EQUAZIONI E DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Esercizi risolti

Classi quarte

La presente dispensa riporta la risoluzione di alcuni esercizi inerenti equazioni e disequazioni logaritmiche.

N.B. In questa dispensa, i logaritmi naturali sono indicati con ln. In altri testi si trova anche la notazione log, ma la convenzione tipografica più corretta e diffusa è ln.

Per la risoluzione degli esercizi si devono avere ben chiare le proprietà dei logaritmi, sopratutto le seguenti identità:

$$\log_a a^x = x, \quad a^{\log_a x} = x$$

---

1 Equazioni logaritmiche

Es.286, pag. 211

$$\boxed{\log_a(x-5) + \log_a(x-7) + \log_a 3 = 0}$$

Sintetizziamo i logaritmi, applicando la proprietà della somma, visto che la base è sempre la stessa (qui si suppone $a > 0$). L'equazione diviene:

$$\log_a[3 \cdot (x-5) \cdot (x-7)] = 0$$

Esponenziamo M.A.M. in base a, avendo che $3 \cdot (x-5) \cdot (x-7) = a^0$, ossia:

$$3 \cdot (x-5) \cdot (x-7) = 1$$

Risolvendo questa semplice equazione, abbiamo:

$$x = \frac{18 - 2\sqrt{3}}{3} \simeq 4,86, \quad x = \frac{18 + 2\sqrt{3}}{3} \simeq 7,154$$

Imponendo le C.E. abbiamo:

$$\begin{cases} x - 5 & > & 0 \Rightarrow x > 5 \\ x - 7 & > & 0 \Rightarrow x > 7 \end{cases}$$

Come si vede, solo la seconda radice soddisfa ad entrambe le condizioni, quindi è da ritenersi accettabile. La soluzione è pertanto:

$$x = \frac{18 + 2\sqrt{3}}{3}$$

Es.289, pag. 211

$$\boxed{\log(x+2) - \log x = 2 \cdot \log \frac{1}{2}}$$

Sintetizziamo i logaritmi a primo membro, applicando la proprietà della differenza, visto che la base è sempre la stessa. L'equazione diviene:

$$\log\left(\frac{x+2}{x}\right) = 2 \cdot \log \frac{1}{2}$$

Applichiamo la proprietà della potenza a secondo membro: $2 \cdot \log \frac{1}{2} = \log\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \log \frac{1}{4}$

L'equazione diviene:

$$\log\left(\frac{x+2}{x}\right) = \log \frac{1}{4}$$

Siccome abbiamo una uguaglianza fra due logaritmi con la stessa base, uguagliamo gli argomenti:

$$\frac{x+2}{x} = \frac{1}{4}$$

Tale semplice equazione fratta dà come soluzione $x = -\frac{8}{3}$, sotto le C.E. $x \neq 0$.
Secondo le C.E. si ha che:

$$\begin{cases} x+2 & > & 0 \Rightarrow x > -2 \\ x & > & 0 \end{cases}$$

Come si vede, l'unica soluzione trovata va scartata, pertanto possiamo concludere che si tratta di un'equazione impossibile in $\mathbb{R}$

Es.296, pag. 211

$$\boxed{\log^2 x - \log x - 2 = 0}$$

Qui si sostituisce $\log x = t$ e $\log^2 x = t^2$. Quindi la nostra equazione diviene:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2,\ t = -1$$

Ciò implica che:

$$\log x = 2 \Rightarrow x = e^2, \quad \log x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

L'unica C.E. qui è $x > 0$, sicuramente soddisfatta da entrambe le soluzioni, che sono pertanto accettabili.

Es.302, pag. 212

$$\boxed{\frac{1+\log_{10} x}{\log_{10} x - 1} - \frac{\log_{10} x + 3}{2 - 2\log_{10} x} = \frac{11}{2}}$$

Qui basta sostituire $\log_{10} x = t$ e trasformare l'equazione logaritmica in un'equazione algebrica fratta:

$$\frac{1+t}{t-1} - \frac{t+3}{2-2t} = \frac{11}{2}$$

Tale equazione, risolta con i metodi usuali (ed un po' di pazienza!), dà la soluzione $t = 2$, sotto le C.E. $t - 1 \neq 0$ e $2 - 2t \neq 0$.
Ciò implica che:

$$\log_{10} x = 2 \Rightarrow x = 10^2$$

L'unica C.E. qui è $x > 0$, sicuramente soddisfatta dalla soluzione trovata, che è pertanto accettabile.

