QUESITI

con risoluzione

1 LIMITI

N.B. In questa dispensa verranno proposti alcuni possibili quesiti inerenti la definizione di limite, in cui gli studenti sono invitati ad enunciare tale definizione:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

appplicata talvolta a precise dimostrazioni (limiti finiti al finito, finiti all'infinito e infiniti all'infinito). Si consiglia di enunciare le definizioni come segue, utilizzando tre diversi livelli di profondità:

1. Definizione generica, preliminare: se alla x si danno valori sufficientemente vicini a x_0, $f(x)$ assumerà valori infinitamente vicini a l;
2. Definizione con gli intorni: se $x \in I_{x_0}$ allora $f(x) \in I_l$;
3. Definizione precisa con ϵ, δ e M (vedi).

Le risposte tengono conto di questa triplice definizione.

1.1

Scrivi la definizione di limite finito al finito ed applicala per verificare che:

$$\boxed{\lim_{x \to 2}(2x-1) = 3}$$

Sia $f(x)$ una funzione analitica e siano dati due numeri reali x_0 e l.
Si dice che l è il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$, in simboli:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se, dando a x (variabile indipendente della funzione) dei valori sufficientemente vicini a x_0 nel dominio D, i corrispondenti valori di y, ossia della funzione, sono sufficientemente vicini a l nel codominio C.

Per precisare il significato di "sufficientemente vicino" si può dire che per ogni $x \in I_{x_0}$, il corrispondente y deve stare in $I_{f(x)}$, essendo I_{x_0} un intorno di x_0 nel dominio e $I_{f(x)}$ un intorno di $f(x)$ nel codominio.

Alternativamente, si può precisare che la condizione $x \in I_{x_0}$ equivale a scegliere un numero $\epsilon > 0$ e piccolo a piacere, in modo tale che sia $|x - x_0| < \epsilon$ e scegliere di conseguenza un numero $\delta > 0$ piccolo a piacere in modo tale che $|f(x) - l| < \delta$.

La definizione di limite finito al finito, si scrive allora in questo modo.
si ha che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se e solo se, per ogni $\epsilon > 0$, tale che $|x - x_0| < \epsilon$, esiste un $\delta > 0$ tale che $|f(x) - l| < \delta$.

Per verificare il limite dato applicando la definizione sarà sufficiente fissare un $\delta > 0$ tale che $|f(x) - l| < \delta$. Partendo da tale disequazione, bisognerà poi giungere, tramite la risoluzione, a dimostrare che è possibile definire un $\epsilon > 0$ (e dipendente da δ) in modo tale che $|x - x_0| < \epsilon$, ossia concludendo che x si trova in in intorno di x_0.

Nel nostro caso, iniziamo a fissare un δ in modo tale che sia

$$|f(x) - l| < \delta \Rightarrow |2x - 1 - 3| < \delta \Rightarrow |2x - 4| < \delta|$$

Tale ultima disequazione è soddisfatta per:

$$2x - 4 < \delta, \quad 2x - 4 > -\delta$$

Dividendo ora per 2, si ha:

$$x < 2 + \delta/2, \quad x > 2 - \delta/2$$

A patto ora di definire $\epsilon = \delta/2$, la soluzione trovata corrisponde ad un intorno (circolare) di 2 (il cui centro è 2 e il cui raggio è $\delta/2$).

Quindi il limite è verificato ed effettivamente, se alla x si danno valori infinitamente vicini a 2, i corrispondenti valori di $f(x)$ sono infinitamente vicini a 3.

1.2

Scrivi la definizione di limite finito per $x \to +\infty$ ed applicala per verificare che:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{x+3}{x} = 1}$$

Sia $f(x)$ una funzione analitica e sia l un numero reale

Si dice che l è il limite per x che tende a $+\infty$ di $f(x)$, in simboli:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

se, dando a x (variabile indipendente della funzione) dei valori sempre più grandi nel dominio D, i corrispondenti valori di y, ossia della funzione, sono sufficientemente vicini a l nel codominio C.

Dire che "x assume valori sempre più grandi" equivale a fissare un certo $M > 0$ grande quanto si vuole e notare che per ogni scelta si avrà sempre che

$$x > M, \quad \forall M, \forall x \in D$$

Per precisare il significato di "sufficientemente vicino" si può dire che se $x > M$, il corrispondente y deve stare in $I_{f(x)}$, essendo $I_{f(x)}$ un intorno di $f(x)$ nel codominio.

