PROBLEMI PARAMETRICI
esercizi risolti
tratti dal testo MATEMATICA DUE

In questa dispensa verrà riportato lo svolgimento dei problemi parametrici trigonometrici, in cui si deve determinare un'incognita (di solito un angolo) affinchè sia realizzata una certa relazione dipendente da un parametro reale, da discutere. Tali problemi si riferiscono a quelli cosiddetti *di ricapitolazione*, riportati nel cap. 8, da pag.332 del testo: *L.Lamberti - L.Mereu - A.Nanni:* **Matematica due**, *ed.ETAS, 2008*

Alcuni accorgimenti per un proficuo svolgimento di tali problemi:

- Si legga attentamente il testo del problema.
- Si disegni la figura chiaramente, senza porsi a priori in casi particolari (ES. evitare di disegnare triangoli rettangoli o equilateri se non è chiaramente specificato nel testo, evitare di prendere punti in posizioni particolari come i punti medi, se non è esplicitamente richiesto).
- Scegliere accuratamente un'incognita, di solito un angolo, e imporre le limitazioni.

Es.95

Dato il quadrante AOB di circonferenza di centro O e raggio r, si prenda sulla semiretta OA un segmento $\overline{AC} = r$. Determinare sull'arco AB un punto P tale che l'area del quadrilatero $OCPB$ stia in rapporto uguale a k con il quadrato del raggio.

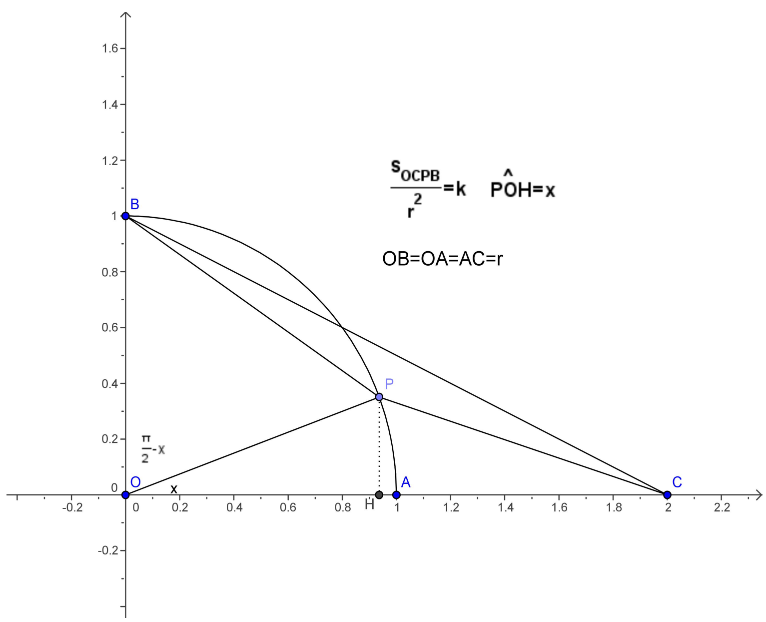

Figura 1: Rappresentazione grafica dell'es.95

Si prenda $x = P\widehat{O}A$, ovviamente con $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

Pensiamo al quadrilatero $OPCB$ come somma di due triangoli, per cui sarà:

$$S_{OPCB} = S_{OPB} + S_{OPC}$$

Ricordando la formula dell'area del triangolo, considerando il triangolo OBP isoscele, si ha:

$$S_{OPB} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot OP \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot \cos x = \frac{1}{2} r^2 \cos x$$

Considerando il triangolo OPC, sia H il piede dell'altezza relativa al lato OC. Quindi:

$$S_{OPC} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot OH$$

Ma è $PH = r \sin x$, e quindi:

$$S_{OPC} = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r \cdot \sin x = r^2 \sin x$$

.

Formando la relazione cercata, si avrà:

$$\frac{\frac{1}{2}r^2 \cos x + r^2 \sin x}{r^2} = k$$

che porta a risolvere il sistema parametrico

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\cos x + \sin x & = & k \\ 0 & \leq x & \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Con l'usuale sostituzione $\cos x = X$, $\sin x = Y$, il sistema diviene:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}X + Y & = & k \\ 0 & \leq x & \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

che vede l'intersezione del fascio improprio di rette $\frac{1}{2}X + Y = k$ con l'arco di circonferenza goniometrica di estremi $A(1,0)$ e $B(0,1)$.

La generatrice del fascio è la retta $\frac{1}{2}X + Y = 0$.

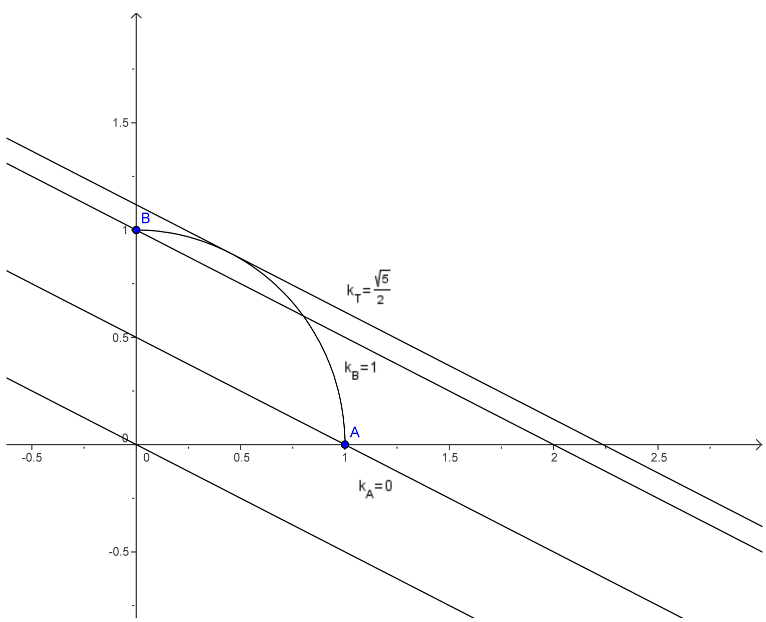

Figura 2: discussione grafica dell'es.95

Come si vede dalla figura, essa interseca l'arco di circonferenza in uno o due punti, a seconda dei seguenti capisaldi:

