QUESITI sui teoremi delle fuzioni derivabili

ES.1

Data la funzione $y = \sqrt{|x|}$ e l'intervallo $I = [-2; 2]$, verifica che NON soddisfa alle ipotesi del teorema di Lagrange, motivando la risposta

E' sufficiente mostrare che una delle seguenti ipotesi non vale:

1. f è definita in un compatto I
2. f è continua in I, ovvero se f presenta delle discontinuità , esse non sono comprese in I.
3. f è derivabile in I, nella peggiore delle ipotesi, tranne agli estremi, ovvero, se f ammette dei punti di non derivabilitÃ , questi non sono compresi in I.

Nel nostro caso, la funzione in esame ha per dominio $\mathbb{R}$, visto che la radice esiste se il suo argomento è non negativo e $|x| \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Quindi f è definita continua nel compatto I.

Proviamo quindi che f presenta un punto di non derivabilità interno ad I.

Visto che

$$|x| = \begin{cases} x & \text{per } x \geq 0 \\ -x & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

si ha che

$$f'(x) = \begin{cases} D\sqrt{x} & \text{per } x \geq 0 \\ D\sqrt{-x} & \text{per } x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{per } x \geq 0 \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

Notiamo che entrambe le espressioni delle derivate sono divergenti per $\to 0$: in particolare:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{2\sqrt{-x}} = -\infty$$

Il punto $x = 0$ rappresenta una cuspide per f, quindi in $x = 0$ f non risulta derivabile. Siccome $0 \in I$, allora f non è derivabile in I e le ipotesi del teorema di Lagrange non risultano soddisfatte.

ES. 2

Date le due funzioni $f(x) = \ln x$ e $g(x) = x + 3$, specifica se per esse è applicabile il teorema di Cauchy nell'intervallo $I = [1; 3]$ e determina i punti in cui si realizza la tesi del teorema.

Basta provare che:

1. f e g sono definite nel compatto I
2. f e g sono continue in I (vedi esercizio precedente)
3. ff e g sono derivabili in I (vedi esercizio precedente) e $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I$

Visto che$D_f =]0; +\infty[$ e $D_g = \mathbb{R}$, I è contenuto in entrambi gli intervalli, per cui f e g sono entrambe continue in I. Essendo

$$Df = f'(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \neq 0$$

e che $g'(x) = 1$, sempre definita e non nulla, possiamo concludere che entrambe le funzioni sono anche derivabili in I. Le ipotesi del teorema di Cauchy o degli incrementi finiti sono soddisfatte. La tesi implica che esiste almeno un $x_0 \in I$ tale che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0}{g'(x_0}$$

essendo a e b gli estremi di I. Ora:

$$f(b) = f(3) = \ln 3, \quad f(a) = f(1) = ln 1 = 0, \quad g(b) = g(3) = 6, \quad g(a) = g(1) = 4$$

allora i punti x_0 devono soddisfare a:

$$\frac{\ln 3 - 0}{6-4} = \frac{1/x_0}{1} \Rightarrow \frac{2}{\ln 3} = x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{2}{\ln 3}$$

Siccome $x_0 \simeq 1,94 \in I$, questo è il punto cercato, l'unico a soddisfare alla tesi del teorema.

Es.3

Sia f una funzione continua in $I = [-3;4]$ e derivabile in$I =]-3;4[$, tale che

$$|f'(x)| \leq 2$$

Dimostra che $\forall\, x-1, x_2 \in I$ si ha che

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq 14$$

Le ipotesi di partenza ci fanno concludere che per f vale il teorema di Lagrange nell'intervallo I, per cui esiste almeno un $x_0 \in [-3;4]$ tale che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(x_0)$$

cioè:

$$\frac{f(b) - f(a)}{4-(-3)} = f'(x_0) \Rightarrow \frac{|f(b) - f(a)|}{7} = |f'(x_0)|$$

Se poi si ha che per ogni punto dell'intervallo $|f'(x)| \leq 2$ a maggior ragione $|f'(x_0)| \leq 2$ e quindi, per la relazione dedotta dalla tesi del teorema di Lagrange:

$$\frac{|f(b) - f(a)|}{7} \leq 2 \Rightarrow |f(b) - f(a)| \leq 7 \cdot 2$$

Se poi $x_1\, x_2$ sono punti di I, di sicuro $|f(x_2) - f(x_1)| \leq |f(b) - f(a)$, da cui la tesi:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq 14$$

Es. 4

Trova i valori dei due parametri λ e μ affinchè la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot x + 2 & \text{per } x \geq 1 \\ \mu \cdot x^2 + 5x & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

sia continua e derivabile nel suo dominio. Determina il punto $x_0 \in [0;2]$ affinchè per la funzione trovata sia valida la tesi del teorema di Lagrange

Se f è continua deve aversi che:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

visto che f cambia definizione in $x = 1$. Quindi:

$$\lim_{x \to 1^+} \lambda \cdot x + 2 = \lim_{x \to 1^-} \mu \cdot x^2 + 5x \Rightarrow \lambda + 2 = \mu + 5$$