Alternativamente, si può precisare che la condizione $y \in I_{x_0}$ equivale a scegliere un numero $\epsilon > 0$ e piccolo a piacere, in modo tale che sia $|y - l| < \epsilon$, ovvero $|f(x) - l| < \epsilon$ e

La definizione di limite finito all'infinito finito si scrive allora in questo modo.

si ha che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

se e solo se, per ogni $M > 0$, tale che $x > M$, esiste un $\epsilon > 0$ tale che $|f(x) - l| < \epsilon$.

Per verificare il limite dato applicando la definizione sarà sufficiente fissare un $\epsilon > 0$ piccolissimo tale che $|f(x) - l|x < epsilon$. Partendo da tale disequazione, bisognerà poi giungere, tramite la risoluzione, a dimostrare che è possibile definire un $M > 0$ (e dipendente da ϵ) in modo tale che $x > M$, ossia concludendo che x ta effettivamente tendendo all'infinito

Nel nostro caso, iniziamo a fissare un $\epsilon > 0$ in modo tale che sia

$$|f(x) - l| < \epsilon \Rightarrow \left| \frac{x+3}{x} - 1 \right| < \epsilon \Rightarrow$$

Se ora facciamo il denominatore comune entro il modulo, si ha:

$$\left| \frac{x+3}{x} - 1 \right| < \epsilon \Rightarrow \left| \frac{x+3-x}{x} \right| < \epsilon \Rightarrow \left| \frac{3}{x} \right| < \epsilon$$

Tale ultima disequazione è soddisfatta per:

$$\frac{3}{x} < \epsilon, \quad \frac{3}{x} > -\epsilon$$

Ricordando che, date tre quantità positive (non nulle!) A, B, C:

$$\frac{A}{B} < C \Rightarrow \frac{B}{A} > \frac{1}{C}$$

si ha, passando ai reciproci:

$$x/3 > 1/\epsilon, \quad x/3 < -1/\epsilon \Rightarrow x > 3/\epsilon, \quad x < -3/\epsilon$$

Se si ricorda che ϵ è un numero piccolissimo (per fissare le idee $0,0000001$), il suo reciproco $1/\epsilon$ sarà viceversa grandissimo (10.000.000). Se ora, dunque, si definisce $M = 3/\epsilon$ si avrà:

$$x > M, \quad x < -M$$

Scartando la seconda disuguaglianza e concentradosi sulla prima, si appura che effettivamente esiste un $M >$ grandissimo, tale che valda la relazione:

$$x > M$$

Quindi il limite è verificato ed effettivamente, se alla x si danno valori infinitamente grandi, i corrispondenti valori di $f(x)$ sono infinitamente vicini a 1.

1.3

Scrivi la definizione di limite infinito al finito, illustrando anche il concetto di limite destro e di limite sinistro. Porta opportuni esempi di quanto hai definito

Sia dato un numero $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si dice che il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$, è infinito, in simboli:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

se, dando a x (variabile indipendente della funzione) dei valori sufficientemente vicini a x_0 nel dominio D, i corrispondenti valori di y, ossia della funzione, tendono ad essere o estremanente grandi (nel caso in cui f tenda a $+\infty$) o estremanente piccoli (nel caso in cui f tenda a $-\infty$).

In maniera più rigorosa, si ha questa situazione allorquando, per ogni numero $\epsilon > 0$ e piccolissimo tale che $|x - x_0| < \epsilon$ esiste un numero $M > 0$ tale che si abbia $x > M$ (se f tende a $+\infty$) o $x < -M$ (se f tende a $-\infty$).

Molto spesso, almeno per le funzioni con cui usualmente si ha a che fare (specie le razionali fratte), il comportamento di f può essere differente se x si avvicina a x_0 da destra oppure da sinistra. Tale diverso avvicinamento si traduce nell'appartenere ad intorni destri o sinistri, in corrispondenza dei quali f può assumere valori tendendi a $+\infty$ o a $-\infty$. Si può precisare allora la definizione coinvolgendo il concetto di limite destro e limite sinistro.