- passaggio per $A(1,0) : k_A = \frac{1}{2}$
- passaggio per $B(0,1) : k_B = 1$
- tangente. Col metodo della distanza si ha:

$$\frac{|-k|}{\sqrt{1/4+1}} = 1 \Rightarrow |k| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Prendendo la soluzione positiva si avrà allora $k_T = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

In conclusione il problema ammette una soluzione per $k \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ e due soluzioni per $k \in \left[1, \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

Es.96

Nel triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC, l'angolo $A\widehat{B}C$ ha ampiezza $30°$. Determinare su BC un punto Q in modo che risulti:

$$\overline{AQ} + \overline{QC} = k \cdot \overline{AC}$$

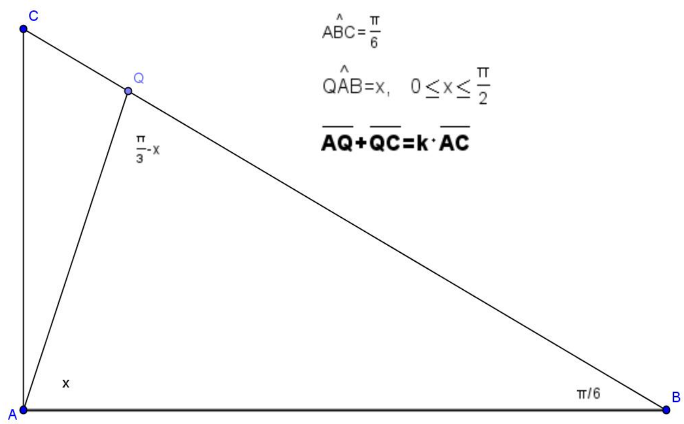

Figura 3: Rappresentazione grafica dell'es.96

Sia $AC = l$.
Risolvendo il triangolo abbiamo:

$$CB \cdot \sin \frac{\pi}{6} = l \Rightarrow CB = 2l$$

$$CB \cdot \cos \frac{\pi}{6} = AB \Rightarrow AB = l \cdot \sqrt{3}$$

Consideriamo ora il triangolo ABQ. Per il teorema dei seni:

$$\frac{AB}{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6} + x\right)} = \frac{AQ}{\sin \frac{\pi}{6}} \Rightarrow \frac{l \cdot \sqrt{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)} = \frac{AQ}{\frac{1}{2}} \Rightarrow AQ = \frac{l \cdot \sqrt{3}}{2\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}$$

Consideriamo ora il triangolo CQA ed usiamo ancora il teorema dei seni:

$$\frac{CQ}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{AQ}{\sin \frac{\pi}{3}} \Rightarrow CQ = \frac{l\sqrt{3}}{2\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)} \cdot \frac{\cos x \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{l \cos x}{\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}$$

Costruendo la relazione richiesta si ha:

$$\frac{l \cdot \sqrt{3}}{2\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)} + \frac{l \cos x}{\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)} = k \cdot l$$

Ossia:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x = k\left[\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right] \Rightarrow \cos x\left(1 - \frac{1}{2}k\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}k \sin x = 0$$

e quindi infine:

$$\cos x(2-k)-\sqrt{3}k\sin x+\sqrt{3}=0$$

Considerata la variazione di x e la consueta sostituzione $\cos x = X$, $\sin x = Y$, rimane da discutere il seguente sistema parametrico:

$$\begin{cases} x(2-k)-\sqrt{3}ky+\sqrt{3} & = & 0 \\ 0 & \leq x & \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

che vede l'intersezione del fascio proprio di rette $x(2-k)-\sqrt{3}ky+\sqrt{3}=0$ con l'arco di circonferenza goniometrica di estremi $A(1,0)$ e $B(0,1)$.

Se si fattorizza l'equazione del fascio rispetto a k, si hanno le due generatrici:

$$2x-kx-\sqrt{3}ky+\sqrt{3}=0 \Rightarrow g_1: 2x+\sqrt{3}=0,\ g_2: x+\sqrt{3}y=0$$

La loro intersezione dà il centro P del fascio:

$$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$$

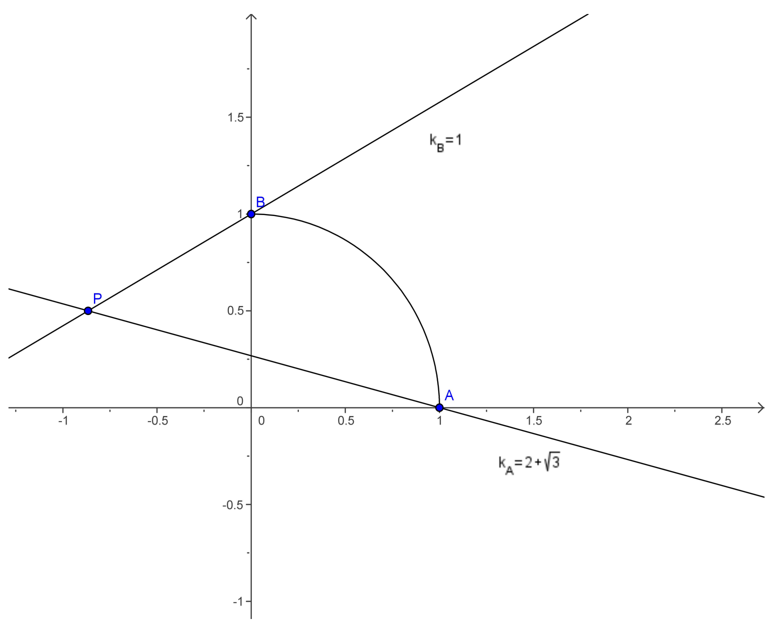

Figura 4: discussione grafica dell'es.96

Come si vede dalla figura, le rette del fascio intersecano l'arco di circonferenza sempre in un punto, a seconda dei seguenti capisaldi:

- passaggio per $A(1,0): k_A = 2+\sqrt{3}$
- passaggio per $B(0,1): k_B = 1$

In conclusione il problema ammette una soluzione per $k \in \left[1, 2+\sqrt{3}\right]$.