Se f deve essere derivabile in $\mathbb{R}$ (notare che comunque f è definita in tutto $\mathbb{R}$ perchè definita da leggi che non presentano C.E.), allora:

$$f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow \lambda = 2\mu \cdot 1 + 5 \Rightarrow \lambda = 2\mu + 5$$

Mettendo a sistema le due condizioni trovate, si ha che $\lambda = 1$, $\mu = -2$, quindi la funzione cercata è:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{per } x \geq 1 \\ -2x^2 + 5x & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

Se f è continua e derivabile in $\mathbb{R}$, lo sarà a maggior ragione din $I = [0;2] \subset \mathbb{R}$, per cui f soddisfa al teorema di Lagrange e quindi esiste almeno un $x_0 \in I$ tale che:

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(x_0)$$

Ora, $2 > 1$ quindi $f(2) = 2 + 2 = 4$ mentre $f(0) = 2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 = 0$, visto che $0 < 1$, pertanto si dovrà risolvere l'equazione:

$$\frac{4 - 0}{2 - 0} = f'(x_0) \Rightarrow 2 = f'(x_0)$$

Ora, la derivata di f vale:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \geq 1 \\ -4x + 5 & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

Sicuramente non può essere $1 = 2$, quindi si deve risolvere:

$$-4x + 5 = 2 \Rightarrow x = 3/4$$

che è l'unico punto a soddisfare la tesi del teorema.

Es.5

Data la cubica:

$$y = -x^3 - x^2 - x - 2$$

dimostra che è invertibile in $\mathbb{R}$. *Detta* f^{-1} *la sua inversa si calcoli* $f'^{-1}(y_0)$, *ove* $y_0 = f(1)$.

Una funzione è invertibile se è biettiva, cioè contemporaneamente iniettiva e suriettiva.

La funzione in questione è sicuramente suriettiva, perchè, definita su tutto $\mathbb{R}$, ha il codominio coincidente con $\mathbb{R}$: lo possiamo provare vedendo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Per vedere se è iniettiva, basta provare che f è priva di estremali (ossia "non torna indietro"), ovvero strettamente monotona, cioè $f'(x) > 0$ oppure $f(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Se $f'(x) = -3x^2 - 2x - 1 = -(3x^2 + 2x + 1)$, basta vedere se è verificata una delle due condizioni, $f'(x) > 0$ o $f'(x) < 0$. Imponiamo che:

$$-(3x^2 + 2x + 1) > 0 \Rightarrow 3x^2 + 3x + 1 < 0$$

Essendo $\Delta = 4 - 12 < 0$ allora è sempre $3x^2 + 2x + 1 > 0$, quindi $-(3x^2 + 2x + 1) < 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$ ed f è strettamente monotona decrescente, quindi iniettiva.

La funzione f è dunque invertibile, quindi ammette inversa, chiamata $f^{-1}(x)$. Per trovare $f'^{-1}(y_0)$, derivata dell'inversa in y_0, è necessario ricordare che:

$$f'^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Quindi si deve trovare x_0 affinchè $f(x_0) = y_0$, ma il testo ci dice che $y_0 = f(1) = -1 - 1 - 1 - 2 = -5$, pertanto:

$$f'^{-1}(-5) = \frac{1}{Df_{x=1}} = \frac{1}{-3x^2 - 2x - 1_{x=1}} = -\frac{1}{6}$$

Es.6

Dato il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2011}}{e^x}$$

specifica se esso può essere calcolato con il teorema di De l'Hopital e fornisci il risultato.

Il teorema è sicuramente appplicabile (caso ∞/∞), visto che il rapporto vede due funzioni derivabili e e^x ha sempre derivata non nulla. Se applichiamo una volta sola il teorema si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2011}}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2011x^{2010}}{e^x}$$

che dà ancora una forma indeterminata, ma se iteriamo l'applicazione del teorema per un totale di 2011 volte, abbiamo infine che:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2011}}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2011!}{e^x} = 2011/+\infty = 0$$

ricordando la definizione di fattoriale.

Es.7

Specifica se il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x - x}{\cos x + x}$$

si può calcolare con la regola di De L'Hopital. Quanto vale questo limite?

Notiamo subito che sia a numeratore che a denominatore compaiono due funzioni, seno e coseno, sicuramente limitate ma il cui limite all'infinito come è noto non esiste. E' però vero che malgrado non esista $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$, sempre $|\sin x| \leq 1$, per cui, complessivamente l'espressione $\sin x - x$ è asintotica a $-x$, quindi divergente. Analogo discorso vale per il denominatore, asintotico invece a x.

Complessivamente quindi il limite, malgrado si presenti come forma indeterminata ∞/∞, può calcolarsi come segue:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x - x}{\cos x + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

Il risultato però non è dimostrabile col teorema di De L'Hopital in quanto la funzione a denominatore $g(x) = \cos x + x$ ha una derivata che si annulla infinite volte, venendo dunque a cadere l'ipotesi di avere $g'(x) \neq 0 \forall x$.