Si dice che

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

se per ogni numero $\epsilon > 0$ e piccolissimo tale che $x - x_0 < \epsilon$ esiste un numero $M > 0$ tale che si abbia $x > M$ (se f tende a $+\infty$) o $x < -M$ (se f tende a $-\infty$).

Viceversa, si dice che

Si dice che

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

se per ogni numero $\epsilon > 0$ e piccolissimo tale che $x - x_0 > -\epsilon$ esiste un numero $M > 0$ tale che si abbia $x > M$ (se f tende a $+\infty$) o $x < -M$ (se f tende a $-\infty$).

Tali situazioni sono quelle in cui siamo in presenza di asintoti verticali (vedi 1.11). Nei grafici sottostanti (vedi fig.1.3 A e B) sono chiarite queste definizioni da un punto di vista geometrico.

1.4

Scrivi la definizione di limite infinito all'infinito, e serviti di tale definizione per dimostrare che

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} 4x - 3 = +\infty}$$

Data la funzione $f(x)$, Si dice che il limite per x che tende a $\pm\infty$ di $f(x)$, è infinito, in simboli:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

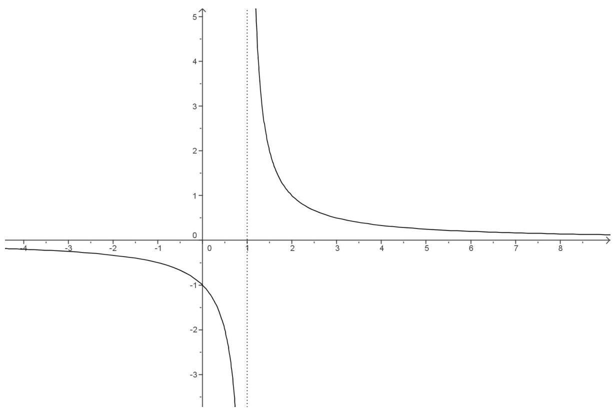

Figura 1: Esempio di punto in cui il limite destro e quello sinistro sono infiniti (asintoto verticale): in particolare in un intorno sinistro del punto $x_0 = 1$ il limite vale $-\infty$ mentre in un intorno destro vale $+\infty$

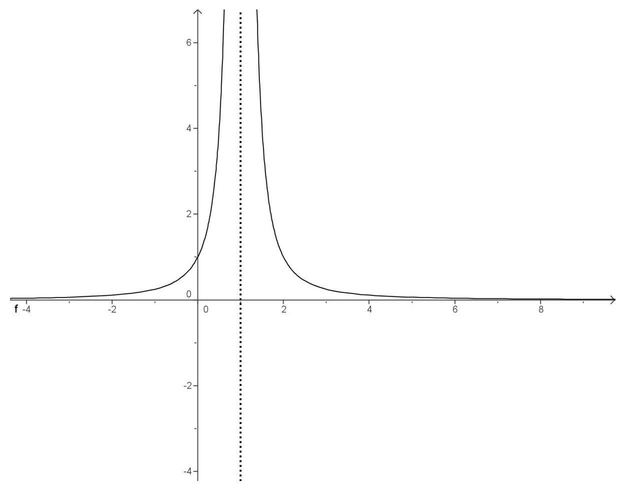

Figura 2: Esempio di punto in cui il limite destro e quello sinistro sono infiniti ed entrambi valgono $+\infty$ (asintoto verticale)

se, dando a x (variabile indipendente della funzione) dei valori sempre più grandi (o sempre più piccoli) nel dominio D, i corrispondenti valori di y, ossia della funzione, tendono ad essere o estremanente grandi (nel caso in cui f tenda a $+\infty$) o estremanente piccoli (nel caso in cui f tenda a $-\infty$).

In maniera più rigorosa, si ha questa situazione allorquando, per ogni numero $M > 0$ grandissimo tale che $x > M$ se $x \to +\infty$ o $x < -M$ se $x \to -\infty$, esiste un numero $N > 0$ tale che si abbia $f(x) > N$ (se f tende a $+\infty$) o $f(x) < -N$ (se f tende a $-\infty$).

