ANALISI MATEMATICA

`a short introduction`

Francesco Zampieri

Classi quinte

Capitolo 1

Funzioni analitiche

1.1 Relazioni empiriche, relazioni analitiche

Sotto i nostri occhi si presentano svariati fenomeni, avvenimenti, situazioni.

Per la sua curiosità e allo scopo di avere il controllo sul mondo circostante l'uomo ha sempre cercato di fornire una loro descrizione servendosi anche di opportune codifiche. Tale processo prende il nome di *formalizzazione*

Facendo un esempio semplice, il problema della spesa del pane può essere formalizzato riconoscendo i dati (variabili o costanti) inerenti la situazione, a cui si assegna un simbolo.

Siano:

- n: numero di pagnotte acquistate
- s: spesa totale
- ϵ: costo unitario in euro (per pagnotta)

E' noto (dall'esperienza diretta o indiretta) che la spesa complessiva si ottiene moltiplicando il numero delle pagnotte acquistate per il costo unitario, scrivendo la *relazione* che intercorre *in generale* tra le variabili:

$$s = n \cdot \epsilon$$

Tale legge contiene due variabili ed è espressa matematicamente da una equazione in due incognite. Notiamo inoltre che vi è una distinzione fra le variabili: n lo si decide arbitrariamente ed in base a tale decisione la spesa s è fissata. Si dice allora che s è una variabile *dipendente* mentre n è una variabile *indipendente*. Il termine ϵ è fisso per ogni acquisto del pane presso lo stesso panificio, per cui verrà detto *costante*.

Non tutte le leggi sono formalizzabili: lo sarebbero a patto di conoscere l'esatta influenza di ogni parametro in una data situazione. Ad esempio non è possibile formalizzare una legge che ci permetta di conoscere il valore delle azioni della società Xyz fra tre giorni. Non è nemmeno scrivibile una formula che ci consenta di calcolare l'altezza di una persona conoscendo il suo codice fiscale, visto che le due variabili non sono nemmeno correlate.

Riassumendo, le leggi consentono di stabilire una certa relazione, ossia danno un criterio per associare opportunamente ad elementi di un insieme X, elementi di un insieme Y.

Tale legge, per quanto visto, sarà:

a) descrivibile caso per caso, solamente assegnando tutte le possibili *coppie* (x, y), con $x \in X$ e $y \in Y$.

b) descrivibile da una formula, usando il linguaggio matematico, che ci permetta di calcolare, a partire da un valore *arbitrario* di x, un risultato y.

La relazione che associa ad ogni persona il proprio nome è descrivibile compiutamente solo specificando caso per caso le coppie (persona, nome). La relazione che associa ad ogni anno di nascita la corrente età è invece formalizzabile secondo la relazione:

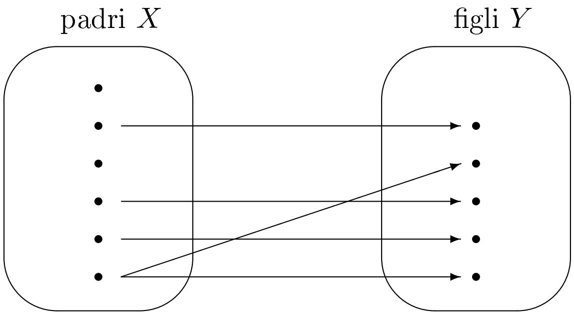
$$y = k - x$$

ove x è l'anno di nascita, k l'anno in corso e y l'età (ossia il *risultato* del nostro calcolo). Le relazioni di tipo a) si dicono EMPIRICHE, mentre le relazioni di tipo b) vengono chiamate ANALITICHE.

1.2 Relazioni e funzioni

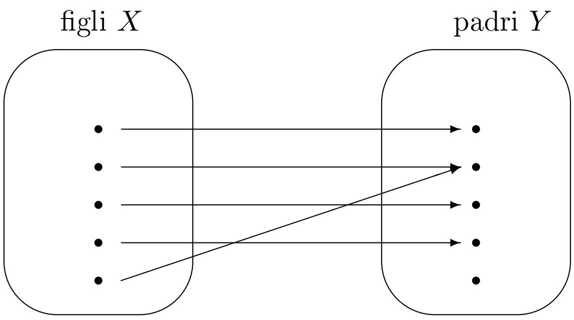
In generale una relazione è stabilita quando è assegnata una legge, un criterio che permette di associare ad elementi di un insieme X elementi di un altro insieme Y. Ci sono delle particolari relazioni che godono di una interessante proprietà.

La relazione padre – figlio che associa ad ogni padre il proprio figlio è definibile, fra due insiemi di persone, col termine di *uno-a-molti*, visto che un genitore può avere più di un figlio. Dall'analisi del sottostante diagramma (detta rappresentazione sagittale), osserviamo che elementi x dell'insieme X dei padri sono punti di partenza di una freccia che li collega ad elementi y dell'insieme Y dei figli, ma ci può essere più di una freccia che parte dallo stesso padre (un padre - molti figli). Notiamo che inoltre che ci possono essere elementi dell'insieme X dei padri che non sono collegati ad alcun elemento y dell'insieme dei figli, visto che possono esistere uomini senza figli.



Rappresentazione sagittale della relazione x *è padre di* y, tra l'insieme X dei padri e l'insieme Y dei figli

Viceversa, la relazione figlio-padre che associa ad ogni figlio il proprio padre è definibile, fra due insiemi di persone, col termine di *uno-a-uno*, visto che un figlio ha un solo padre biologico, vivo o morto. Dall'analisi del sottostante diagramma, osserviamo che tutti gli elementi x dell'insieme X dei figli sono punti di partenza di una freccia che li collega ad elementi y dell'insieme dei padri, ma c'è sempre solo una unica freccia che parte da ogni figlio (un figlio - un padre).