Es.8

Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la funzione:

$$f(x) = kx^3 - 6x^2 + 3kx - 2$$

è decrescente in $\mathbb{R}$

Il dominio delle funzioni descritte dalla famiglia di cubiche parametriche è $\mathbb{R}$. Quindi tutte le funzioni saranno decrescenti se $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$. Visto che

$$f'(x) = 3kx^2 - 12k + 3k$$

si deve imporre che sia sempre verificata la condizione:

$$3kx^2 - 12kx + 3k < 0 \Rightarrow kx^2 - 4x + k < 0$$

Ricordando che un polinomio di secondo grado è negativo $\forall x$ se $\Delta < 0$ e il coefficiente del termine di grado massimo è negativo, allora:

$$\begin{cases} k & < & 0 \\ \Delta & < & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k & < & 0 \\ 4 - k^2 & < & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k & < & 0 \\ k < -2 & \vee & k > 2 \end{cases}$$

condizione che implica $k < -2$.

Es.9

Determina per quali valori di b e c la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + bx + c}{x^2 - 5x + 4}$$

ha un minimo relativo in $m\left(-2; -\frac{1}{9}\right)$.

Innanzitutto si deve imporre il passaggio per m:

$$-\frac{1}{9})\frac{(-2)^2 + (-2) \cdot b + c}{(-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 4} \Rightarrow -\frac{1}{9})\frac{4 - 2b + c}{18}$$

e quindi la prima condizione sui parametri è:

$$4 - 2b + c = -2$$

Imponiamo ora che $f'(x)$ si annulli in $x = -2$:

$$f'(x) = \frac{D(x^2 + bx + c)(x^2 - 5x + 4) - (x^2 + bx + c)D(x^2 - 5x + 4)}{(x^2 - 5x + 4)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(2x + b)(x^2 - 5x + 4) - (x^2 + bx + c)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 4)^2}|_{x=2} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^3 - 10x^2 + 8x + bx^2 - 5bx + 4b - 2x^3 + 5x^2 - 2bx^2 + 5bx - 2cx + 5c|_{x=2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2(-5 - b) + x(8 - 2c) + 4b + 5c|_{x=2} = 0$$

$$\Rightarrow 4(-5 - b) + 2(8 - 2c) + 4b + 5c = 0 \Rightarrow -20 - 4b + 16 - 4c + 4b + 5c = 0 \Rightarrow -4 + c = 0 \Rightarrow c = 4$$

Quindi, ponendo tale condizione a sistema con l'altra trovata imponendo il passaggio per m si ha che $c = 4,\ b = 5$: la funzione trovata è allora:

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 5x + 4}$$

Ora bisogna provare che effettivamente m è un punto di minimo per f, studiando il segno di $f'(x)$: non conviene usare il metodo delle derivate successive, in quanto molto laborioso. Riprendendo l'espressione della derivata e sostituendo ai parametri i valori trovati, si ha:

$$f'(x) = \frac{-10x^2 + 40}{(x^2 - 5x + 4)^2}$$

Tale derivata è positiva quando $-10x^2 + 40 > 0$ (il denom. è sempre positivo), cioè per $-2 < x < 2$. La funzione cresce a destra di -2 e decresce a sinistra, quindi $x = -2$ è effettivamente un punto di minimo.

Es. 10

Studiare la concavità della funzione

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln \sqrt{x}$$

e classificare i suoi eventuali punti di flesso

La concavità di una funzione (verso l'alto o verso il basso) dipende dal segno di $f''(x)$, per cui dobbiamo procurarci la sua espressione. Ricordando la formula per la derivata di un prodotto:

$$f'(x) = D\sqrt{x} \cdot \ln \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot D \ln \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (\ln \sqrt{x} + 1)$$

Derivando di nuovo, abbiamo:

$$f''(x) = D\frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln \sqrt{x} + 1) + \frac{1}{2\sqrt{x}}D(\ln \sqrt{x} + 1)$$

La derivata di $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ è:

$$D\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}Dx^{-1/2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

Quindi:

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}(\ln \sqrt{x} + 1) + \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}(\ln \sqrt{x} + 1) + \frac{1}{4x\sqrt{x}} = \frac{1}{4x\sqrt{x}} \cdot (-\ln \sqrt{x})$$

Studiando il segno di tale espressione, ovviamente nel dominio $x > 0$, si ha che:

$$\frac{1}{4x\sqrt{x}} > 0 \forall x > 0, \quad -\ln \sqrt{x} > 0 \Rightarrow \ln \sqrt{x} < 0$$

L'ultima disequazione è soddisfatta per:

$$0 < \sqrt{x} < 1 \Rightarrow 0 < x < 1$$

Il quadro dei segni prevede allora che f volga la concavità verso l'alto per $0 < x < 2$ e verso il basso per $x > 1$.

Il punto $x = 1$ è quindi un flesso. Visto che:

$$f'(1) = \frac{1}{2} \neq 0$$

si tratta di un flesso a tangente obliqua.