QUESITI DI ANALISI
Derivate
versione senza grafici

1

Dai la definizione di derivata di una funzione $f(x)$ in un punto x_0, illustra il suo significato geometrico e serviti di tale definizione per dimostrare che $f'(x_0) = 1\ \forall x_0$ se $f(x) = x$

Sia data una funzione analitica $f(x)$ ed un punto x_0 del suo dominio. Si dice $f'(x_0)$, derivata di f in x_0 il limite, se esiste, del rapporto incrementale della funzione f calcolato in x_0, in simboli:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

La derivata di una funzione in un punto coincide geometricamente con il coefficiente angolare m_t della tangente al grafico di tale funzione, passante per il punto, ossia:

$$\boxed{f'(x_0) = m_t}$$

Bisogna stare attenti a non confondere la definizione di *derivata* di f in un punto con quella di *funzione derivata*. La funzione derivata $f'(x)$ è quella funzione che associa ad ogni punto x_0 il valore $f'(x_0)$.

Con tale definizione e quella di derivata in un punto, mostriamo allora che:

$$f'(x_0) = 1 \quad \forall x_0, f(x) = x$$

Prendiamo un x_0 e la funzione $f(x) = x$, che si chiama *funzione identità* o *funzione identica*. Tale funzione associa ad ogni numero reale x il numero stesso, per cui $y = x$. In particolare anche $f(x_0) = x_0$ stesso. Applicando la definizione di derivata, si ha:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = 1$$

Si osservi che $f(x_0 + h) = x_0 + h$ e che, come già detto $f(x_0) = x_0$.

Si può allora concludere che questo risultato è indipendende dalla scelta di x_0, pertanto si dice che la funzione derivata dell identità vale 1, in simboli:

$$y = x \Rightarrow y' = 1$$

N.B. In maniera del tutto analoga si può dimostrare altrettanto facilmente che se $y = k$ costante, allora $y' = 0$.

2

Dopo aver spiegato come trovare il coefficiente angolare della retta tangente ad una curva in un suo punto x_0, dimostra che la tangente al grafico della curva

$$y = x^3 - x^2 - x + 1$$

ha pendenza negativa

Si deve innanzitutto ricordare il significato geometrico della derivata (vedi 1). Il valore che la derivata di una funzione assume in un certo punto x_0 corrisponde al coefficiente angolare m_t della retta tangente al grafico condotta per quel punto, ossia, come già detto:

$$f'(x_0) = m_t$$

Quindi, data una funzione $f(x)$ ed un suo punto x_0, per determinare il coefficiente angolare m_t della retta tangente al grafico di $f(x)$ passante per x_0, è necessario:

1. trovare l'espressione di $f'(x)$, funzione derivata prima di $f(x)$, che dà tutti i possibili coefficienti angolari delle tangenti al variare di x;
2. sostituire a x il valore x_0 e calcolare il risultato numerico, che coinciderà col coefficiente angolare cercato

Se si vuole, inoltre l'equazione completa della retta tangente, è necessario anche:

1. trovare l'ordinata $y_0 = f(x_0)$ del punto T di tangenza
2. usare la formula del fascio proprio di rette passante per $T(x_0, y_0)$, ossia $t : y - y_0 = m(x - x_0)$, ove m è il valore calcolato prima.

Nel nostro caso, essendo $y = x^3 - x^2 - x + 1$, la sua derivata sarà $f'(x) = y' = 3x^2 - 2x - 1$ e quindi se $x = 0$, la pendenza cercata vale $f'(0)$, cioè

$$\boxed{m = 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 1 = -1 < 0}$$

3

Sia data una funzione $f(x)$ continua nel punto x_0: allora essa è anche derivabile in x_0? Se invece l'ipotesi prevede che $f(x)$ è derivabile in x_0, si può concludere che $f(x)$ è continua in x_0? Spiega, riportando opportuni esempi.

In tale domanda si chiede di parlare della correlazione esistente tra i concetti di derivabilità e continuità in un punto. Per la nozione di continuità si veda la dispensa precedente. Da notare subito che mentre ogni funzione derivabile in un punto è ivi anche continua, il viceversa non è in generale valido, ossia esistono funzioni che pur essendo perfettamente continue in un punto, non risultano derivabili.

La definizione di derivabilità in un punto è la seguente:

Definizione 1 *Una funzione f si dice derivabile in un punto x_0 se esistono finite $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$, valendo la seguente condizione:*

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Coi simboli f'_+ e f'_- si intende rispettivamente la derivata destra e quella sinista nel punto considerato (basta considerare i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale). In altre parole, una funzione è derivabile in un punto se la sua derivata destra e la sua derivata sinistra coincidono in quel punto, ossia, geometricamente, se le tangenti al grafico destra e sinistra hanno la stessa pendenza, ovviamente finita.