Es. 303, pag. 212

$$\boxed{\frac{4}{\log_9 x} - \left(2 - \frac{3}{\log_9 x}\right) - 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\log_9 x}\right) = 14}$$

Anche in questo caso poniamo $t = \log_9 x$, avendo:

$$\frac{4}{t} - \left(2 - \frac{3}{t}\right) - 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 14$$

Quindi:

$$\frac{4}{t} - 2 + \frac{3}{t} - 2 + \frac{2}{t} = 14 \Rightarrow \frac{9}{t} - 4 = 14$$

Facendo denominatore comune:

$$\frac{9-4t-14t}{t}=0 \Rightarrow \frac{9-18t}{t}=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$$

sotto la C.E. $t \neq 0$. Ricordando la sostituzione fatta, si ha che:

$$\log_9 x = \frac{1}{2}$$

Esponenziando M.A.M. in base 9 abbiamo:

$$9^{\log_9 x} = 9^{1/2} \Rightarrow x = \sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$$

Le uniche condizioni di esistenza impongono che $x > 0$, per cui l'unica soluzione accettabile è $x = 3$.

Es.314, pag. 212

$$\boxed{\log\left(e^x + e\right) = 2}$$

Esponenziando membro a membro in base e si ha:

$$e^{\log(e^x+e)} = e^2 \Rightarrow e^x + e = e^2$$

da cui: $e^x = e^2 - e$. Prendendo ora i logaritmi naturali di ambo i membri si ha:

$$\log e^x = \log(e^2 - e) \Rightarrow x = \log(e^2 - e)$$

Le C.E. imporrebbero che $e^x + e > 0$, ma questo avviene $\forall x \in \mathbb{R}$, in quanto nella disequazione c'è a primo membro la somma di due termini sempre positivi. La soluzione trovata è sicuramente accettabile. Per ritrovare quanto dato dal testo, osserviamo che è:

$$e^2 - e = e \cdot (e-1) \Rightarrow \log(e^2 - e) = \log[e \cdot (e-1)] = \log e + \log(e-1) = 1 + \log(e-1)$$

che è la soluzione scritta.

Es. tratto dalle dispense

$$\boxed{\log_2(x-1) + \log_2(x) = 0}$$

Sintetizziamo i logaritmi a primo membro, applicando la proprietà della somma, visto che la base è sempre la stessa. L'equazione diviene:

$$\log_2[(x-1) \cdot x] = 0$$

Esponenziando M.A.M. in base 2 abbiamo:

$$2^{\log_2(x-1)\cdot x} = 2^0 \Rightarrow (x-1) \cdot x = 1$$

Si ha subito che

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Approssimiamo le due soluzioni:

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq -0,618, \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$$

Imponendo le C.E. abbiamo che:

$$\begin{cases} x-1 & > & 0 \Rightarrow x > 1 \\ x & > & 0 \end{cases}$$

Si vede subito che delle due soluzioni è accettabile solamente x_2, per cui l'unica soluzione di questa equazione è:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1,618$$

Es. tratto dalle dispense

$$\boxed{\log_{10}(x-3) - \log_{10}(2x+1) = 0}$$

Qui si possono sintetizzare i logaritmi a primo membro oppure portare il secondo addendo a secondo membro, così si ha:

$$\log_{10}(x-3) = \log_{10}(2x+1)$$

Ora, essendo un'uguaglianza fra due logaritmi con la stessa base si possono uguagliare gli argomenti, avendo:

$$(x-3) = (2x+1) \Rightarrow x = 4$$

Imponendo le C.E. si ha:

$$\begin{cases} x-3 & > & 0 \Rightarrow x > 3 \\ 2x+1 & > & 0 \end{cases}$$

Come si vede, la soluzione soddisfa ad entrambe queste condizioni, per cui è da ritenersi accettabile.

Es. 313, pag. 212

$$\boxed{\log \frac{x^2-1}{x} = \log 2}$$

Si tratta di un'uguaglianza fra due logaritmi naturali, per cui basta uguagliare gli argomenti, avendo:

$$\frac{x^2-1}{x} = 2 \Rightarrow \frac{x^2-1-2x}{x} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

Tale equazione, sotto la C.E. $x \neq 0$, ammette le due soluzioni $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ e $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, che come si può osservare facilmente sono la prima negativa e la seconda positiva.