Es.97

Data una circonferenza di centro O e raggio r e una sua corda AB tale che $A\widehat{O}B = 120°$, si consideri un' altra corda CD parallela ad AB con C e D appartenenti al minore dei due archi AB, in modo che le dimensioni del rettangolo avente per lato CD ed il lato opposto su AB stiano tra loro nel rapporto k.

Tracciamo il segmento MO che unisce M, punto medio della corda CD col centro della circonferenza. Sia N l'intersezione di MO con AB.

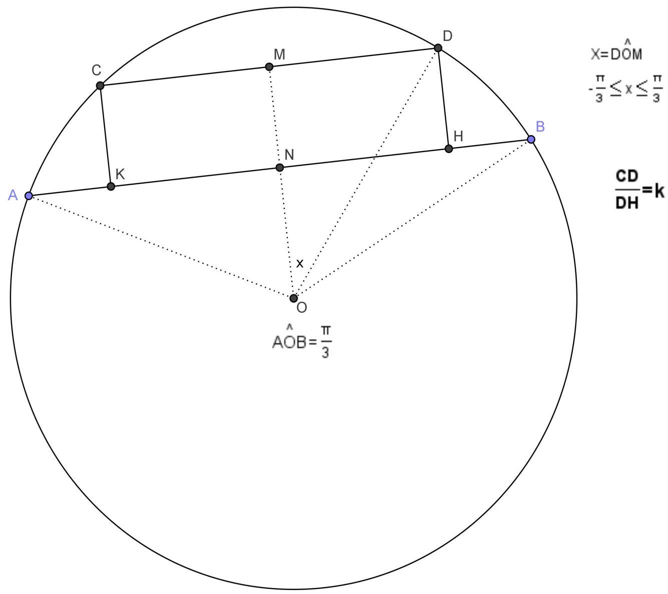

Figura 5: Rappresentazione grafica dell'es.97

Considerando il triangolo MOD, si ha che $MD = r \cdot \sin x$, quindi

$$CD = 2r \sin x$$

Per differenza, $DH = MN = MO - NO$. Ma $MO = r \cos x$, considerando il triangolo MOD. Considerando invece il triangolo NOB, si ha che, essendo NO la bisettrice dell'angolo $A\widehat{O}B$:

$$NO = r \cos \frac{\pi}{3} = \frac{r}{2}$$

A questo punto si avrà che:

$$DH = r \cos x - r/2$$

Quindi, la relazione da discutere è:

$$\frac{2r \sin x}{r \cos x - r/2} = k \Rightarrow 2 \sin x = k \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)$$

La relazione diviene pertanto:

$$2 \sin x - k \cos x + \frac{1}{2} k \Rightarrow 4 \sin x - 2k \cos x + k = 0$$

Considerata la variazione di x e la consueta sostituzione $\cos x = X$, $\sin x = Y$, rimane da discutere il seguente sistema parametrico:

$$\begin{cases} 4Y - 2kX + k & = & 0 \\ -\frac{\pi}{3} & \leq x & \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

che vede l'intersezione del fascio proprio di rette $4y - 2kx + k = 0$ con l'arco di circonferenza goniometrica di estremi $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Se si fattorizza l'equazione del fascio rispetto a k, si hanno le due generatrici:

$$g_1 : -2x + 1 = 0, \; g_2 : 4y = 0$$

La loro intersezione dà il centro P del fascio:

$$P\left(\frac{1}{2}; 0\right)$$

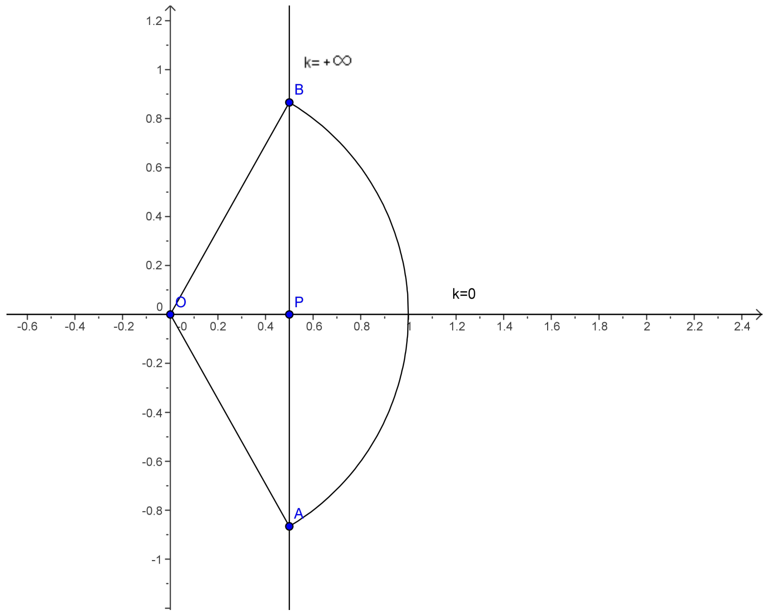

Figura 6: discussione grafica dell'es.97

Come si vede dalla figura, le rette del fascio intersecano l'arco di circonferenza sempre in un punto. Si osserva che A e B sono allineati con P secondo una retta verticale, il cui coefficiente angolare dovrà pertanto essere infinito. Ci sono quindi due capisaldi:

- passaggio per $O(0,0) : k_0 = 0$
- passaggio per A e B, ossia coefficiente angolare infinito. Il coefficiente angolare del fascio si ottiene scrivendo in forma esplicita l'equazione del fascio stesso. Così facendo si ha:

  $$m(k) = \frac{2k-1}{4}$$

  che come si vede è infinito se e solo se $k = +\infty$

In conclusione il problema ammette una soluzione per $k \in [0, +\infty[$.

