $\sin(2\pi - x) = -\sin x$, $\cos(2\pi - x) = \cos x$, $\tan(2\pi - x) = -\tan x$

c) Angoli complementari: $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$, $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$, $\tan(\pi/2 - x) = \cot x$

d) Angoli supplementari (II Q): $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\tan(\pi - x) = -\tan x$

e) Angoli differenti di $\pi/2$: $\sin(\pi/2 + x) = \cos x$, $\cos(\pi/2 + x) = -\sin x$, $\tan(\pi/2 + x) = -\cot x$

f) Angoli differenti di π (III Q): $\sin(\pi + x) = -\sin x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\tan(\pi + x) = \tan x$

ES. *Calcolare il valore del seno dell'angolo* $x = \frac{3}{4}\pi$

Osservando che $\frac{3}{4}\pi = \pi - \pi/4$, possiamo usare la formula relativa al coseno di angoli supplementari, ove $x = \pi/4$: se $\cos(\pi - x) = -\cos x$, allora $\cos(\pi - \pi/4) = -\cos\pi/4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ES. *Calcolare il valore della seguente espressione:*

$$4\left(\sin\frac{5}{6}\pi\cos\frac{3}{4}\pi + \cos\frac{4}{3}\pi\sin\frac{3}{4}\pi\right)\sin\pi/4$$

Osserviamo che: $\frac{5}{6}\pi = \pi - \pi/6$, $\frac{3}{4}\pi = \pi - \pi/4$, $\frac{4}{3}\pi = \pi + \pi/3$. Usando le appropriate relazioni degli angoli associati, abbiamo:

$$4(\sin(\pi-\pi/6)\cos(\pi-\pi/4)+\cos(\pi+\pi/3)\sin(\pi-\pi/4))\sin\pi/4 = 4(\sin\pi/6(-\cos\pi/4)-\cos\pi/3\sin\pi/4)\sin\pi/4 =$$

$$4\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -2$$

ES. *Calcolare il valore della seguente espressione:*

$$\cos(-x) + \cos(360 - x) + \cos(180 - x) - \cos(180 + x)$$

Usando le appropriate relazioni si ha:

$$\cos x + \cos x - \cos x + \cos x = 2\cos x$$

Vediamo altri esempi di esercizi:

1. Semplifica:
$$\sin x \cdot \sin(x+\pi) + \cos(\pi + x) \cdot \cos x + 2$$
Applicando le formule abbiamo:
$$\sin x \cdot (-\sin x) - \cos x \cdot \cos x + 2 = -\sin^2 x - \cos^2 x + 2 = -1 + 2 = 1$$
2. Semplifica
$$2[\sin x \sin(\pi - x) - \cos x \cos(\pi - x)] - 5\cos\pi$$
Applicando le formule abbiamo:
$$2[\sin x \cdot \sin x - \cos x(-\cos x)] - 5(-1) = 2[\sin^2 x + \cos^2 x] + 5 = 2 \cdot 1 + 5 = 7$$
3. Semplificare:
$$\tan(-x) + \tan(\pi - x) + \tan(2\pi - x) - \tan(\pi + x)$$
Applicando le formule abbiamo:
$$-\tan x - \tan x - \tan x + \tan x = -2\tan x$$
4. Calcola il valore di:
$$\sin\frac{5}{4}\pi \cos\frac{4}{3}\pi + \sin\frac{7}{6}\pi \cos\frac{5}{4}\pi$$
Osserviamo che: $\frac{5}{4}\pi = \pi + \pi/4$, $\quad \frac{4}{3}\pi = \pi + \pi/3$, $\quad \frac{7}{6}\pi = \pi + \pi/6$, quindi:
$$\sin(\pi + \pi/4)\cos(\pi + \pi/3) + \sin(\pi + \pi/6)\cos(\pi + \pi/4) = \sin\pi/4(-\cos\pi/3) - \sin(\pi/6)(-\cos\pi/4) =$$
$$-\sqrt{2}/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot \sqrt{2}/2 = 0$$
5. Calcola
$$\cos 135 \cos 315 - 3\cos 300 \sin(-30) + \cos(-330)\sin 135 \cos(-225)$$
Se ovviamente $135 = 180 - 45$, $\quad 315 = 360 - 45$, $\quad 300 = 360 - 60$, $\quad 225 = 180 + 45$, $\quad 330 = 360 - 30$, si avrà:
$$\cos(180-45)\cos(360-45) - 3\cos(360-60)\sin(-30) + \cos(-(360-30))\sin(180-45)\cos(-(180+45))$$
$$-\cos 45 \cos 45 - 3\cos 60(-\sin 30) + \cos 30 \sin 45(-\cos 45) = -\sqrt{2}/2 \cdot \sqrt{2}/2 + 3 \cdot 1/2 \cdot 1/2 - \sqrt{3}/2\sqrt{2}/2\sqrt{2}/2 =$$
$$-1/2 + 3/4 - \sqrt{3}/4 = 1/4 - \sqrt{3}/4$$

3 Identità goniometriche

Un'identità goniometrica è una uguaglianza tra due espressioni contenenti funzioni goniometriche di un certo angolo α, verificata per ogni qualsiasi valore attribuito all'angolo.

Ad esempio:
$$\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha + 1 = 4\sin^2\alpha - 2$$
perchè, se $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ allora
$$\sin^2\alpha - 3(1 - \sin^2\alpha) + 1 = \sin^2\alpha - 3 + 3\sin^2\alpha + 1 = 4\sin^2\alpha - 2$$

Per verificare un'identità, si possono adottare le seguenti tecniche, tenendo ben presenti le identità fondamentali e le formule goniometriche:

- si lavora per esempio solo sul primo membrio, fino a trasformarlo nel secondo o viceversa;
- si lavora in parallelo sui due membri fino a renderli uguali;
- si porta tutto a primo membro, dimostrando che l'intera espressione è uguale a zero, usando le proprietà delle equazioni

L'esperienza e l'attenzione possono indirizzare verso la strada giusta!

Verificare le seguenti identità goniometriche:

1.
$$\text{cotg}^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{2}{\sin^2\alpha} - 1$$

Siano $\text{cotg}^2\alpha + \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ il primo membro e naturalmente $\dfrac{2}{\sin^2\alpha} - 1$ il secondo.

Lavorando sul primo:

$$\text{cotg}^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha} = \frac{1 - \sin^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha} = \frac{2}{\sin^2\alpha} - 1$$

che è esattamente il secondo membro

2.
$$\frac{\tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} + \cos^2\alpha - \text{cotg}^2\alpha = 2 - \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

3.
$$\frac{1}{\sin^2\alpha} + 1 = \frac{2 - \cos^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha}$$

4.
$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\tan\alpha + 1}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}}$$

5.
$$\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + 1 = \frac{\tan\alpha + \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$$

6.
$$\sin^4\alpha + \sin^2\alpha - 2 = \cos^4\alpha - 3\cos^2\alpha$$

7.
$$\sin\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 3\cos(-\alpha) - \sin(\pi + \alpha) = 3(\sin\alpha + \cos\alpha)$$

Applichiamo le formule degli archi associati a primo membro:

$$\sin\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 3\cos(-\alpha) - \sin(\pi + \alpha) = \sin\alpha + \sin\alpha + 3\cos\alpha + \sin\alpha = 3\cos\alpha + 3\sin\alpha$$

che è esattamente il secondo membro

8.
$$\sin x \sin(\pi - x) - \cos x \cos(\pi + x) = 1$$

Applicando le formule degli archi associati a primo membro:

$$\sin x \sin x - \cos x(-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

che è esattamente il secondo membro