L'unica C.E. impone che $\dfrac{x^2-1}{x} > 0$. Tale disequazione fratta andrebbe risolta coi metodi soliti, ma si può facilmente procedere ad una sostituzione diretta delle due soluzioni trovate per accorgersi che sono entrambe accettabili.

Es.307, pag. 212

$$\boxed{\log_{1/3} \log_{1/3}(5x+9) = 0}$$

Qui abbiamo un doppio logaritmo. Eseguiamo una prima esponenziazione M.A.M. in base 1/3:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{1/3}\log_{1/3}(5x+9)} = \left(\frac{1}{3}\right)^0 \Rightarrow \log_{1/3}(5x+9) = 1$$

Esponenziamo nuovamente M.A.M.:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{1/3}(5x+9)} = \left(\frac{1}{3}\right)^1 \Rightarrow 5x+9 = \frac{1}{3}$$

Tale equazione ha per soluzione $x = -\dfrac{26}{15}$

Le C.E. sono costituite dalle due disequazioni: Imponendo le C.E. si ha:

$$\begin{cases} 5x+9 & > & 0 \Rightarrow x > -\dfrac{9}{5} \\ \log_{1/3}(5x+9) & > & 0 \end{cases}$$

mediante sostituzione diretta del risultato si ha:

$$\begin{cases} -\dfrac{26}{15} & > & -\dfrac{9}{5} \\ \log_{1/3}\left[5 \cdot \left(-\dfrac{26}{15}\right) + 9\right] & > & 0 \end{cases}$$

La prima disequazione risulta vera. La seconda è equivalente a:

$$\log_{1/3}\left(\frac{1}{3}\right) = 1 > 0$$

che è manifestamente vera, quindi la soluzione trovata è accettabile.

2 Disequazioni logaritmiche

Es. 345, pag. 213

$$\boxed{\log_2 \frac{x+3}{x} > 1}$$

Esponenziando M.A.M. in base 2 si ha:

$$2^{\log_2 \frac{x+3}{x}} > 2^1$$

Visto che la base è $2 > 1$, tra gli esponenti vige la stessa disuguaglianza, quindi la nostra disequazione diviene:

$$\frac{x+3}{x} > 2$$

Tale disequazione algebrica fratta è equivalente a:

$$\frac{x+3-2x}{x} > 0 \Rightarrow \frac{3-x}{x} > 0$$

Studiando separatamente i segni di numeratore e denominatore e poi eseguendo il prodotto dei segni, prendendo segno positivo, abbiamo:

$$0 < x < 3$$

Tale soluzione va posta a sistema con le C.E., generando il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \frac{x+3}{x} & > & 0 \\ 0 & < & x < 3 \end{cases}$$

Con un po' di pazienza si risolve la prima disequazione fratta, avendo che:

$$\begin{cases} x < -3 & \vee & x > 0 \\ 0 & < & x < 3 \end{cases}$$

Prendendo ora l'intersezione delle soluzioni si ha:

$$0 < x < 3$$

Es.346, pag. 213

$$\boxed{\log_{1/3}(x^2 - 3) > 0}$$

Esponenziando M.A.M. in base 1/3 si ha:

$$(1/3)^{\log_{1/3}(x^2-3)} > (1/3)^0$$

Visto che la base è $1/3 < 1$, tra gli esponenti vige la disuguaglianza contraria, quindi la nostra disequazione diviene:

$$x^2 - 3 < 1 \Rightarrow x^2 > 4$$

Tale disequazione ha per soluzioni:

$$x < -2 \vee x > 2$$

Tale soluzione va posta a sistema con le C.E., generando il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^2 - 3 & > & 0 \\ x < -2 & \vee & x > 2 \end{cases}$$

Risolvendo la prima disequazione si ha:

$$\begin{cases} x < -\sqrt{3} & \vee & x > \sqrt{3} \\ x < -2 & \vee & x > 2 \end{cases}$$

Prendendo ora l'intersezione delle soluzioni e notando che $-2 < -\sqrt{3} < \sqrt{3} < 2$, si ha:

$$-2 < x < -\sqrt{3} \vee \sqrt{3} < x < 2$$

Es.348, pag. 213

$$\boxed{\log_{1/2}(x^2 - x) > \log_{1/2} 6}$$

Esponenziando M.A.M. in base 1/2 si ha:

$$(1/2)^{\log_{1/2}(x^2-x)} > (1/2)^{\log_{1/2} 6}$$

Visto che la base è $1/2 < 1$, tra gli esponenti vige la disuguaglianza contraria, quindi la nostra disequazione diviene:

$$x^2 - x < 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 < 0$$

Tale disequazione ha per soluzioni:

$$-2 < x < 3$$

Tale soluzione va posta a sistema con le C.E., generando il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^2 - x & > & 0 \\ -2 < & x & < 3 \end{cases}$$