Nel nostro caso specifico, per provare il limite richiesto, si parte col fissare un $N > 0$ grandissimo tale che sia

$$4x - 3 > N$$

Risolvendo tale disequazione dobbiamo arrivare a dimostrare che si può in corrispondenza definire un $M > 0$ e grandissimo tale che sia $x > M$.

Procedendo con la risoluzione, si ha che:

$$4x - 3 > N \Rightarrow 4x > 3 + N \Rightarrow x > \frac{3+N}{4}$$

se ora si pone

$$\frac{3+N}{4} = M$$

comunque grandissimo (perchè già N lo è), il limite risulta verificato, in quanto abbiamo effettivamente provato che $x > M$.

1.5

Dai la definizione di funzione continua in un punto x_0 e spiega a cosa serve tale definizione ai fini del calcolo dei limiti

Sia x_0 un numero reale e $f(x)$ una funzione analitica.

Si dice che $f(x)$ è continua in x_0 se vale la seguente relazione:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Detto in altri termini, una funzione è continua in un punto se e solo se i valori dei limiti destri e sinistri coincidono col valore che $f(x)$ assume in quel punto.

La nozione di continuità è collegata con la proprietà geometrica dei grafici delle funzioni di "procedere senza interruzioni" ovvero "senza buchi", caratteristica interessantissima di questi particolari sottoinsiemi di punti totalmente ordinati.

Ai fini del calcolo dei limiti, tale nozione è di capitale importanza, in quanto fornisce una tecnica di calcolo esplicito.

Sapendo a priori che una data $f(x)$ è continua in un punto, è possibile calcolare esplicitamente (e senza dover poi procedere a verifica!) il

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

semplicemente sostituendo il valore x_0 nell'espressione che definisce $f(x)$.

Da precisare inoltre che tutte le funzioni $f(x)$ definite in modo univoco, ossia associate ad un'unica legge di definizione (e non definite "a tratti"). risultano continue nel loro dominio e anche che somme di funzioni continue risultano a loro volta continue.

In tal modo, osservando a titolo di esempio che la funzione $f(x) = 2\cos x + e^x$ risulta continua nell'origine, è facile calcolare:

$$\lim_{x \to x_0} 2\cos x + e^x$$

che sarà:

$$\lim_{x \to x_0} 2\cos x + e^x = f(0) = 2\cos 0 + e^0 = 3$$

1.6

Dai la definizione di punto di discontinuità x_D per una funzione $f(x)$ e precisa con esempi opportuni quanti tipi di discontinuità esistono per le funzioni.

Riferendosi alla definizione in 1.5, una funzione risulta discontinua in un punto x_D se:

- f è definita in x_D, ma i limiti destri e sinistri, pur essendo finiti, sono diversi
- la funzione non è definita in quel punto, ossia $x_D \notin D$;

La prima condizione corrisponde ad una discontinuità detta di prima specie, di cui si dà un esempio geometrico nel grafico sottostante

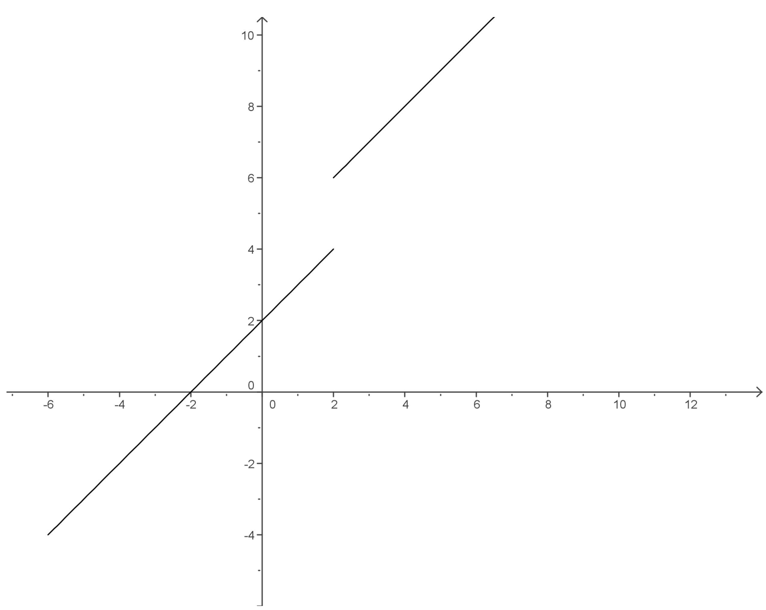

Figura 3: Esempio di funzione con punto di discontinuità di prima specie, ovvero salto: notare che il grafico è composto da due rami che non si saldano