Rappresentazione sagittale della relazione x *è figlio di* y, tra l'insieme X dei figli e l'insieme Y dei padri

Notiamo inoltre che non vi è nessun elemento dell'insieme X dei figli che non sia collegato ad un (unico) padre y. Però ci sono elementi *distinti* (figli) $x \in X$ che sono collegati allo stesso (padre) $y \in Y$

Questa particolare relazione viene detta FUNZIONE

Definizione 1 *Una funzione $f : X \to Y$ e' una particolare relazione che associa ad OGNI elemento $x \in X$ UNO ED UN SOLO elemento $y \in Y$*

Una funzione è dunque una relazione uno-ad-uno che, relativamente alla rappresentazione sagittale, gode delle seguenti proprietà:

1. totalità: tutti gli elementi di X sono punti di partenza di frecce, nessuno escluso
2. unicità: da (ogni) elemento x parte una sola freccia che lo collega (lo mette in relazione) ad un elemento y

ESEMPI:

1. La relazione che associa ad un numero naturale il proprio doppio (formalizzata dall'equazione $y = 2x$) è una funzione, stabilita fra due copie dell'insieme $\mathbb{N}$, perchè tutti i naturali $x \in \mathbb{N}$ hanno doppio e un naturale $y \in \mathbb{N}$ è doppio di uno ed un solo naturale x
2. La relazione che associa ad un numero reale q positivo un altro reale r tale che $q = r^2$ è una relazione che non è una funzione, visto che ogni reale positivo ammette sempre due numeri di cui esso è il quadrato (in altre parole, questa relazione associa a q la radice $\pm\sqrt{q} = r$)

1.3 funzioni iniettive e suriettive

Fra le funzioni, vi sono particolari casi caratterizzati da interessanti proprietà.

ESEMPIO 1. La funzione che associa ad ogni persona in attesa al banco dei salumi di un supermercato il proprio numero di attesa gode della seguente proprietà: non possono eserci due persone con lo stesso numero. In altri termini, se x e y sono due persone distinte in coda, lo sarà anche il loro numero di ordine. Però notiamo che ci possono essere dei numeri d'ordine (rappresentati di solito da bigliettini...) che non sono in relazione con nessuna persona in coda, in un dato momento.

ESEMPIO 2. La funzione che associa ad ogni parola dell'alfabeto italiano la propria iniziale gode della proprietà di mettere in relazione tutte le lettere dell'alfabeto: ogni lettera dell'alfabeto italiano è iniziale di almeno una parola. Tale funzione però non gode della proprietà precedente, visto che esistono parole differenti con la stessa iniziale.

ESEMPIO 3. La funzione che associa ad ogni numero nel registro di classe l'alunno corrispondente gode della proprietà 1 (visto che due numeri differenti si riferiscono ad alunni per forza differenti; in altre parole, non ci possono essere due alunni con lo stesso numero!) e simultaneamente anche della proprietà 2 (visto che tutti i numeri del registro sono associati ad alunni; in altre parole, non ci sono alunni che non hanno un numero d'ordine nel registro).

A questo punto, diamo le seguenti definizioni:

Definizione 2 *Una funzione che manda elementi distinti in elementi distinti si dice INIETTIVA (es. 1). Data f funzione, f è iniettiva se e solo se $\forall x_1, x_2$ con $x_1 \neq x_2$ si ha sempre che $f(x_1) \neq f(x_2)$*

Definizione 3 *Una funzione tale che tutti gli elementi del codominio siano messi in relazione si dice SURIETTIVA (es.2). Data f funzione, f è suriettiva se l'immagine di f (ossia l'insieme degli elementi associati da frecce agli elementi del dominio) coincide con l'intero codominio Y*

Definizione 4 *Una funzione simultaneamente iniettiva e suriettiva si dice biettiva o biunivoca (caso dell'es. 3)*

Ricapitolando, la funzione dell'es.1 è iniettiva ma non suriettiva, la funzione dell'es.2 è suriettiva ma non iniettiva e la funzione dell'es. 3 è iniettiva e suriettiva, perciò biettiva.

Le funzioni biunivoche o biettive godono dell'importante proprietà di ammettere la funzione inversa, il cui ruolo sarà chiarito nelle successive dispense.

Capitolo 2

Funzioni analitiche in $\mathbb{R}$

2.1 $y = f(x)$

Oggetti dello studio dell'analisi matematica sono particolari relazioni formalizzabili dette *funzioni analitiche.*

Abbiamo visto che una funzione è una particolare relazione che viene stabilita fra due insiemi: se questi due insiemi sono di tipo numerico (in particolare: numeri reali), le funzioni si dicono *numeriche a valori reali.* E' interessante notare che tutte le funzioni analitiche, in generale si possono ricondurre a funzioni numeriche.

Le funzioni analitiche a valori reali sono in generale delle formule che stabiliscono una relazione fra due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. In sostanza, le funzioni di una variabile (indipendente) sono associate a equazioni in due incognite esprimibili da:

$$y = f(x)$$

Il che significa che la variabile dipendente y (risultato numerico) viene calcolata mediante l'espressione f che contiene la variabile indipendente x.

Per esempio, la funzione:

$$y = 2x - x^2$$

ci permette di calcolare a partire da un qualsiasi valore x, uno e un solo risultato y.

Se, per esempio, $x = 2$, si ha $y = 2 \cdot 2 - 2^2 = 0$. In questo caso si dirà che il valore $y = 0$ è l'*immagine* del valore $x = 2$, o in simboli che:

$$f(2) = 0$$

Questa ultima scrittura si legge "*effe di 2*" e sta a significare il valore (reale) che assume la y (detto valore della funzione) se alla variabile x si sostituisce il numero 2.

Allo stesso modo si vede che:

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) - (-1)^2 = -3, \quad f(7) = 2 \cdot 7 - 7^2 = -35$$

2.2 classificazione delle funzioni

Le funzioni a valori reali sono sempre assegnate qualora sia esplicita la relazione matematica che lega y a x, in modo tale che, come visto, $y = f(x)$. Tale relazione matematica chiamata f è una opportuna espressione contenente uno o più simboli (oltre alla x) associati ad operazioni matematiche.