Es.98

E' data una semicirconferenza di centro O e diametro $AB = 2r$. Condurre dal punto A due corde AC e AD in modo che $C\widehat{O}D = 60°$ e sempre dal punto A, la semiretta AE tangente in A alla semicirconferenza. Determinare l'angolo $E\widehat{A}C$ in modo che risulti:

$$\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 = k \cdot r^2$$

Considerato il triangolo isoscele COA, sia $C\widehat{O}A = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2x$

Si osserva che $C\widehat{B}A$ è l'angolo alla circonferenza della corda AC, che come abbiamo visto sottende l'angolo al centro di $2x$, quindi:

$$C\widehat{B}A = x$$

Per il teorema della corda, si ha che

$$AC = 2r \sin x$$

Considerando ora il triangolo ADO, per il teorema di Carnot si ha che:

$$AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2 \cdot AO \cdot OD \cdot \cos A\widehat{O}D$$

$$A\widehat{O}D = \frac{\pi}{3} + C\widehat{O}A = \frac{\pi}{3} + 2x$$

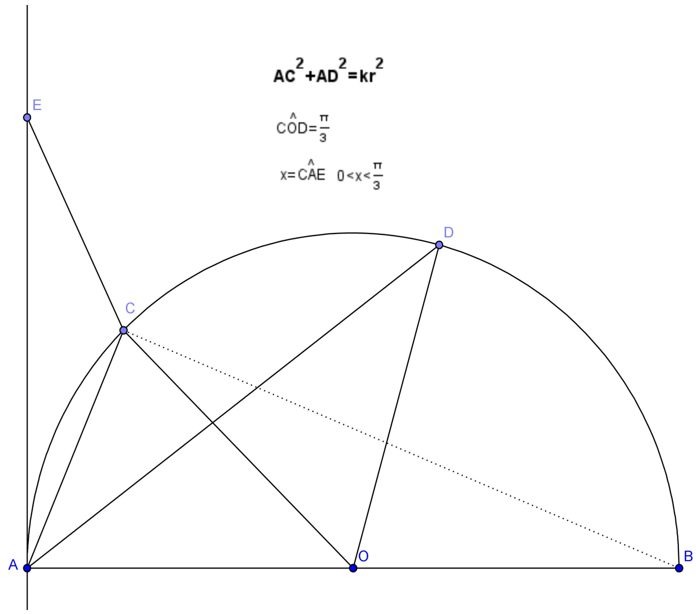

Figura 7: Rappresentazione grafica dell'es.98

Quindi:

$$AD^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)$$

Possiamo ora costruire la relazione voluta:

$$AC^2 + AD^2 = kr^2 \Rightarrow 4r^2\sin^2 x + 2r^2 - 2r^2\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right) = kr^2$$

Usando le formule di addizione del coseno:

$$4\sin^2 x + 2 - 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{3}\sin 2x\right) = k$$

cioè

$$4\sin^2 x + 2 - \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = k \Rightarrow 4\sin^2 x + 2\sin^2 x + 2\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = k$$

Infine:

$$7\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = k(\sin^2 x + \cos^2 x) \Rightarrow (7-k)\sin^2 x + (1-k)\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 0$$

Dividendo tutto per $\cos^2 x$ e ponendo $\tan x = t$ si ha:

$$(7-k)\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x + (1-k) = 0$$

Ponendo ora $t = \tan x$ e $y = t^2$, e quindi se $0 < x < \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow 0 < t < \sqrt{3}$, si dovrà discutere il seguente sistema parametrico:

$$\begin{cases} y & = & t^2 \\ (7-k)y + 2\sqrt{3}t + 1 - k & = & 0 \\ 0 & \leq x & \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

che vede l'intersezione del fascio proprio di rette $(7-k)y + 2\sqrt{3}t + 1 - k = 0$ con l'arco di parabola $y = t^2$ avente per estremi $A\,(0;0)$ e $B\left(\sqrt{3};3\right)$

Se si fattorizza l'equazione del fascio rispetto a k, si hanno le due generatrici:

$$7y - ky + 2\sqrt{3}t + 1 - k = 0 \Rightarrow k(-y-1) + 2\sqrt{3}t + 7y + 1 = 0 \Rightarrow g_1 : -y - 1 = 0,\ g_2 : 2\sqrt{3}t + 7y + 1 = 0$$

La loro intersezione dà il centro P del fascio:

$$P\left(\sqrt{3}; -1\right)$$

Come si vede dalla figura, le rette del fascio intersecano l'arco di parabola sempre in un punto. Ci sono quindi due capisaldi:

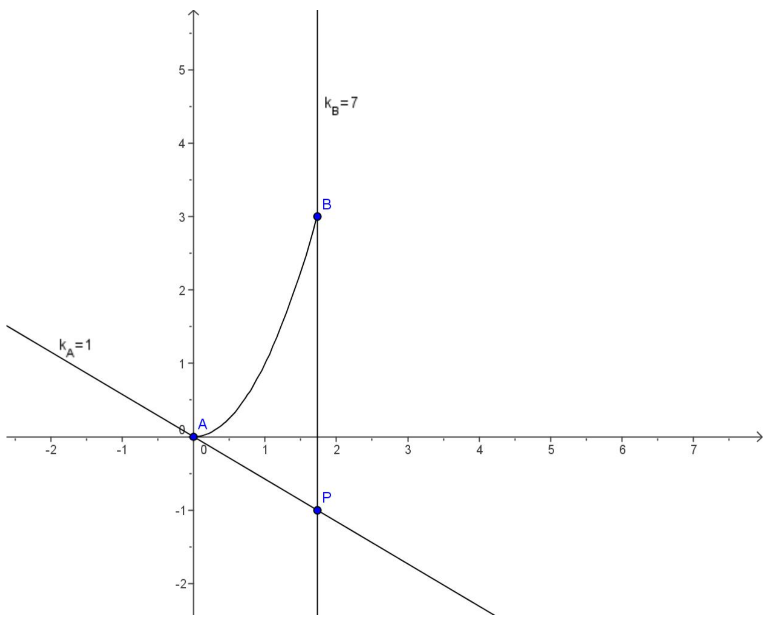

Figura 8: discussione grafica dell'es.98

- passaggio per $A(0,0) : k_A = 1$
- passaggio per $B : k_B = 7$

In conclusione il problema ammette una soluzione per $k \in [1, 7]$.

Es.99

Dato il triangolo equilatero ABC di lato a, condurre con centro in A la circonferenza di raggio $a/2$ che interseca il lato AB in M ed il lato AC in N. Determinare sull'arco MN interno al triangolo un punto P tale che:

$$\overline{PB} = k \cdot \overline{PC}$$

Considerando il triangolo CPA, applichiamo il teorema di Carnot:

$$CP = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cos x}$$

Considerando invece il triangolo PAB, applicando il teorema di Carnot si ha:

$$PB = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$$

Costruendo la relazione si ha quindi:

$$\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)} = k \cdot \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cos x}$$

Elevando al quadrato si ha:

$$\frac{4a^2 + a^2 - 4a^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}{4} = k^2 \cdot \frac{4a^2 + a^2 - 4a^2 \cos x}{4}$$

Ossia:

$$5 - 4 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x\right) = k^2 \cdot (5 - 4\cos x)$$

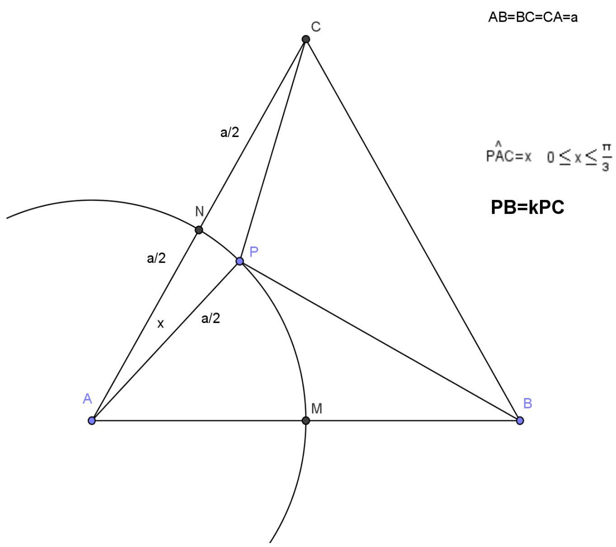

Figura 9: Rappresentazione grafica dell'es.99

Sviluppando:

$$5-4\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)=k^2(5-4\cos x)\Rightarrow 5-2\cos x-2\sqrt{3}\sin x-5k^2+4k<2\cos x=0$$

Considerata la variazione di x e la consueta sostituzione $\cos x=X$, $\sin x=Y$, rimane da discutere il seguente sistema parametrico:

$$\begin{cases}(4k^2-2)X-2\sqrt{3}Y-5k^2+5 & = & 0\\ 0 & \leq x & \leq \frac{\pi}{3}\end{cases}$$

che vede l'intersezione del fascio proprio di rette $(4k^2-2)X-2\sqrt{3}Y-5k^2+5=0$ con l'arco di circonferenza goniometrica di estremi $A(1,0)$ e $B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Se si fattorizza l'equazione del fascio rispetto a k^2, si hanno le due generatrici:

$$g_1:4x-5=0,\ g_2:-2x-2\sqrt{3}y+5=0$$

La loro intersezione dà il centro P del fascio:

$$P\left(\frac{5}{4};\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$$

Come si vede dalla figura, le rette del fascio intersecano l'arco di circonferenza sempre in un punto. Ci sono quindi due capisaldi:

- passaggio per $A(1,0):k_A^2=3$
- passaggio per $B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right):k_B^2=\frac{1}{3}$

In conclusione il problema ammette una soluzione, osservando che è $k\geq 0$ per $k\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right]$.

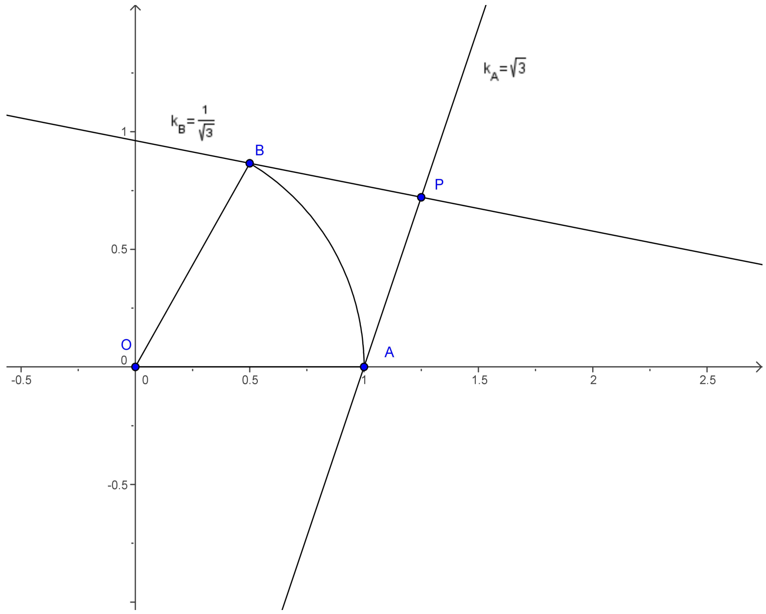

Figura 10: discussione grafica dell'es.99

Es.101

Data una circonferenza di diametro $AB = 2 \cdot r$ e centro O, si conduca una corda AC tale che $C\hat{A}B = \dfrac{\pi}{6}$. Se M è un punto di tale corda, determinare l'ampiezza dell'angolo $M\hat{B}A$ in modo che, detta PQ la corda della circonferenza di cui M è punto medio, si abbia:

$$PQ^2 = 4k \cdot MB^2$$

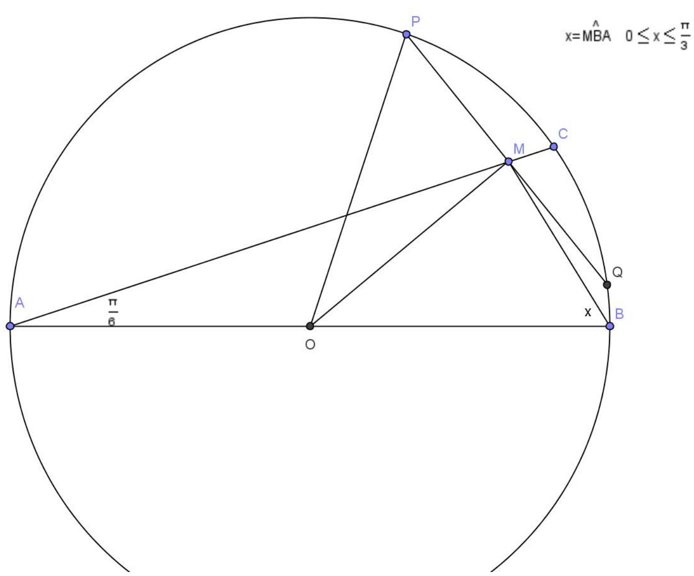

Figura 11: Rappresentazione grafica dell'es.101

Un noto teorema afferma che la perpendicolare ad una corda di una circonferenza condotta dal suo punto medio passa per il centro. Nel nostro caso, $PM \perp MO$, per cui il triangolo PMO è rettangolo di ipotenusa PO.

Considerando il triangolo AMB, si ha che $A\widehat{M}B = \pi - \frac{\pi}{6} - x = \frac{5}{6}\pi - x$. Per il teorema dei seni:

$$\frac{MB}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{AB}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi - x\right)} \Rightarrow MB = \frac{2r}{\cos x + \sqrt{3}\sin x}$$

Considero il triangolo MBO. Per il teorema di Carnot:

$$MO^2 = MB^2 + BO^2 - 2\ddot{M}B \cdot BO \cdot \cos x = \frac{4r^2}{(\cos x + \sqrt{3}\sin x)^2} + r^2 - 2 \cdot \frac{2r \cdot r\cos x}{\cos x + \sqrt{3}\sin x}$$

Effettuando il denominatore comune ed elaborando i calcoli si ha:

$$MO^2 = \frac{r^2}{(\cos x + \sqrt{3}\sin x)^2} \cdot (\cos^2 x + 7\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x)$$

Visto che MOP è rettangolo, $PM^2 = PO^2 - MO^2$. Ma $PQ = 2PM$ e quindi $PM^2 = (2PM)^2 = 4PM^2$. Quindi:

$$PQ^2 = 4 \cdot \left(r^2 - \frac{r^2}{(\cos x + \sqrt{3}\sin x)^2} \cdot (\cos^2 x + 7\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x)\right)$$

Costruendo la relazione richiesta:

$$4 \cdot \left(r^2 - \frac{r^2}{(\cos x + \sqrt{3}\sin x)^2} \cdot (\cos^2 x + 7\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x)\right) = 4 \cdot k \cdot \frac{4r^2}{(\cos x + \sqrt{3}\sin x)^2}$$

Con un po' di pazienza e concentrazione, elaborando i calcoli si ha:

$$\sqrt{3}\sin x\cos x - \sin^2 x = k$$

che è la relazione da discutere. Trasformando l'equazione in omogenea, si ha:

$$k\cos^2 x + (1+k)\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x$$

dividendo per $\cos^2 x$ e ponendo $\tan x = t$, rimane da discutere il seguente sistema parametrico:

$$\begin{cases} y & = & t^2 \\ (1+k)y - \sqrt{3}t + k & = & 0 \\ 0 & \leq x & \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

che vede l'intersezione del fascio proprio di rette $(1+k)y - \sqrt{3}t + k$ con l'arco di parabola $y = t^2$ di estremi $O(0,0)$ e $A(\sqrt{3}, 3)$

Se si fattorizza l'equazione del fascio rispetto a k, si hanno le due generatrici:

$$g_1 : y + 1 = 0 \; g_2 : y - \sqrt{3}t = 0$$

La loro intersezione dà il centro P del fascio:

$$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -1\right)$$

.

Osserviamo che il passaggio per il punto $O(0,0)$ si ha per $(1+k) \cdot 0 - \sqrt{3} \cdot 0 + k = 0 \Rightarrow k = 0$.

Il passaggio per $A(\sqrt{3}, 3)$ si ha per $(1+k) \cdot 3 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + k = 0$ che implica $3 + 3k - 3 + k = 0 \Rightarrow k = 0$, dunque la retta per O passa anche per A.