La seconda condizione a sua volta è suddivisa nelle due evenienze:

- La funzione non esiste in x_D, i due limiti destro e sinistro sono entrambi infiniti (anche uguali) [discontinuità di seconda specie]
- la funzione non esiste in X_D, i due limiti destro e sinistro sono uguali ed entrambi finiti [discontinuità di terza specie o eliminabile]

I grafici segenti mostrano due esempi di discontinuità di seconda e terza specie.

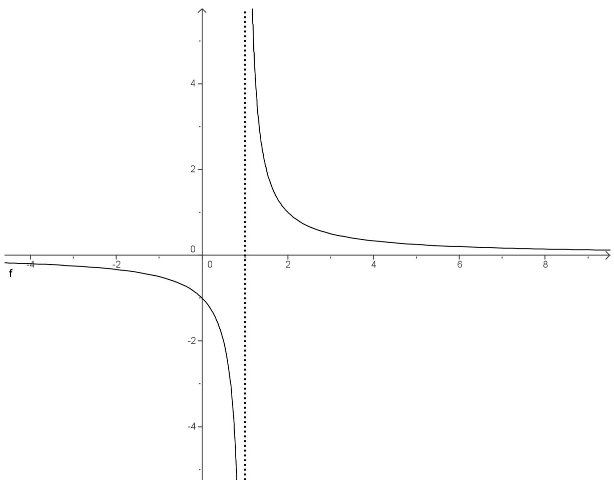

Figura 4: Esempio di funzione con punto di discontinuità di seconda specie, ossia asintoto verticale

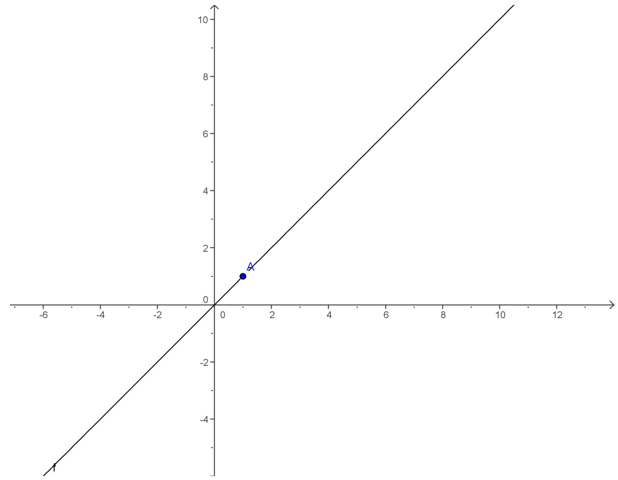

Figura 5: Esempio di punto di discontinuità di terza specie: la funzione sembra saltare il valore contrassegnato con A

1.7

Fornisci alcuni esempi di limiti che si presentano nella forma indeterminata ∞/∞ ed indica una maniera per calcolarli

Spesso nei calcoli di limiti, specie a $\pm\infty$ per funzioni fratte (che si presentano sottoforma di rapporto fra un numeratore ed un denominatore) ci si imbatte nella cosiddetta forma indeterminata ∞/∞. Tale situazione si ha quando si debba calcolare un limite del tipo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{A(x)}{B(x)}$$

Ove x_0 è un qualsiasi valore, anche infinito, essendo :

$$\lim_{x\to x_0} A(x) = \infty, \quad \lim_{x\to x_0} B(x) = \infty$$

Dal momento che il valore di tale limite può cambiare a seconda dell'espressione di A e B, si parlerà di forma indeterminata.