Queste si raggruppano nelle seguenti categorie:

OPERAZIONI ALGEBRICHE	OPERAZIONI TRASCENDENTI
operazioni elementari $+, -, \times, \div$	funzioni goniometriche
elevamenti a potenza (esponente intero)	funzioni esponenziali
radici	funzioni logaritmiche

Le funzioni verranno allora classificate in base alle operazioni che contiene la legge che le definisce, e in base alla presenza o meno della variabile x a denominatore (fatto questo che ha delle conseguenze determinanti, vedi sezione seguente).

ALGEBRICHE				TRASCENDENTI	
RAZIONALI		IRRAZIONALI		intere	fratte
intere	fratte	intere	fratte		

ESEMPI:

1. la funzione $y = 2x^3 - 2x^2 + x + 4$ è algebrica, razionale, intera. Una funzione di tale classe è detta *polinomiale di grado n* (nel caso specifico, $n = 3$ e la funzione si dice anche *cubica*)
2. la funzione $y = \dfrac{x-1}{x+3}$ è invece algebrica, razionale fratta. Le funzioni di tale classe si dicono *frazioni algebriche*
3. la funzione $y = \sqrt{2x^2 - x + 1}$ è algebrica, irrazionale intera
4. la funzione $y = \dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$ è algebrica, irrazionale e fratta
5. la funzione $y = \log(x-1)$ è trascendente di tipo logaritmico, intera
6. la funzione $y = \dfrac{2+x}{\cos x}$ è trascendente di tipo trigometrico e fratta

N.B: anche l'operazione di valore assoluto è considerata algebrica. Le funzioni la cui espressione analitica contiene un modulo si dicono *modulari*

2.3 Dominio di una funzione

Una funzione consente di calcolare un risultato $y \in \mathbb{R}$ a partire in generale da un valore $x \in \mathbb{R}$. La scelta di x è come già detto arbitraria e $\forall x$ si può calcolare uno ed un solo risultato y in base alle operazioni che compaiono (mediante opportune tecniche di calcolo).

Il problema è che ci possono essere dei casi in cui le operazioni che definiscono f presentino delle "controindicazioni", in altre parole delle condizioni di esistenza (abbreviate in C.E.).

Non sarà in altri termini possibile dare alla x dei valori che siano in contrasto con dette C.E., perchè fanno perdere di significato alle operazioni che definiscono f.

Allora, in tali casi, la scelta di x non può avvenire all'interno dell'intero insieme $\mathbb{R}$: sarà necessario restringere l'insieme dei valori che x può assumere ad un opportuno sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{R}$ (che può anche coincidere con l'intero $\mathbb{R}$), detto DOMINIO.

Definizione 5 *Si dice dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ l'insieme dei valori reali che si possono attribuire all'incognita x senza far perdere di significato alle operazioni che compaiono in f.*

Ricordiamo quali operazioni matematiche sono soggette a C.E. e quali siano tali condizioni:

OPERAZIONE	DIVIETO	C.E.
divisione, denominatore $d(x)$, contenente l'incognita	non si può dividere per zero	$d(x) \neq 0$
radici di ordine pari di un'espressione contenente l'incognita, $r(x)$	non si possono calcolare radici di ordine pari di numeri negativi	$r(x) \geq 0$
tangente trigonometrica di un'espressione contenente l'incognita, $t(x)$	non esiste la tangente per angoli pari a $\frac{\pi}{2} + k\pi$	$t(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
logaritmo di un'espressione contenente l'incognita, $l(x)$	non esiste il logaritmo di numeri negativi o nulli	$l(x) > 0$

In sostanza, qualora compaiano una o più operazioni soggette a C.E. sarà necessario porre a sistema tali limitazioni (che come visto consistono sempre in disequazioni).

L'insieme - soluzione di tale sistema di disequazioni (anche una sola) costituirà il dominio D.

Esempio 1: Sia

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Si tratta di una funzione algebrica, razionale fratta. Essa è soggetta a C.E. in quanto abbiamo un denominatore. Pertanto, le C.E. sono date dalla disequazione:

$$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$$

Ciò significa che alla x si possono attribuire tutti i valori reali ad eccezione dei valori ± 1. Il dominio D sarà allora dato dall'insieme:

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$$

In termini geometrici si tratta dell'intera retta reale "bucata" in corrispondenza dei punti di ascissa ± 1: si parlerà allora di DOMINIO BUCATO (o a discontinuità isolate)

Esempio 2: Sia

$$y = \sqrt{x - 1}$$

Si tratta di una funzione algebrica, irrazionale intera. Essa è soggetta a C.E. in quanto abbiamo una radice di indice pari. Pertanto, le C.E. sono date dalla disequazione:

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

Ciò significa che alla x si possono attribuire tutti i valori reali maggiori o uguali ad 1. Il dominio D sarà allora dato dall'insieme $x \geq 1$ che si scrive anche, con la cosiddetta notazione ad intervalli [1]

$$D = [1, +\infty[$$

In termini geometrici si tratta della semiretta avente origine dal punto di ascissa $x = 1$. Si parlerà di DOMINIO A SEMIRETTA

Esempio 3: Sia

$$y = \ln(x^2 - 1)$$

[1] La notazione ad intervalli prevede l'uso delle parentesi quadre aperte o chiuse, racchiudenti gli estremi dell'intervallo considerato. Se la parentesi è aperta verso dx o sx (rispettivamente], [) significa che l'estremo non è compreso. Se la parentesi è chiusa verso sx o verso dx (rispettivamente [,]) significa che l'estremo è compreso. Per definizione i valori $+\infty$ e $-\infty$ non sono mai compresi, visto che si tratta di "punti" non definiti (associati appunto a valori infinitamente grandi o piccoli)