Troviamo la retta tangente all'arco di parabola, annullando il discriminante del sistema:

$$\begin{cases} y & = & t^2 \\ (1+k)y - \sqrt{3}t + k & = & 0 \end{cases}$$

L'equazione risolvente è: $(1+k)t^2 - \sqrt{3}t + k = 0$ il cui Δ vale $3 - 4 \cdot (1+k) \cdot k$. Si ha dunque l'equazione: $3 - 4k - 4k^2 = 0$, che ammette per soluzioni $k = \frac{1}{2}$ e $k = -\frac{3}{2}$. Osserviamo che la tangente richiesta è quella con $k = \frac{1}{2}$ per cui il problema ammetterà sempre due soluzioni per $k \in [0, 1/2]$.

Es.105

Siano AB, BC, CD tre corde consecutive di una circonferenza di raggio r, di lunghezza rispettivamente r, $r\sqrt{3}$, $r\sqrt{2}$. Determinare sul minore dei due archi AD un ponto M in modo che risulti:

$$\overline{AM}^2 + \overline{MD}^2 = k \cdot \overline{MC}^2$$

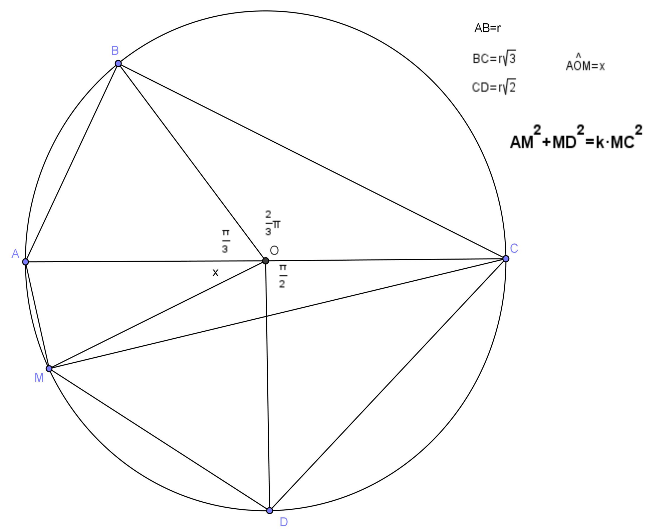

Figura 12: Rappresentazione grafica dell'es.105

Per delle note proprietà dei poligoni inscritti, è ovvio che $A\widehat{O}B = \dfrac{\pi}{3}$, $B\widehat{O}D = \dfrac{2}{3}\pi$, $C\widehat{O}D = \dfrac{\pi}{2}$.

Chiamato $2x = A\hat{O}M$, troviamo il suo insieme di variazione. Se M coincide con A, ovviamente $2x = 0 \Rightarrow x = 0$. Se invece M coincide con D, l'angolo limite $2x_{max}$ si otterrà da:

$$2x_{max} = 2\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_{max} = \frac{\pi}{4}$$

Quindi

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

Considerando il triangolo AOM, per il teorema della corda:

$$AM = 2 \cdot r \sin\frac{2x}{2} = 2r\sin x$$

in quanto $2x$ è l'angolo al centro sotteso dalla corda ed il suo corrispondente angolo alla circonferenza è la metà (ecco perchè è meglio considerare $A\widehat{O}M = 2x$ e non x!).

Considerando invece il triangolo MOD, si ha, sempre per il teorema della corda:

$$MD = 2 \cdot r \sin\frac{\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2} = 2r\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

Infine, considerando il triangolo MDC, sempre per il teorema della corda, si ha:

$$MC = 2r\sin\left(\frac{M\widehat{O}C}{2}\right)$$

ma è $MOC = \pi - 2x$ e quindi:

$$MC = 2r\sin(\pi/2 - x) = 2r\cos x$$

A questo punto si può scrivere la relazione richiesta:

$$4r^2\sin^2 x + 4r^2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = k\cdot 4r^2\cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x + \frac{1}{2} - \sin x\cos x = k\cos^2 x$$

Moltiplicando per due e rendendola omogenea, essa diventa:

$$3\sin^2 x + (1-2k)\cos^2 x - 2\sin x\cos x = 0$$

Usando la consueta procedura, dividendo per $\cos^2 x$, ponendo $\tan x = t$ e $y = t^2$, notando che se $x = 0 \Rightarrow t = 0$ e che $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$, dobbiamo discutere il seguente sistema parametrico.

$$\begin{cases} y = t^2 \\ 3y - 2t + 1 - 2k = 0 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

che vede l'intersezione di un fascio improprio di generatrice $3y - 2t = 0$ con l'arco di parabola di estremi $A(0,0)$ e $B(1,1)$

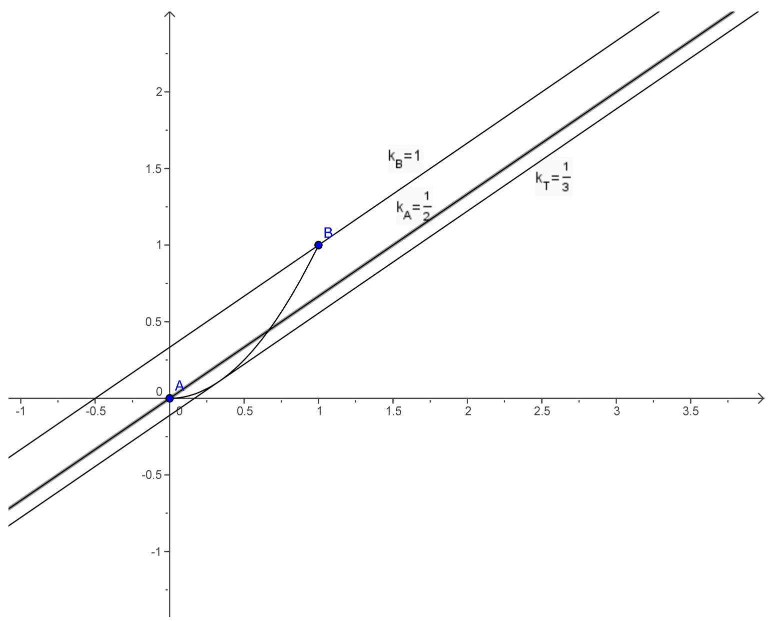

Figura 13: discussione grafica dell'es.105

Come si vede dalla figura, le rette del fascio intersecano l'arco di parabola in due punti, oppure in uno. Ci sono quindi tre capisaldi:

- passaggio per $A(0,0) : k_A = \frac{1}{2}$
- passaggio per $B(1,1) : k_B = 1$
- tangente. Dobbiamo usare il metodo del delta, intersecando il fascio con la parabola, ossia imponendo pari a zero il discriminante del sistema:

$$\begin{cases} y = t^2 \\ 3y - 2t + 1 - 2k = 0 \end{cases}$$

cioè si deve imporre nullo il delta dell'equazione:

$$3t^2 - 2t + 1 - 2k = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4\cdot 3\cdot(1-2k) = 0 \Rightarrow -8 - 24k = 0$$

la cui soluzione porge finalmente $k_T = \frac{1}{3}$

In conclusione il problema ammette una soluzione per $k \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ e due soluzioni per $k \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

Es. 106

In una semicirconferenza di centro O e diametro $AB = 2r$ si considerino due punti C e D con C più vicino as A, in kodo che l'angolo $C\hat{O}D$ misuri $60°$. Dette H e K le proiezioni di C e D sul diametro AB, determinare le posizioni di C e D in modo che si abbia:

$$\overline{HK} = m\overline{CD}$$

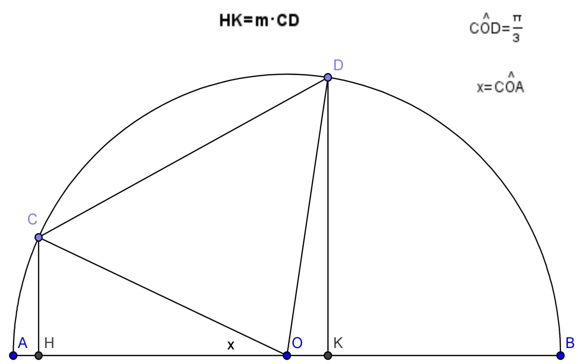

Figura 14: Rappresentazione grafica dell'es.106

Sia $x = C\hat{O}A$. E' ovvio che il suo campo di variazione è $0 \leq x \leq \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

Per il teorema della corda, ovviamente è:

$$CD = 2r\sin(COD/2) = 2r\sin\frac{\pi}{6} = r$$

Consideriamo ora $HK = HO + OK$. Consideriamo il triangolo CHO rettangolo per ipotesi. E' ovviamente $HO = r\cos x$.

Considerando invece il triangolo DOK, si ha $OK = r\cos D\widehat{O}K$.

L'angolo $D\widehat{O}K$ si ottiene da $\pi - x - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi - x$, per cui:

$$OK = r\cos\left(\frac{2}{3}\pi - x\right)$$

In definitiva:

$$HK = r\cos\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) + r\cos x = r\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) + r\cos x$$

La nostra relazione sarà allora:

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x + 2\cos x = m \Rightarrow \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2m$$

Considerata la variazione di x e la consueta sostituzione $\cos x = X$, $\sin x = Y$, rimane da discutere il seguente sistema parametrico:

$$\begin{cases} X + \sqrt{3}Y & = & 2m \\ 0 & \leq x & \leq \frac{2}{3}\pi \end{cases}$$

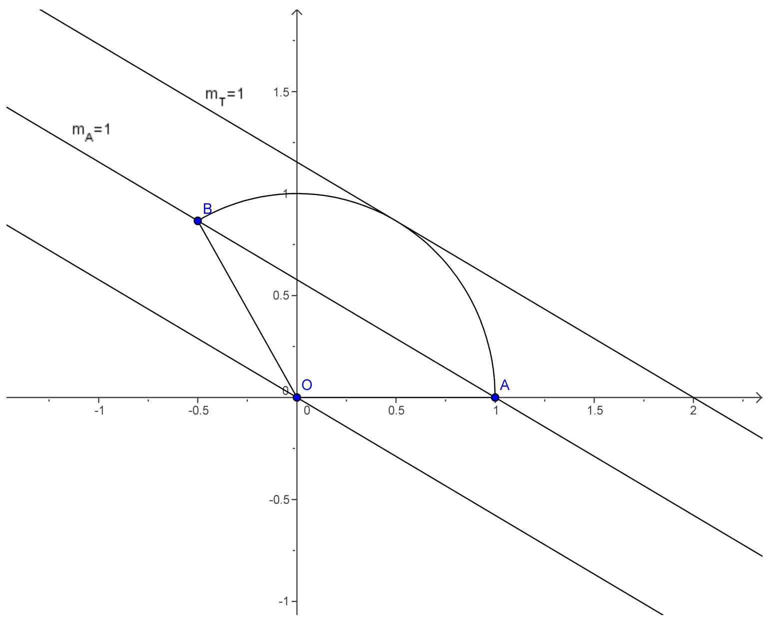

Figura 15: discussione grafica dell'es.106

che vede l'intersezione del fascio improprio proprio di generatrice $X + \sqrt{3}Y = 0$ con l'arco di circonferenza goniometrica di estremi $A(1, 0)$ e $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Osservando che la retta del fascio che passa per B, passa anche per A, come si vede dalla figura, le rette del fascio intersecano l'arco di circonferenza sempre in due punti. Ci sono quindi due capisaldi:

- passaggio per $A(1, 0)$ o per B: $m_A = \frac{1}{2}$
- Tangente. Col metodo della distanza si ha:

$$\frac{|-2m|}{\sqrt{1+3}} = 1 \Rightarrow |-2m| = 2$$

Prendendo la soluzione positiva si avrà allora $m_T = 1$.

In conclusione il problema ammette due soluzioni per $m \in \left[1; \frac{1}{2}\right[$.