Continuità quindi non implica derivabilità: la dimostrazione è essenzialmente geometrica. E' sufficiente mostrare esempi di funzioni continue in un punto ma non derivabili.

Esistono tre evenienze:

1. $f(x)$ è continua in x_0, ma $f'_+ \neq f'_-$: x_0 rappresenta un punto angoloso. Vi sono due tipi di punti angolosi, a seconda che i valori (diversi!) delle derivate dx e sx siano o meno finiti. E' un semplice esercizio tracciare il grafuco di una funzione le cui derivate in un punto sono diverse ma finite, oppure per cui una derivata è finita ma l'altra infinita
2. $f(x)$ è continua in x_0, ma f'_+ e f'_- sono entrambe infinite ma con segno diverso: x_0 rappresenta una cuspide
3. $f(x)$ è continua in x_0, ma f'_+ e f'_- sono entrambe infinite ma con lo stesso segno: in tal caso x_0 è un flesso a tangente verticale.

Nella tabella sottostante sono riassunti tutti i vari casi possibili

Derivata destra	**derivata sinistra**	**punto di non derivabilità**
finita d_+	finita d_-	punto angoloso
finita	infinita	punto angoloso
infinita	finita	punto angoloso
$+\infty$	$+\infty$	flesso a tangente vert. ascendente
$-\infty$	$-\infty$	flesso a tangente vert. discendente
$+\infty$	$-\infty$	cuspide verso l'alto
$-\infty$	$+\infty$	cuspide verso il basso

Da precisare infine che la derivabilità implica sempre anche la continuità, ossia una funzione derivabile in x_0 è anche ivi continua. La dimostrazione, intuitivamente potrebbe essere la seguente: se la funzione è derivabile deve esistere il limite del rapporto incrementale in x_0, per calcolare il quale è comunque necessario determinare il valore di $f(x_0)$. Una dimostrazione rigorosa è riportata nel libro di testo.

4

Dopo aver enunciato le formule per calcolare la derivata del prodotto, del quoziente e della funzione composta di due funzioni, servitene per determinare l'espressione delle funzioni derivate di:

- $y_1 = 2 \cdot \cos x \cdot e^x$
- $y_2 = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$
- $y_3 = \sqrt{x^2-1}$

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ entrambe derivabili, con $g(x) \neq 0$, si possono definire le seguenti funzioni:

- funzione prodotto: $f(x) \cdot g(x)$
- funzione quoziente: $\dfrac{f(x)}{g(x)}$
- funzione composta: $f(g(x))$

Le formule per calcolare le derivate di queste funzioni sono rispettivamente:

- $D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $D\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
- $Df(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Nei nostri casi si ha:

- $y_1 = 2 \cdot \cos x \cdot e^x$: essa è il prodotto di $f(x) = 2\cos x$ e $g(x) = e^x$, dunque

$$y_1' = -2\sin x \cdot e^x + 2\cos x \cdot e^x$$

- $y_2 = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$: essa è il quoziente di $f(x) = 2x+1$ e $g(x) = x^2+1$, dunque:

$$y_2' = \frac{D(2x+1)(x^2+1) - (2x+1)D(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2+1) - (2x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2 - 4x^2 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 - 2x - 2}{(x^2+1)^2} = -2\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}$$

- $y_3 = \sqrt{x^2-1}$: essa è composta fra $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 1$. Applicando la formula, si ha: $f'(x) = 1/2\sqrt{2}$, $g'(x) = 2x$. Quindi:

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

5

Enuncia il teorema di Rolle. Dimostra che nell'intervallo $\left[\frac{1}{4};4\right]$ la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$$

verifica le ipotesi di tale teorema e trova i punti in cui la derivata si annulla

Ricordiamo l'enunciato del teorema di Rolle:

Teorema 1 (Teorema di ROLLE) *Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$, tale che $f(a) = f(b)$. Allora esiste almeno un $c \in [a,b]$ tale che si abbia $f'(c) = 0$*

In sostanza il teorema dice che se una funzione continua e derivabile (tranne gli estremi) in un intervallo compatto assume lo stesso valore agli estremi dell'intervallo, esiste almeno un punto in cui la derivata prima si annulla. L'interpretazione fisica è la seguente: se in un moto qualsiasi (non circolare) posizione iniziale e finale coincidono, c'è stato almeno un istante in cui la velocità istantanea è stata nulla.

