

EQUAZIONE DI STATO e LEGGI DEI GAS

esercizi risolti

Classi quarte L.S.

In questa dispensa verrà riportato lo svolgimento di alcuni esercizi inerenti l'equazione di stato dei gas perfetti e le principali trasformazioni termodinamiche.

Riprendiamo alcuni concetti utili.

TRASFORMAZIONE ISOBARA: Trasformazione dello stato di un gas che avviene senza variazione della pressione a cui è soggetto il gas stesso (es. variazione della temperatura e quindi del volume di un gas entro cilindro con pistone mobile che esercita sul gas sempre la stessa pressione). Il legame a pressione costante, tra V e T è espressa dalla *prima legge di Gay-Lussac o legge di Volta* :

$$V_f = V_0(1 + \alpha T)$$

ove V_f è il volume finale del gas (espresso in qualsiasi udm), V_0 il volume che il gas ha alla temperatura di 0°C e T la temperatura finale del gas, espressa in gradi Celsius.

Se le temperature sono espresse in gradi Kelvin, si ha che:

$$\frac{V}{T} = \text{cost}$$

Sul piano di Clapeyron (V, P) è denotata da un segmento orizzontale.

TRASFORMAZIONE ISOCORA: Trasformazione dello stato di un gas che avviene senza variazione del volume (es. variazione della temperatura e quindi della pressione di un gas entro cilindro con pistone bloccato). Il legame a volume costante, tra T e P è espressa dalla *seconda legge di Gay-Lussac o legge di Charles*:

$$P_f = P_0(1 + \alpha T)$$

ove P_f è la pressione finale del gas (espressa in qualsiasi udm), P_0 la pressione che il gas ha alla temperatura di 0°C e T la temperatura finale del gas, espressa in gradi Celsius.

Se le temperature sono espresse in gradi Kelvin, si ha che:

$$\frac{P}{T} = \text{cost}$$

Sul piano di Clapeyron (V, P) è denotata da un segmento verticale.

TRASFORMAZIONE ISOTERMA: Trasformazione che avviene mantenendo costante la temperatura del gas, producendo quindi una variazione di pressione in seguito ad una variazione di volume o viceversa. È espressa dalla *legge di Boyle-Mariotte*:

$$P \cdot V = K \Rightarrow P_0 \cdot V_0 = P_1 \cdot V_1 = \dots$$

Sul piano di Clapeyron (V, P) è denotata da un ramo di iperbole equilatera.

Equazione di stato dei gas perfetti:

Legge che descrive lo stato termodinamico di un gas perfetto a partire da due qualsiasi delle sue variabili termodinamiche macroscopiche P, V, T ovvero un legame analitico fra queste tre grandezze. Può essere espressa nelle tre differenti forme:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

ove P e V rappresentano rispettivamente la pressione (in Pa) ed il volume (in m^3), n è il numero di moli del gas, R è una costante e vale per tutti i gas $8,314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ e T è la temperatura assoluta.

Ricordando poi che $n = \frac{N}{N_A}$, ove N è il numero totale di particelle del gas e N_A il numero di Avogadro ($6,023 \cdot 10^{23}$ particelle/mole), definendo $K_B = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-12} J/K$, costante di Boltzmann, si ha anche:

$$P \cdot V = N \cdot K_B \cdot T$$

Infine, la legge si può anche esprimere come:

$$\frac{P \cdot V}{T} = \text{cost}$$

esercizi sulle LEGGI DEI GAS

1

Un gas ha inizialmente una pressione pari a $P_0 = 2,3 \cdot 10^5 Pa$ ed un volume di 5 litri. Se mantenendo costante la temperatura lo si porta alla pressione atmosferica, quale volume andrà ad occupare?

Si tratta di una trasformazione isoterma ($T = \text{cost}$), tra lo stato iniziale $S_0(5 l; 2,3 \cdot 10^5 Pa)$ e finale $S_f(V_f; 1,013 \cdot 10^5 Pa)$.

Visto che la pressione deve diminuire, il gas subirà un incremento di volume.

Applicando la legge isoterma, si ha:

$$P_0 \cdot V_0 = P_f \cdot V_f \Rightarrow V_f = \frac{P_0 \cdot V_0}{P_f} = \frac{2,3 \cdot 10^5 \cdot 5}{1,013 \cdot 10^5} = 11,35 l$$

2

Un gas che alla temperatura $T_0 = 273 K$ ha un volume pari a $V_0 = 2 m^3$. Di quanto cambia il suo volume se viene portato isobaricamente alla temperatura $T_f = 300 K$?