Risolvendo la prima disequazione si ha:

$$\begin{cases} x < 0 & \vee & x > 1 \\ -2 < & x & < 3 \end{cases}$$

Prendendo ora l'intersezione delle soluzioni, si ha:

$$-2 < x < 0 \vee 1 < x < 3$$

Es.352, pag. 214

$$\boxed{\log_{1/2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) < \log_{1/2} x}$$

Esponenziando M.A.M. in base 1/2 si ha:

$$(1/2)^{\log_{1/2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} < (1/2)^{\log_{1/2} x}$$

Visto che la base è $1/2 < 1$, tra gli esponenti vige la disuguaglianza contraria, quindi la nostra disequazione diviene:

$$\frac{x+1}{x-1} > x$$

Tale disequazione algebrica fratta è equivalente a:

$$\frac{x+1-x^2+x}{x} > 0 \Rightarrow \frac{-x^2+2x+1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{x^2-2x-1}{x} < 0$$

Studiando separatamente i segni di numeratore e denominatore e poi eseguendo il prodotto dei segni, prendendo segno negativo, abbiamo:

$$x < 1 - \sqrt{2} \vee 0 < x < 1 + \sqrt{2}$$

Tale soluzione va posta a sistema con le C.E., generando il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & > & 0 \\ x & > & 0 \\ x < 1-\sqrt{2} & \vee & 0 < x < 1+\sqrt{2} \end{cases}$$

Risolvendo la prima disequazione si ha:

$$\begin{cases} x < -1 & \vee & x > 1 \\ x & > & 0 \\ x < 1-\sqrt{2} & \vee & 0 < x < 1+\sqrt{2} \end{cases}$$

Prendendo ora l'intersezione delle soluzioni, notando che $-1 < 1-\sqrt{2} < 0 < 1 < 1+\sqrt{2}$, si ha:

$$1 < x < 1+\sqrt{2}$$

Es.353, pag. 214

$$\boxed{\log(7-x) + \log(12-x) > 2\log(x+3)}$$

Sintetizziamo i due logaritmi a primo membro ed applichiamo la proprietà della potenza per il logaritmo a secondo membro:

$$\log[(7-x)\cdot(12-x)] > \log(x+3)^2$$

Visto che la base è $2 > 1$, tra gli esponenti vige la stessa disuguaglianza, quindi la nostra disequazione diviene:

$$(7-x)(12-x) > (x+3)^2$$

Risolvendo, abbiamo:

$$x < 3$$

Tale soluzione va posta a sistema con le C.E., generando il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 7-x & > & 0 \Rightarrow x < 7 \\ 12-x & > & 0 \Rightarrow x < 12 \\ x+3 & > & 0 \Rightarrow x > -3 \\ x & < & 3 \end{cases}$$

Prendendo ora l'intersezione delle soluzioni, si ha:

$$-3 < x < 3$$

Es.354, pag. 214

$$\boxed{1 + 2\log x \geq \log(2x)}$$

Portiamo tutti i logaritmi a primo membro:

$$2\log x - \log 2x \geq -1$$

Applichiamo la proprietà della potenza per il primo logaritmo e sintetizziamo a primo membro:

$$\log\left(\frac{x^2}{2x}\right) \geq -1 \Rightarrow \log\frac{x}{2} \geq -1$$

Esponenziamo M.A.M. in base e visto che abbiamo logaritmi naturali.

Visto che la base è $e > 1$, tra gli esponenti vige la stessa disuguaglianza, quindi la nostra disequazione diviene:

$$\frac{x}{2} \geq e^{-1}$$

Risolvendo, abbiamo:

$$x \geq \frac{2}{e}$$

Tale soluzione va posta a sistema con le C.E., generando il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \geq \dfrac{2}{e} \end{cases}$$