Si tratta di una funzione trascendente di tipo logaritmico, intera. Essa è soggetta a C.E. in quanto abbiamo l'operazione di logaritmo. Pertanto, le C.E. sono date dalla disequazione:

$$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \vee x < -1$$

Ciò significa che alla x si possono attribuire tutti i valori reali maggiori di 1 e minori di -1. Il dominio D sarà allora dato dall'insieme che si scrive con la notazione ad intervalli:

$$D =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

In termini geometrici si tratta dell'unione disgiunta di due semirette. Si parlerà di DOMINIO A INTERVALLI DISGIUNTI

Esempio 4: Sia

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

Si tratta di una funzione algebrica irrazionale intera. Essa è soggetta a C.E. in quanto abbiamo l'operazione di estrazione di radice di ordine pari di un'espressione contenente la variabile indipendente. Pertanto, le C.E. sono date dalla disequazione:

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Ciò significa che alla x si possono attribuire tutti i valori reali compresi tra -1 e 1, estremi inclusi. Il dominio D sarà allora dato dall'insieme che si scrive con la notazione ad intervalli:

$$D = [-1; 1]$$

In termini geometrici si tratta di un segmento, estremi compresi. Un tale insieme si chiama INTERVALLO COMPATTO[2], in quanto limitato (è una porzione ben precisa di retta, un segmento) e chiuso (contiene i suoi estremi).

[2] Un insieme C si dice comnpatto se e solo se è chiuso e limitato

Capitolo 3

Grafico di una funzione

Una codifica astratta come quella di un'espressione analitica $y = f(x)$ serve indubbiamente per effettuare operazioni di calcolo a partire da un qualsiasi $x \in D \in \mathbb{R}$. In linea di principio per dire di conoscere completamente una funzione si dovrebbero assegnare tutti i possibili valori contenuti nel dominio D per costruire l'insieme delle COPPIE ORDINATE

$$(x, f(x))$$

Es. se $y = 2x + 1$, allora la funzione sarà definita da $(0, 1), (1, 3), (2, 5), ...$

Il metodo della geometria analitica ci dice che ad ogni coppia di numeri reali è associato, sul piano cartesiano (a patto di scegliere due assi orientati aventi origine in comune ed una unità di misura) uno ed un solo PUNTO

L'insieme dei punti corrispondenti alle coppie che costruiscono la funzione forma sul piano cartesiano un sottoinsieme di punti che sorprendentemente non risultano sparpagliati a caso, ma raggurppati a formare un particolare insieme (visualizzato da una traccia, da una linea) detto CURVA

Viceversa, ad ogni curva tracciata su un piano cartesiano corrisponde una data equazione in due incognite[1]

Ogni curva è detta GRAFICO Γ di f.

3.1 Curve Γ e loro vantaggi

Definizione 6 *Si dice che una data curva Γ è il grafico di una funzione $y = f(x)$ se e solo se tutti e soli i punti $(x, f(x)) \in \Gamma$ soddisfano all'equazione che definisce la funzione.*

Esempio 1

Alla funzione

$$y = 2x - 1$$

è associato il grafico Γ costituito, come è noto, da una retta. Difatti, le coppie-soluzione individuano dei punti che si dispongono, ovviamente, su di una retta

Esempio 2

Alla funzione

$$y = \cos x$$

è associato il grafico Γ costituito da una curva che si chiama *cosinusoide*). Difatti, le coppie-soluzione individuano dei punti che si dispongono, come noto, su di una tale curva (che ha le caratteristiche geometriche note...)

[1]Si tratta del Principio Fondamentale della geometria analitica di Fermat

Le tecniche finalizzate al tracciamento del grafico Γ a partire da una data espressione analitica costituiscono il piatto forte dell'analisi matematica e la loro conoscenza è l'ambito traguardo per tutti gli studenti di matematica.

Ma quali vantaggi offre la visualizzazione grafica di una relazione analitica? Innanzitutto lo studio delle proprietà geometriche di un grafico è senz'altro più agevole: in altre parole è molto più signifcativo osservare un grafico cartesiano, ai fini delle informazioni ricevute, piuttosto che avere sotto gli occhi l'espressione analitica a cui è comunque associato.

Per fare un esempio, pensiamo all'andamento irregolare e frastagliato del mercato azionario. Se potessimo disporre dell'espressione analitica della relazione funzionale fra tempo e valore di un certo titolo azionario, essa sarebbe complicatissima e la gabbia di simboli ed operatori che ci toccerebbe decifrare ci darebbe ben poche informazioni! Molto meglio ci andrebbe se osservassimo con un semplice colpo d'occhio il grafico Γ a cui tale relazione è associata. Molto facilmente, sopratutto con un occhio allenato, si può determinare, ad esempio, il giorno in cui il titolo ha avuto maggior valore, quello in cui il prezzo di quelle azioni ha avuto il valore minimo, gli intervalli temporali in cui il prezzo è andato aumentando, quelli in cui è diminuito e così via.

La geometria analitica, come è noto, ci permette di stabilire una relazione biunivoca tra le proprietà algebriche e quelle geometriche, quest'ultime maggiormente evidenti almeno visivamente.

Nel seguito sono elencate alcune proprietà geometriche dei grafici di funzione: il seguito della trattazione analitica sarà finalizzato proprio ad indagare la controparte algebrica di tali proprietà. I vari settori dell'analisi, dal calcolo infinitesimale al calcolo delle variazioni, consentono, a partire dall'espressione analitica di una funzione, ossia $y = f(x)$, di determinare in quali intervalli del dominio si verificano le proprietà geometriche considerate, all scopo di tracciare, infine, il grafico di f.

3.2 Continuità di una funzione

La stragrande maggioranza delle curve Γ associate alle funzioni hanno una fondamentale proprietà geometrica, che deriva dalla proprietà forse più notevole dell'insieme $\mathbb{R}$.

Come è noto, esiste una corrispondenza biunivoca fra l'insieme $\mathbb{R}$ e l'insieme dei punti di una qualsiasi retta r, soprattutto perchè la retta (come $\mathbb{R}$) è un insieme *continuo*, ossia, secondo una definizione intuitiva, è disegnabile *senza alzare mai la penna dal foglio*. La nozione di continuità per $\mathbb{R}$ viene chiarita dall'**Assioma di Dedekind** o postulato di continuità della retta: come si può immaginare, si tratta questa di una proprietà basilare, da assumere come assiomatica, studiata di solito assieme alla geometria euclidea o comunque introducendo i numeri irrazionali.