Si tratta di una trasformazione isobara ($P = \text{cost}$), che consiste in un riscaldamento ($\Delta T = 300 - 273 = 27 K$) in seguito al quale il gas deve aumentare di volume.

Visto che la T è espressa in Kelvin, usiamo la legge isobara nella forma $V/T = \text{cost}$, avendo che:

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_f}{T_f} \Rightarrow V_f = V_0 \cdot \frac{T_f}{T_0} = 2 \cdot \frac{300}{273} = 2,2 m^3$$

Se avessimo voluto applicare la legge nella prima forma avremmo avuto, visto che abbiamo il volume V_0 a $T = 0^\circ C$, e che $T_f = 300^\circ K = 300 - 273, 16 = 26,84^\circ C$:

$$V_f = V_0 \left(1 + \frac{1}{273, 16} \cdot T\right) = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{273, 16} \cdot 26, 84\right) = 2,2 m^3$$

3

Una pentola a pressione fa scattare la valvola di sicurezza se, riscaldandola, la pressione al suo interno raggiunge $P = 3 Atm$. Supponendo che all'interno della pentola ci sia, inizialmente, del vapore acqueo in condizioni normali, a quale temperatura si trova il vapore quando scatta la valvola?

E' chiaro che il gas subisce un incremento di pressione a seguito di un riscaldamento a volume costante, quindi si tratta di una trasformazione isocora ($V = \text{cost}$).

Ricordiamo che per condizioni normali si intendono i valori $P_0 = 1 Atm$ e $T_0 = 273 K$. Quindi, in tale esercizio, disponiamo del valore di P_0 , pressione a $T = 0^\circ C$.

Applicando la seconda legge di Gay-Lussac si ha, essendo $P_f = P_0(1 + \frac{1}{273,16} \cdot T)$:

$$T_f = \frac{\frac{P_f}{P_0} - 1}{\frac{1}{273,16}} = \frac{\frac{3}{1} - 1}{\frac{1}{273,16}} = 546,32 \text{ C}$$

La temperatura finale vale allora $T_f = 546,32 \text{ C}$.

Potevamo effettuare il calcolo anche con la seconda forma della legge isocora, visto che abbiamo la temperatura espressa in Kelvin

$$\frac{P_0}{T_0} = \frac{P_f}{T_f} \Rightarrow T_f = \frac{P_f}{P_0} \cdot T_0 = \frac{3}{1} \cdot 273,16 = 819,32 \text{ K}$$

che equivalgono proprio ai 546°C trovati sopra!

4

Un gas subisce una trasformazione isocora che lo porta dallo stato $S_A(P_A = 1 \text{ Atm}; T_A = 200 \text{ K})$ allo stato $S_B(V_B = 5 \text{ l}; T_B = 400 \text{ K})$ e successivamente una trasformazione isoterna che lo porta allo stato $S_C(V_C = 8 \text{ l})$. Calcolare il valore di P_C .

Si tratta di una successione di due trasformazioni in sequenza.

Per calcolare il valore della pressione finale, si dovrà usare la legge isoterna di Boyle:

$$P_C \cdot V_C = P_B \cdot V_B \Rightarrow P_C = \frac{V_B \cdot P_B}{V_C}$$

Noto il valore di V_C , sarà necessario calcolarci i valori inerenti lo stato S_B a partire dallo stato S_A .

La transizione da S_A a S_B avviene tramite una isocora. Osservato che non conosciamo il valore di P_0 , pressione a zero Celsius, dobbiamo usare la seconda forma della legge isocora, visto che T è espressa in Kelvin, ottenendo:

$$\frac{P_A}{T_A} = \frac{P_B}{T_B} \Rightarrow P_B = P_A \cdot \frac{T_B}{T_A} = 1 \cdot \frac{400}{200} = 2 \text{ Atm}$$

Il volume V_B coincide con V_A , in quanto la trasformazione è isocora, quindi $V_B = 5 \text{ l}$.