Alcuni esempi possono essere forniti dalle seguenti situazioni, nelle quali si ha a che fare con funzioni razionali fratte (in cui le funzioni A e B sono polinomi):

1. Grado del numeratore superiore al grado del denominatore, es.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-2}{x+1}$$

2. Grado del numeratore uguale al grado del denominatore, es.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-2}{x^2+1}$$

3. Grado del numeratore inferiore al grado del denominatore, es.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-2}{x^2+1}$$

Esistono diverse metodologie per la risoluzione di una forma indeterminata. La più semplice consiste nel raccoglimento a fattore comune della potenza di grado massimo, sia a numeratore che a denominatore, operando una semplificazione. Nei casi in esame:

1.
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2-2/x^2)}{x(1+1/x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(2-2/x^2)}{1+1/x}$$

Passando al limite per $x\to\infty$ si osserva che i termini $2/x^2$ e $1/x$ tendono a zero e quindi il limite dato equivale a:

$$\lim_{x\to\infty}2x=\infty$$

Si può generalmente concludere, allora che per funzioni razionali fratte, nel caso in cui il numeratore ha grado superiore al denominatore, il limite della forma indeterminata ∞/∞ è infinito

2.
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2-2/x^2)}{x^2(1+1/x^2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-2/x^2}{1+1/x^2}$$

Passando al limite per $x\to\infty$ si osserva che i termini $2/x^2$ e $1/x^2$ tendono a zero e quindi il limite dato equivale a:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1}=2$$

Si può generalmente concludere, allora che per funzioni razionali fratte, nel caso in cui il numeratore ha grado pari a quello del denominatore, il limite della forma indeterminata ∞/∞ è finito ed è uguale al rapporto dei coefficienti dei termini di grado massimo.

3.
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-2}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(2-2/x)}{x^2(1+1/x^2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-2/x}{x(1+1/x^2)}$$

Passando al limite per $x\to\infty$ si osserva che i termini $2/x$ e $1/x^2$ tendono a zero e quindi il limite dato equivale a:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$$

Si può generalmente concludere, allora che per funzioni razionali fratte, nel caso in cui il numeratore ha grado inferiore a quello del denominatore, il limite della forma indeterminata ∞/∞ è pari a zero

Un'altra tecnica, spesso meno onerosa per quanto riguarda i calcoli, si basa sull'applicazione dei teoremi di De l'Hopital (vedi dispensa sulle derivate), calcolando il limite del rapporto fra le derivate.

1.8

Fornisci un esempio di limiti che si presentano nella forma indeterminata $0/0$ ed indica una maniera per calcolarli

Spesso nei calcoli di limiti, specie per $x\to x_0$ al finito per funzioni fratte (che si presentano sottoforma di rapporto fra un numeratore ed un denominatore) ci si imbatte nella cosiddetta forma indeterminata $0/0$. Tale situazione si ha quando si debba calcolare un limite del tipo

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}$$

Ove x_0 è un qualsiasi valore, spesso una discontinuità del dominio, essendo :

$$\lim_{x\to x_0}A(x)=0,\quad \lim_{x\to x_0}B(x)=0$$

Dal momento che il valore di tale limite può cambiare a seconda dell'espressione di A e B, si parlerà di forma indeterminata.

Un esempio è fornito dalla seguente situazione, nella quale si ha a che fare con una funzione razionale fratta (in cui le funzioni A e B sono polinomi):

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$$

Se non ci si accorge che $x=1$ è una discontinuità per questa funzione e si prova formalmente a sostituire $x=1$ si può provare che si ha $0/0$.

La tecnica di calcolo per uscire dall'indeterminazione prevede la fattorizzazione sia del numeratore che del denominatore, cosicchè si possano evidenziare due espressioni uguali da semplificare. Notiamo infatti che:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Un'altra tecnica, spesso meno onerosa per quanto riguarda i calcoli, si basa sull'applicazione dei teoremi di De l'Hopital (vedi dispensa sulle derivate).

1.9

Dopo aver chiarito il concetto di limiti notevoli per una funzione, calcola i limiti notevoli per la funzione:

$$y = \frac{2x^2-3}{x-1}$$

Data una funzione $f(x)$ di dominio D si dicono limiti notevoli per f i limiti che possono essere calcolati per valori della variabile x che tende:

- ai punti di frontiera del dominio, ossia agli estremi dell'intervallo che definisce D stesso (estremi che possono anche essere $\pm\infty$);
- ai punti di discontinuità del dominio

Per determinare i limiti notevoli, ed infine calcolarli, si deve sempre preliminarmente determinare il dominio di f.

Nel nostro caso specifico, per la funzione in esame, il dominio risulta essere:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

in quanto le condizioni di esistenza (denominatore!) impongono $x \neq 1$.