Non ci dilungheremo qui su tale postuato, ma esamineremo le conseguenze geometriche, ossia porremo attenzione sul fatto che una retta è senza buchi o senza interruzioni. Pertanto, almeno dal punto di vista intuitivo, si potrà parlare di continuità per il grafico di una funzione se esso si può disegnare senza interruzioni ossia senza alzare mai la penna dal foglio.

Tale definizione, incompleta, sarà data più rigorosamente quando si introdurrà il concetto di limite (vedi dispensa).

Per il momento, possiamo imparare che, secondo le proprietà algebriche delle espressioni $y = f(x)$ ci possono essere TRE casi, viceversa, di non continuità:

1. Discontinuità a salto (detta del primo tipo). E' il caso delle funzioni definite a tratti, fig.3.1. In tal caso il grafico è costituito da due o più sottoinsiemi, o rami che non si saldano.

2. Discontinuità degli asintoti (detta del secondo tipo), fig.3.2. I rami sembrano *inseguire* delle rette verticali. Questo comportamento è descritto del paragrafo inerente la proprietà dell'asintoticità.

3. Discontinuità eliminabile (detta del terzo tipo), fig.3.3, quando i rami sembrano saldarsi, ma la funzione salta dei singoli valori (il grafico è *bucato* in punti precisi).

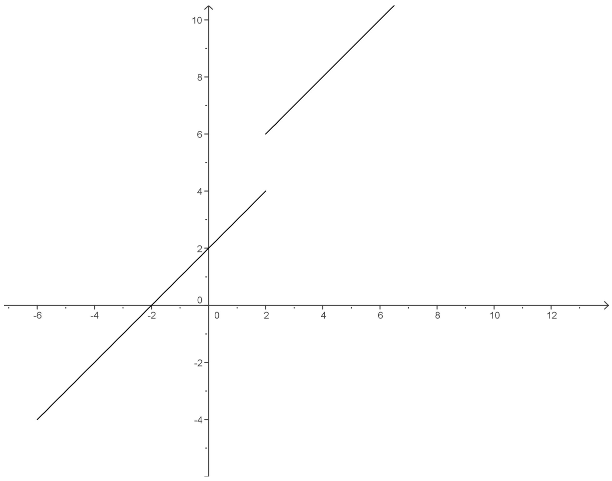


Figura 3.1: Discontinuità di primo tipo: la funzione ha un salto

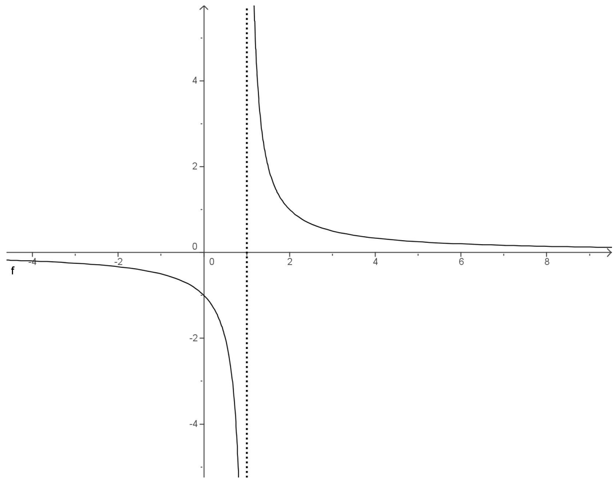


Figura 3.2: Discontinuità di secondo tipo: asintoto verticale

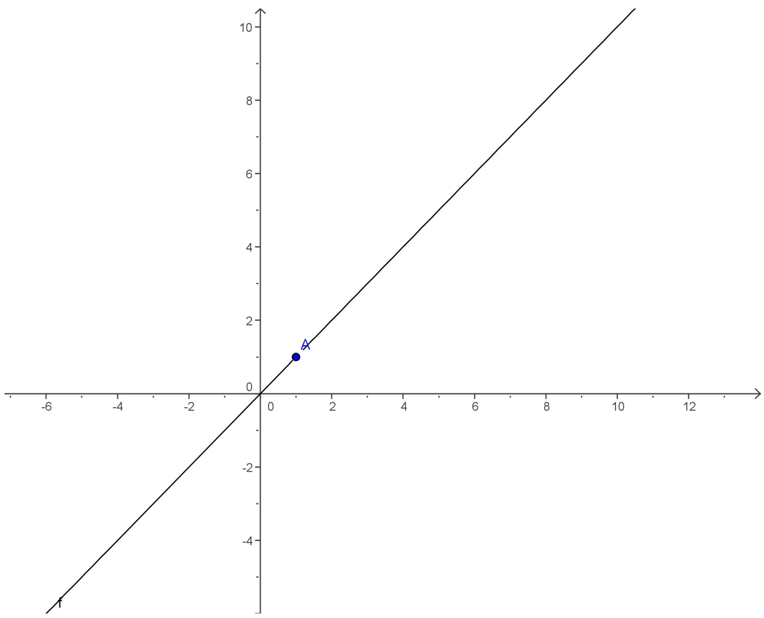


Figura 3.3: Discontinuità di terzo tipo: la funzione salta uno o più singoli valori

3.3 Positività di una funzione

Questa seconda proprietà è collegata ad una precisa collocazione spaziale del grafico rispetto all'asse x.

In maniera intuitiva diremo che una funzione $f(x)$ a*ssume valori positivi* o *è positiva* in un certo intervallo $I \subseteq D$ del suo dominio se il corrispondente grafico è situato sopra l'asse x, mentre sarà *negativa* in caso contrario. Vedi fig.3.4

Algebricamente tale proprietà sarà collegata al concetto di segno, ossia alle soluzioni delle disequazioni

$$f(x) > 0, \quad f(x) < 0$$

Gli intervalli di positività nel dominio corrispondono alle soluzioni della disequazione $f(x) > 0$ e viceversa. Analogo il caso della negatività.