Prendendo ora l'intersezione delle soluzioni, visto che $2/e > 0$, si ha:

$$x > \frac{2}{e}$$

Es.359, pag. 214

$$\boxed{\log^2 x - 3\log x - 4 < 0}$$

Qui basta porre $\log x = t$ e risolvere pertanto:

$$t^2 - 3t - 4 > 0 \Rightarrow -1 < t < 4$$

Si ha, risostituendo, quindi, che $-1 < \log x < 4$. Esponenziamo tutti i membri in base e, che essendo $e > 1$ non altera la disugualianza fra gli esponenti:

$$e^{-1} < e^{\log x} < e^4 \Rightarrow e^{-1} < x < e^4$$

Tale soluzione va posta a sistema con le C.E., generando il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x > 0 \\ e^{-1} < x < e^4 \end{cases}$$

Prendendo ora l'intersezione delle soluzioni, visto che $1/e > 0$ e $e^4 > 0$, si ha:

$$e^{-1} < x < e^4$$

Es.372, pag. 215

$$\boxed{\log_2(e^{2x} - e^x) > 1}$$

Esponenziamo tutti i membri in base 2, che essendo $2 > 1$ non altera la disugualianza fra gli esponenti:

$$e2^{\log_2(e^{2x}-e^x)} > 2^1 \Rightarrow e^{2x} - e^x > 2$$

La disequazione risolvente è pertanto:

$$e^{2x} - e^x - 2 > 0$$

Per risolverla basta ovviamente sostituire $e^x = t$, avendo:

$$t^2 - t - 2 > 0 \Rightarrow t < -1 \vee t > 2$$

Risostituendo, si ha che $e^x < -1 \vee e^x > 2$. La prima disequazione è impossibile, mentre la seconda è soddisfatta per $x > \log 2$.

Tale soluzione va posta a sistema con le C.E., generando il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} e^{2x} - e^x > 0 \\ x > \log 2 \end{cases}$$

La prima disequazione va risolta notando che:

$$e^{2x} - e^x > 0 \Rightarrow e^{2x} > e^x \Rightarrow 2x > x \Rightarrow x > 0$$

Il sistema risolvente diviene:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x > \log 2 \end{cases}$$

Prendendo ora l'intersezione delle soluzioni, visto che $\log 2 \simeq 0,69 > 0$, si ha:

$$x > \log 2$$

Es.380, pag. 215

$$\boxed{\log_{1/2}(2^x - 1) > -2}$$

Esponenziamo tutti i membri in base $1/2 < 1$, prendendo la disuguaglianza inversa fra gli esponenti:

$$(1/2)^{\log_{1/2}(2^x-1)} < (1/2)^{-2} \Rightarrow 2^x - 1 < 4$$

La disequazione risolvente è pertanto:

$$2^x < 5 \Rightarrow x < \log_2 5$$

Tale soluzione va posta a sistema con le C.E., generando il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 2^x - 1 & > & 0 \\ x & < & \log_2 5 \end{cases}$$

La prima disequazione va risolta notando che:

$$2^x - 1 > 0 \Rightarrow 2^x > 1 \Rightarrow x > 0$$

Il sistema risolvente diviene:

$$\begin{cases} x & > & 0 \\ x & < & \log_2 5 \end{cases}$$

Prendendo ora l'intersezione delle soluzioni, visto che $\log_2 5 \simeq 2,32 > 0$, si ha:

$$0 < x < \log_2 5$$

Es.inventato

$$\boxed{\log x^2 - \log^2 x \geq 0}$$

Si faccia grande attenzione alla differenza di significato:

- $\log x^2 = 2 \log x$ significa che solamente la variabile x è elevata al quadrato;
- $\log^2 x = (\log x)^2$ significa invece che si deve elevare al quadrato tutto il risultato dell'operazione di logaritmo

Usiamo la proprietà della potenza per il primo logaritmo, avendo:

$$2 \log x - \log^2 x \geq 0$$

Sostituiamo $\log x = t$, avendo $2t - t^2 \geq 0 \Rightarrow t^2 - 2t \leq 0$

La disequazione ha come soluzione: $0 \leq t \leq 2$, quindi si ha che:

$$\log x \geq 0 \Rightarrow e^{\log x} \geq e^0 \Rightarrow x \geq 1 \wedge x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

e che

$$\log x \leq 2 \Rightarrow e^{\log x} \leq e^2 \Rightarrow x \leq e^2 \wedge x \geq 0 \Rightarrow x \leq e^2$$

La soluzione risulta dall'unione di queste due, ossia:

$$1 \leq x \leq e^2$$

Tale soluzione va posta a sistema con le C.E., generando il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x & > & 0 \\ 1 \leq & x & \leq e^2 \end{cases}$$

La soluzione finale è pertanto:

$$1 \leq x \leq e^2$$