Importante ribadire le ipotesi (irrinunciabili):

- $f(x)$ continua nel compatto $[a,b]$;
- $f(x)$ derivabile in tutti i punti del compatto, al limite, tranne gli estremi
- $f(a) = f(b)$ ossia la funzione coincide agli estremi

Vediamo se per la nostra funzione sono soddisfatte tali ipotesi:

- $f(x)$ è definita su $D = \mathbb{R} \setminus -1$. Ora, la discontinuità non appartiene all'intervallo $I = \left[\frac{1}{4};4\right]$, quindi in I la nostra funzione è continua.
- La funzione f ha per derivata

  $$f'(x) = \frac{D(\sqrt{x}) \cdot (1+x) - \sqrt{x}D(1+x)}{(x+1)^2} =$$

  $$\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \cdot (1+x) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{1+x-2x}{2\sqrt{x}(1+x)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}$$

  Questa derivata non esiste finita, ovviamente, nei punti $x = 0$, $x = -1$ che non fanno parte dell'intervallo considerato, quindi la funzione si può ritenere derivabile in I
- $f(1/4) = \frac{\sqrt{1/4}}{1+1/4} = 2/5$ e invece $f(4) = \frac{\sqrt{4}}{1+4} = 2/5$, quindi $f(a) = f(b)$

Le ipotesi sono tutte verificate, quindi esiste un $c \in I$ tale che $f'(c) = 0$. Avendo già calcolato la derivata prima, basta risolvere l'equazione nell'incognita c:

$$f'(c) = \frac{1-c}{2\sqrt{c}(1+c)^2} = 0 \Rightarrow c = 1$$

Il punto di ascissa $c = 1$, sicuramente appartenente all'intervallo, verifica il teorema

6

Enuncia il teorema di Lagrange. Dimostra che nell'intervallo $[0;4]$ la funzione

$$y = x - \sqrt{x^2+9}$$

verifica le ipotesi di tale teorema e trova i punti c in cui vale la tesi del teorema

Ricordiamo l'enunciato del teorema di Lagrange:

Teorema 2 (Teorema di LAGRANGE) *Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Allora esiste almeno un $c \in [a,b]$ tale che si abbia $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$*

In sostanza il teorema dice che se una funzione è continua e derivabile (tranne gli estremi) in un intervallo compatto, esiste almeno un punto in cui la derivata prima è pari alla pendenza della retta di media pendenza. L'interpretazione fisica è la seguente: in un moto qualsiasi, c'è sempre almeno un istante in cui la velocità istantanea coincide con la velocità media.

Importante ribadire le ipotesi (irrinunciabili):

- $f(x)$ continua nel compatto $[a,b]$;
- $f(x)$ derivabile in tutti i punti del compatto, al limite, tranne gli estremi

Vediamo se per la nostra funzione sono soddisfatte tali ipotesi:

- $f(x)$ è definita su $D = \mathbb{R}$, visto che l'unica condizione di esistenza (radice quadrata!) imporrebbe: $x^2 + 9 \geq 0$, che è sempre verificata. A maggior ragione, se $I \subset \mathbb{R}$, allora la funzione è continua in I.
- La funzione f ha per derivata

  $$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2+9}} \cdot 2x = \frac{2\sqrt{x^2+9} - 2x}{2\sqrt{x^2+9}}$$

  Questa derivata esiste finita su tutto $\mathbb{R}$,quindi la funzione si può ritenere derivabile in I

Le ipotesi sono tutte verificate, quindi esiste un $c \in I$ tale che $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Determiniamo la pendenza media su I:

$$f(b) = f(4) = 4 - \sqrt{4^2+9} = -1, \quad f(a) = f(0) = 0 - \sqrt{0^2+9} = -3$$

per cui, la curva ha pendenza media pari a:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{-1-(-3)}{4-0} = \frac{1}{2}$$

Avendo già calcolato la derivata prima, basta risolvere l'equazione nell'incognita c:

$$f'(c) = \frac{2\sqrt{c^2+9} - 2c}{2\sqrt{c^2+9}} = \frac{1}{2}$$

Senza addentrarsi nei calcoli, si trova che ll punto di ascissa $c = \sqrt{3}$, sicuramente appartenente all'intervallo, verifica il teorema.

7

Enuncia il teorema di De l'Hopital, spiegando la sua utilità e servitene per calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2+x}, \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 1}{x}$$

I teoremi di De l'Hopital sono degli strumenti utilissimi nella risoluzione delle forme indeterminate sia $0/0$ che ∞/∞, come visto nella dispensa sui limiti. L'enunciato è il seguente:

Siano date due funzioni derivabili $f(x)$ e $g(x)$ in un insieme $I \subseteq \mathbb{R}$, con $g'(x) \neq 0$ in I. Supponiamo inoltre che esista il limite del rapporto $f'(x)/g'(x)$ delle derivate. Allora esiste anche il limite di $f(x)/g(x)$ e si ha che:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

In sostanza il teorema ci dà una regola per poter calcolare il limite di forme indeterminate, perchè se $f(x)$ e $g(x)$ tendono o entrambe a zero o entrambe a ∞, si può calcolare il limite (indeterminato) del loro rapporto semplicemente calcolando il limite del rapporto delle derivate.

Nel nostro caso:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2+x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2x+1} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-1}{x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty$$