Con tale dato, andiamo a calcolare il valore di P_C con la legge di Boyle. La pressione finale vale allora:

$$P_C = \frac{V_B \cdot P_B}{V_C} = \frac{5 \cdot 2}{8} = 1,25 \text{ Atm}$$

N.B. Se avessimo voluto invece usare la prima forma della legge isocora, nella omonima trasformazione fra lo stato A e lo stato B , avremmo prima dovuto calcolare la pressione a $T = 0^\circ\text{C}$, a partire dallo stato A

Per la seconda legge di Gay-Lussac:

$$P_A = P_0(1 + \frac{1}{273,16} \cdot T_A) \Rightarrow P_0 = \frac{P_A}{1 + \frac{1}{273,16} \cdot T_A}$$

Ove $T_A = 200 - 273,16 = -73,16^\circ\text{C}$. Inserendo i dati:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{1}{273,16} \cdot (-73,16)} = 1,366 \text{ Atm}$$

Ora possiamo applicare la legge nella prima forma, per trovare P_B . Osservato che $T_B = 400 - 273,16 = 126,84^\circ\text{C}$:

$$P_B = 1,366 \left[1 + \frac{1}{273,16} \cdot 126,84 \right] = 2 \text{ Atm}$$

che, come si vede, coincide col valore trovato direttamente con la seconda forma!

5

Un gas effettua una trasformazione isoterma AB alla temperatura $T = 60\text{ C}$ e successivamente un'isobara BC . Calcolare la temperatura nello stato C , sapendo che $P_A = 4 \cdot 10^5\text{ Pa}$, che $P_B = 1,5 \cdot 10^5\text{ Pa}$, $V_A = 7\text{ dm}^3$ e $V_C = 10\text{ dm}^3$

Applichiamo in sequenza le due trasformazioni, calcolando tutti i parametri degli stati:

1. Isoterma AB : dello stato finale B è nota solo la pressione, per cui ricaviamo il volume dalla legge di Boyle:

$$P_A \cdot V_A = P_B \cdot V_B \Rightarrow V_B = \frac{P_A \cdot V_A}{P_B} = 18,67\text{ dm}^3$$

2. isobara BC : ricaviamo la temperatura finale che permette di contrarre il volume dal valore V_B al valore $V_C < V_B$. Applichiamo la prima legge di Gay-Lussac nella seconda forma, osservato che $T_B = 60 + 273,16 = 333,16\text{ C}$:

$$\frac{V_B}{T_B} = \frac{V_C}{T_C} \Rightarrow T_C = T_B \cdot \frac{V_C}{V_B} = 333,16 \cdot \frac{10}{18,67} = 178,4\text{ K}$$

La temperatura dello stato C è pertanto:

$$T_C = 178,4\text{ K}$$

EQUAZIONE DI STATO DEI GAS PERFETTI

6

Calcolare il volume iniziale di un gas che si trova alla temperatura di 300 K e alla pressione di 2 Atm , che viene portato ad occupare un volume di 10 l alla temperatura di 280 K e alla pressione di $2,5\text{ Atm}$. Il gas risulta compresso o dilatato?

Ricaviamo, dalla conoscenza completa dello stato C , il numero di moli n . Ovviamente $V_f = 10\text{ l} = 0,01\text{ m}^3$, $P_f = 2,5\text{ Atm} = 2,5 \cdot 1,013 \cdot 10^5\text{ Pa} = 2,5325 \cdot 10^5\text{ Pa}$. Si ha:

$$n = \frac{P_f \cdot V_f}{R \cdot T_f} = \frac{2,5325 \cdot 10^5 \cdot 0,01}{8,314 \cdot 280} = 1,088$$

Conoscendo il numero di moli, deduciamo, per lo stato iniziale, il valore del volume:

$$V_0 = n \cdot R \cdot T_0 P_0 = \frac{1,088 \cdot 8,314 \cdot 300}{2 \cdot 1,013 \cdot 10^5} = 0,013\text{ m}^3$$

7

$n = 2,5$ moli di un gas perfetto, contenute in un volume $V = 80\text{ l}$ sono compresse isotermicamente da uno stato A ad uno stato B , aumentando la pressione da $P_A = 1,5\text{ Atm}$ a $P_B = 1,8\text{ Atm}$. Raggiunto lo stato B , si aumenta ancora la pressione mantenendo costante il volume, sino a giungere alla temperatura $T_C = 620\text{ K}$. Calcolare la pressione P_C .