Quindi, esistono ben 4 limiti notevoli:

1. $x \to 1^+$
2. $x \to 1^-$
3. $x \to +\infty$
4. $x \to -\infty$

Effettuando il calcolo esplicito, si ha:

1. $$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2-3}{x-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$
2. $$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2-3}{x-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$
3. $$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2-3}{x-1} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty$$
4. $$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2-3}{x-1} = \frac{+\infty}{-\infty} = -\infty$$

Gli ultimi due limiti di forme indeterminate possono essere calcolati o col metodo del raccoglimento (vedi 1.7), o con il teorema di De L'Hopital.

1.10

Studiando una funzione $y = f(x)$ avente per dominio $\mathbb{R}$, si arriva al risultato: $f(x) > 0$ per $x > 0$. Se si calcola il limite della funzione per x che tende a $+\infty$, si può trovare un valore negativo? Spiega.

In tale domanda si chiede di mettere, essenzialmente, in relazione il segno di $f(x)$ col segno del limite di $f(x)$ stessa, in questo caso all'infinito.

Tale relazione è offerta dal teorema della permanenza del segno:

TEOREMA: *Sia data una funzione $f(x)$. Se il limite di f per x che tende a x_0 è un numero l diverso da zero, allora esiste un intorno I_{x_0} in cui $f(x)$ assume lo stesso segno di l. Tale risultato si può estendere anche al caso in cui $l = \infty$.*

In altri termini, il teorema dice che una funzione ha lo stesso segno del limite: non è possibile dunque che se il valore del limite per $x \to x_0$ è, per esempio positivo, $f(x)$ sia negativa in ogni intorno di x_0. Ciò vale anche al viceversa: se in un intorno di x_0 $f(x)$ ha un certo segno, anche i valori di tutti i limiti per x che tende a punti di tale intorno devono avere lo stesso segno, a patto che f sia continua in tale intorno.

Quindi, la risposta alla domanda è necessariamente negativa: è stato provato che f è continua su tutto $\mathbb{R}$ (visto che il suo dominio è per ipotesi, tutto $\mathbb{R}$). Inoltre f è positiva per $x > 0$, quindi per il teorema della permanenzaa del segno se $x \to +\infty$ $f(x)$ deve tendere a valori positivi. Non può dunque tendere ad un limite negativo!

1.11

Dai la definizione di asintoto per una funzione $f(x)$. Spiega quanti tipi di asintoti ci sono e come si procede per la determinazione della loro equazione

Data una retta r, si dice che r è un asintoto per la funzione $f(x)$ se si verifica la seguente condizione:

- al tendere della variabile x ad un punto x_0 finito o all'infinito accade che la distanza di f da r tende a zero, in simboli:
$$x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to r$$

Rigorosamente, dire che $f \to r$ signifca affermare che la distanza di f da r decresce a zero, ossia, con il linguaggio degli intorni dovrà esistere un $\epsilon > 0$ tale che $|f(x) - r| < \epsilon$.

Vi sono tre diversi tipi di asintoto, a seconda del diverso tipo di equazione che può avere una retta:

- asintoti verticali, di equazione $x = x_0$;
- asintoti orizzontali, di equazione $y = l$
- asintoti obliqui, di equazione $y = mx + q$

Si dice che la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale per $f(x)$ quando è verificata la seguente condizione:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

In tal caso significa che, essendo infinito il limite della funzione al finito, il grafico di $f(x)$ tende ad avvicinarsi a quello di una retta verticale passante per il punto di ascissa x_0. Il punto x_0 è di solito una discontinuità del dominio (circostanza che si verifica molto spesso nel caso delle funzioni fratte, in corrispondenza degli zeri del denominatore). Per determinare l'equazione di un asintoto verticale, si determina innanzitutto il dominio. Se esso presenta delle discontinuità, si devono esaminare i limiti destri e sinistri per x che tende a ciascuno di questi valori: se i limiti sono infiniti, in corrispondenza di tali valori vi saranno degli asintoti verticali.

Si dice che la retta $y = l$ è un asintoto verticale per $f(x)$ quando è verificata la seguente condizione:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

ove l è un valore finito.