Negli intervalli del dominio in cui $f(x)$ assume segno positivo, le rispettive ordinate $y = f(x)$ stanno sopra l'asse x, mentre se $f(x)$ assume segno negativo accade il viceversa.

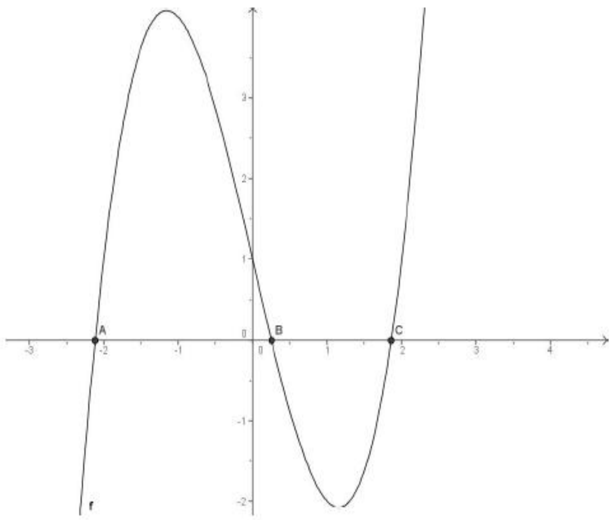


Figura 3.4: Funzione positiva e negativa. A titolo di esempio, si riporta il grafico di $y = x^3 - 4x + 1$ di dominio $\mathbb{R}$. Si vede che la funzione cambia segno quattro volte: è negativa nell'intervallo $]-\infty; A[$, positiva in $]A; B[$, negativa in $]B; C]$ e positiva in $]C, +\infty[$

3.3.1 zeri di una funzione

Collegato al concetto di segno per una funzione, c'è la seguente definizione:

Definizione 7 *Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si definisce zero per la funzione $f(x)$ se e solo se $f(x_0) = 0$*

In altre parole, uno zero x_0 è un punto in cui la funzione si annulla, ovvero un punto in cui il grafico della funzione $f(x)$ interseca l'asse x. Si possono verificare due casi base: intersezione con cambio di segno (la funzione cambia segno in un intorno di x_0, come in fig.3.5) ed intersezione senza cambio di segno, come in fig.3.6 (grafico tangente all'asse x in x_0, come nel caso di parabola con vertice sull'asse x, per esempio)

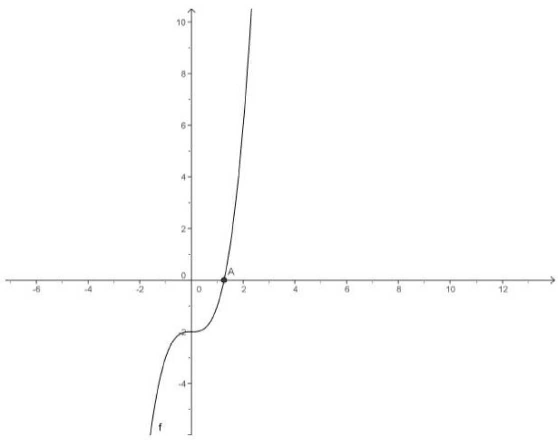


Figura 3.5: zero di una funzione con cambio di segno

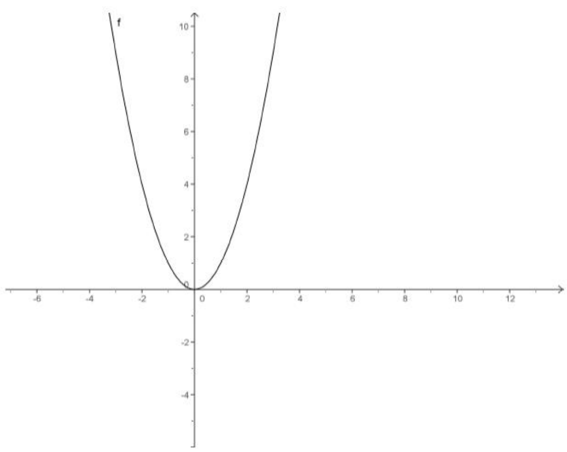


Figura 3.6: Zero senza cambiamento di segno

Condizione necessaria e sufficiente per determinare gli zeri di una funzione è porre la sua espressione analitica uguale a zero: in altre parole, gli zeri si determinano dalle eventuali soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.

3.4 Monotonia di una funzione

Tale proprietà è legata all'andamento della funzione, o con un sinonimo, alla crescenza/decrescenza della funzione stessa. A parte le funzioni costanti, del tipo $y = k$, il cui grafico è rappresentato da rette orizzontali, tutte le funzioni possono godere di questa proprietà, ossia di presentare dei tratti "in salita" o "in discesa".

Data una funzione $f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, consideriamo un dato intervallo compatto $[a, b] \subseteq D$.

Riferendoci alla fig.3.7, notiamo che l'andamento del grafico di f in quell'intervallo "va in salita", ossia, se internamente ad $[a, b]$ si scelgono due punti $x_2 > x_1$, si può notare che le rispettive immagini $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ sono tali che $y_2 > y_1$, ossia stanno nella stessa relazione. Tale confronto si può fare con qualsiasi coppia di punti $x_1,\ x_2 \in [a, b]$. Quindi si può enunciare la seguente:

Definizione 8 *Data una funzione $f(x)$ definita in un compatto $[a, b]$, si dice che la funzione f è* ***crescente*** *in $[a, b]$ se $\forall x_1,\ x_2 \in [a, b]$ con $x_2 > x_1$ si ha che $y_2 > y_1$.*