La pressione dello stato finale C , dipenderà da quella dello stato B intermedio secondo la legge isocora:

$$\frac{P_C}{T_C} = \frac{P_B}{T_B}$$

La pressione P_B e la temperatura finale T_C sono note: ci manca la temperatura T_B . Essa, che è pari a quella nello stato iniziale T_A , si può calcolare dall'equazione di stato, applicata allo stato A :

$$T_A = T_B = \frac{P_A \cdot V_A}{n \cdot R}$$

Facciamo attenzione a trasformare le unità di misura:

- $V_A = 80\text{ l} = 0,08\text{ m}^3$

- $P_A = 1,5 \text{ Atm} = 1,5 \cdot 1,013 \cdot 10^5 = 1,5195 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Ponendo i valori numerici nell'equazione precedente, si ha:

$$T_A = T_B = \frac{1,5195 \cdot 10^5 \cdot 0,08}{2,5 \cdot 8,314} = 584,84 \text{ K}$$

Usiamo ora la legge isocora:

$$P_C = P_B \cdot \frac{T_C}{T_B} = 1,8 \cdot \frac{620}{584,84} = 1,91 \text{ Atm}$$

8

Quale è il volume occupato da 10 g di gas Neon alla temperatura $T = 25 \text{ C}$ e a pressione ordinaria, sapendo che la sua massa molare è $m_{mol} = 20,18 \text{ g}$?

Ovviamente $T = 25 + 273 = 298 \text{ K}$ e $P = 1 \text{ Atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Il volume inerente lo stato del gas si determina con l'equazione di stato, a patto di determinare prima il numero n di moli. Sapendo che

$$n = \frac{m}{m_{mol}}$$

Si ha che $n = 10/20,18 = 0,495 \text{ moli}$.

Applicando l'equazione di stato si ha:

$$V = \frac{n \cdot R \cdot T}{P} = \frac{0,498 \cdot 8,314 \cdot 298}{1,013 \cdot 10^5} = 0,012 \text{ m}^3$$

9

A quale pressione 4 moli di ossigeno si trovano ad una temperatura $T = 25 \text{ C}$ in un volume $V = 3,2 \text{ l}$?

Convertendo le unità di misura, si ha ovviamente $T = 25 + 273 = 298 \text{ K}$ e $V = 3,2 \text{ l} = 0,0032 \text{ m}^3$.

Applicando l'equazione di stato, si ha:

$$P = \frac{n \cdot R \cdot T}{V} = \frac{4 \cdot 8,314 \cdot 298}{0,0032} = 3,097 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

che corrisponde a circa 30,57 Atm.

10

3 moli di gas perfetto alla temperatura di $T_A = 400 \text{ K}$ e alla pressione di $P_A = 2,5 \text{ Atm}$ subiscono un'espansione isoterma AB in modo che nello stato B il volume sia doppio. Il gas è quindi compresso isobaricamente sino a tornare al volume di partenza. Determina lo stato finale del gas.

Se la trasformazione AB è isoterma, ovviamente $T_A = T_B$ e se è $V_B = 2 \cdot V_A$, allora sarà anche $P_B = \frac{P_A}{2} = 1,25 \text{ Atm}$.

Se l'ultima trasformazione è isobara, allora $P_B = P_C = \frac{P_A}{2} = 1,25 \text{ Atm}$. Sappiamo anche che l'ultima trasformazione riporta il volume al valore iniziale, per cui $V_C = V_A$.

Dunque, applicando la prima legge di Gay-Lussac:

$$\frac{V_B}{T_B} = \frac{V_C}{T_C} \Rightarrow T_C = T_B \cdot \frac{V_C}{V_B} = T_A \cdot \frac{V_A}{2 \cdot V_A} = \frac{T_A}{2} = 200 \text{ K}$$

Riassumendo, gli stati sono caratterizzati da:

- STATO A: $(V_A, 2,5 \text{ Atm}, 400 \text{ K})$
- STATO B: $(2V_A, 1,25 \text{ Atm}, 400 \text{ K})$

- STATO A: $(V_A, 2,5 \text{ Atm} 200 \text{ K})$

Lo stato C si trova compiutamente applicando indifferentemente l'equazione di stato coi valori di T_A e P_A , oppure coi valori di T_C e P_C .

Si ha dunque:

$$V_C = V_A = \frac{n \cdot R \cdot T_A}{P_A} = \frac{3 \cdot 8,314 \cdot 400}{2,5 \cdot 1,013 \cdot 10^5} = 0,039 \text{ m}^3 = 39 \text{ l}$$