In tal caso significa che, essendo finito il limite della funzione all'infinito, il grafico di $f(x)$ tende ad avvicinarsi a quello di una retta orizzontale la cui quota è proprio l Gli asintoti orizzontali si hanno molto spesso per le funzioni razionali fratte, per le quali il grado del denominatore è uguale al grado del numeratore.

Per determinare l'equazione di un asintoto orizzontale basta appurare se i limiti all'infinito sono finiti. Il valore finito di tale limite fornirà l'equazione dell'asintoto

Infine si dice che la retta $r : y = mx + q$ è un asintoto obliquo per la funzione $f(x)$ se è verificata la seguente condizione:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

ed in più se valgono simultaneamente le seguenti condizioni:

- esiste finito il limite per $x \to \infty$ di $\dfrac{f(x)}{x}$ e vale m;
- esiste finito il limite per $x \to \infty$ di $f(x) - m \cdot x$ e vale q.

Gli asintoti obliqui si hanno molto spesso per le funzioni razionali fratte, per le quali il grado del denominatore è inferiore di una unità rispetto al grado del numeratore.

Per la determinazione dell'asintoto obliquo bisogna innanzitutto appurare che i limiti all'infinito sono infiniti. Quindi si inizia a determinare l'eventuale coefficiente angolare m determinando se esista finito il

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

In caso di risposta affermativa si procede alla determinazione di q vedendo se esiste finito:

$$q = \lim_{x \to \infty} f(x) - m \cdot x$$

ove m è il valore trovato dal limite precedente.

Nel caso in cui m esista finito ma q sia infinito, l'asintoto non è presente.

Da ricordare infine che una funzione che ammette asintoto orizzontale a $\pm\infty$ non può ammettere asintoto obliquo. Asintoti verticali ed orizzontali possono invece coesistere.

1.12

Dopo aver illustrato il concetto di asintoto per una funzione, specifica quale è l'equazione degli asintoti della seguente funzione:

$$y = \frac{x^2}{x - 1}$$

Per la definizione si veda 1.11.

Osserviamo che si tratta di una funzione razionale fratta, per la quale il grado del numeratore è di un'unità superiore al grado del denominatore.

Inizialmente determiniamo il dominio, che sarà naturalmente $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Quindi, in corrispondenza del punto $x = 1$ ci potrebbe essere un asintoto verticale. Per appurarlo, calcoliamo:

- $$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
- $$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Effettivamente questi limiti sono infiniti, quindi la funzione ammette asintoto verticale di equazione $x = 1$.

Siccome il grado del numeratore è di un'unità superiore al grado del denominatore, ci potrebbe essere asintoto obliquo (e quindi non orizzontale). Procediamo alla determinazione di m:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x - 1} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x - 1} = 1$$

Tale limite esiste dunque finito. Calcoliamo l'eventuale valore di q:

$$q = \lim_{x\to\infty} f(x) - m \cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} - 1 \cdot x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^2 + 1}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

Anche q esiste finito, quindi l'equazione dell'asintoto obliquo è:

$$\boxed{y = x}$$

1.13

Dopo aver illustrato il concetto di asintoto per una funzione, specifica quale è l'equazione degli asintoti della seguente funzione:

$$y = \frac{x+1}{x-1}$$

Vale quanto detto nella domanda precedente: la funzione è ancora razionale fratta. Il suo dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Per le stesse ragioni esposte precedentemente, si ha che $x = 1$ rappresenta un asintoto verticale.

Qui notiamo che in tale funzione il grado del numeratore equivale al grado del denominatore, quindi siamo nelle condizioni per poter avere l'asintoto orizzontale. Difatti:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$

Si tratta di un limite finito, quindi la funzione ammette come asintoto orizzontale la retta:

$$\boxed{y = 1}$$

Ovviamente, essendoci l'asintoto orizzontale, non c'è di certo quello obliquo!

1.14

Sia $x = x_0$ un asintoto verticale per una funzione $f(x)$: $f(x)$ allora può essere continua in x_0?

La presenza di un asintoto verticale per $x = x_0$ presuppone che:

$$\lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x) = \infty$$

Perciò la funzione non esiste finita per $x = x_0$. E' ovvio, dunque, che $f(x)$ non è continua in x_0, anzi, in tal punto essa presenta una discontinuità di seconda specie.