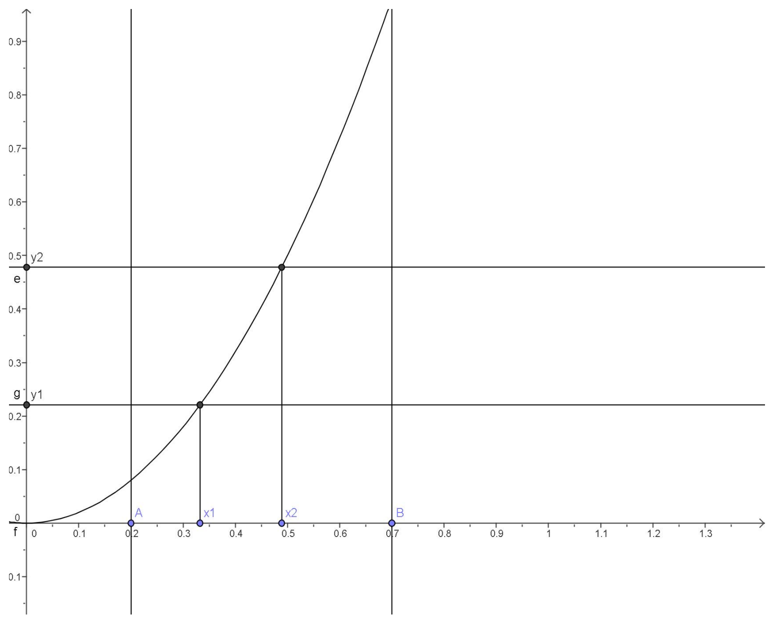


Figura 3.7: Funzione crescente

Analogamente, riferendoci alla fig.3.8, notiamo che l'andamento del grafico di f in quell'intervallo "va in discesa", ossia, se internamente ad $[a, b]$ si scelgono due punti $x_2 > x_1$, si può notare che le rispettive immagini $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ sono tali che $y_2 < y_1$, ossia stanno nella relazione inversa. Tale confronto si può fare con qualsiasi coppia di punti $x_1,\ x_2 \in [a, b]$. Quindi si può enunciare la seguente:

Definizione 9 *Data una funzione $f(x)$ definita in un compatto $[a, b]$, si dice che la funzione f è* ***decrescente*** *in $[a, b]$ se $\forall x_1,\ x_2 \in [a, b]$ con $x_2 > x_1$ si ha che $y_2 < y_1$.*

3.4.1 Punti estremali

Collegato al concetto di monotonia c'è quello di punto estremale.

Osservando il grafico in fig.3.9, notiamo la presenza di due punti, per così dire, notevoli, in cui la monotonia della funzione cambia. Un punto estremale è esattamente questo: ogni punto in cui la monotonia si inverte.

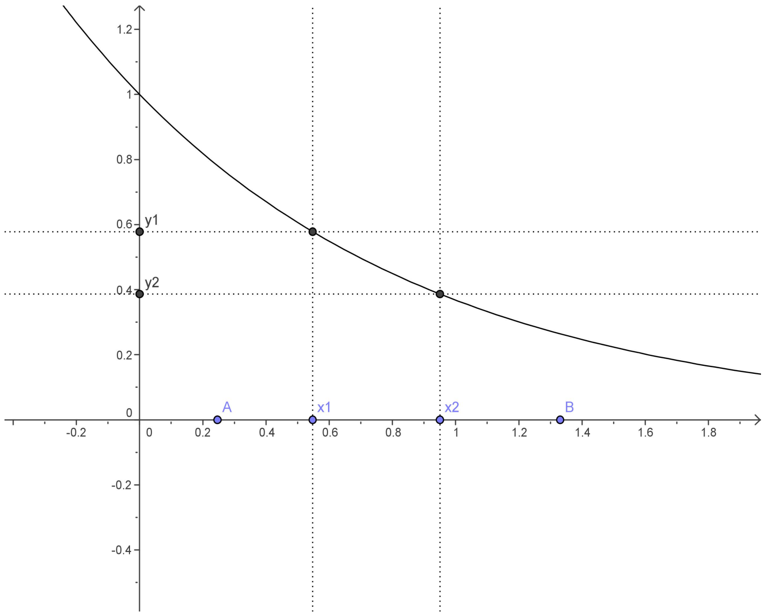


Figura 3.8: Funzione decrescente

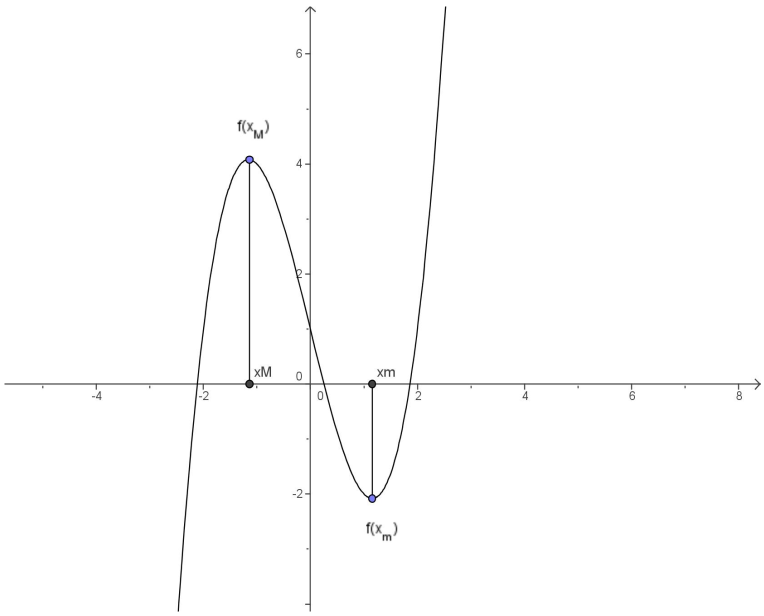


Figura 3.9: Funzione con due punti estremali

- Per quanto riguarda il punto di ascissa x_M, possiamo dire che la funzione è crescente per ogni $x < x_M$ e decrescente per ogni $x > x_M$. Un tale punto si dice punto di massimo (locale o relativo)
- Per quanto riguarda il punto di ascissa x_m, possiamo dire che la funzione è decrescente per ogni $x < x_m$ e crescente per ogni $x > x_m$. Un tale punto si dice punto di minimo (locale o relativo)

Valgono allora le seguenti definizioni.

Definizione 10 *Sia $f(x)$ una funzione di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_M \in D$. Si dice che il punto x_M è un* punto di massimo relativo *o locale per f se esiste un $I \subseteq D$ in cui la funzione risulta crescente $\forall x < x_M$ e decrescente $\forall x > x_M$, con $x \in I$.*

Definizione 11 *Sia $f(x)$ una funzione di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_M \in D$. Si dice che il punto x_m è un* punto di minimo relativo *o locale per f se esiste un $I \subseteq D$ in cui la funzione risulta decrescente $\forall x < x_m$ e crescente $\forall x > x_m$, con $x \in I$.*

Le rispettive ordinate $f(x_M) = y_M$ e $f(x_m) = y_m$ si dicono quote del massimo e del minimo.

In particolare, dato x_M massimo relativo se in più $\forall x \in D$ si ha che $f(x) \leq f(x_M) = y_M$, il punto x_M si dice punto di **massimo assoluto** per f.

Invece dato x_M minimo relativo, se in più $\forall x \in D$ risulta che $f(x) \geq f(x_m) = y_m$, il punto x_m si dice punto di **minimo assoluto** per f

3.5 Parità di una funzione

Tale proprietà è legata a particolari simmetrie del grafico.

Definizione 12 *Una funzione $f(x)$ si dice pari se vale, $\forall x \in D$, la seguente relazione:*

$$f(x) = f(-x)$$

In altri termini, una funzione pari ha sempre per grafico una curva simmetrica rispetto all'asse y.

Definizione 13 *Una funzione $f(x)$ si dice dispari se vale $\forall x \in D$, la seguente relazione:*

$$f(-x) = -f(x)$$

In altri termini, una funzione dispari ha sempre per grafico una curva simmetrica rispetto all'origine.

Esempio "base" di una funzione pari è $y = \cos x$: è noto difatti che $\cos(-x) = \cos(x)$.

Esempio " base" di una funzione dispari è $y = \sin x$: è noto infatti che $\sin(-x) = -\sin x$.

Nei sottostanti grafici possiamo vedere un esempio di una funzione pari e uno di una funzione dispari.

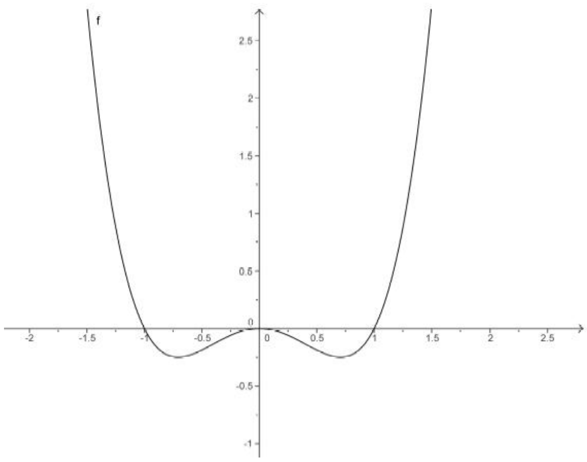


Figura 3.10: Esempio grafico di una funzione pari

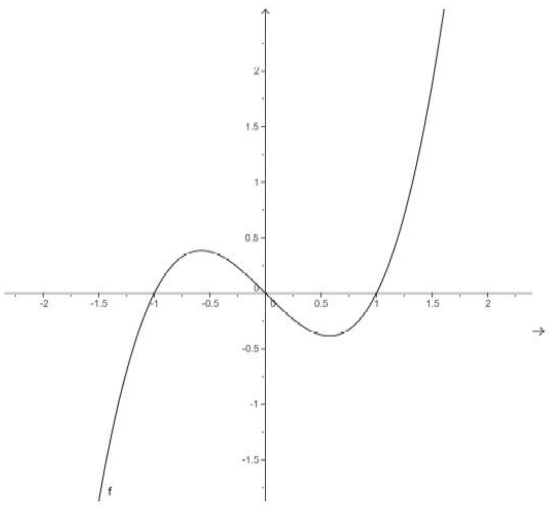


Figura 3.11: Esempio grafico di una funzione dispari

3.6 Periodicità di una funzione

Sappiamo che in trigonometria si usano delle funzioni che hanno la proprietà di ripetere gli stessi valori dopo che ad un angolo è stato sommato un numero intero di angoli giri o di angoli piatti. In simboli, le proprietà delle funzioni seno, coseno e tangente sono:

- $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$
- $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$
- $\tan x = \tan(x + k\pi)$

ove con $k \in \mathbb{Z}$ si intende il numero intero di giri o mezzi giri.

Dette funzioni si dicono quindi periodiche di periodo $T = 2\pi$ (nel caso di seno e coseno) e di periodo $T = \pi$ nel caso della tangente.

In generale però vi sono opportune combinazioni o composizioni di funzioni goniometriche che possono avere in generale altri periodi.

Definizione 14 *Si dice che una data una funzione $f(x)$ di dominio D è* periodica di periodo T *se $\forall x \in D$ si ha che*

$$f(x) = f(x + k \cdot T), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Nel qual caso, il numero reale (positivo) T è detto periodo della funzione.

3.7 Asintoticità di una funzione

Un comportamento alquanto bizzarro di alcuni grafici consiste nell'avvicinarsi indefinitamente a determinate rette, dette per l'appunto asintoti

Definizione 15 *Data una retta r, si dice che r è un asintoto per la funzione $f(x)$ se al tendere della variabile x ad un punto x_0 finito o all'infinito accade che la distanza di f da r tende a zero, ossia il grafico si avvicina indefinitamente alla retta stessa*

Vi sono tre diversi tipi di asintoto, a seconda del diverso tipo di equazione che può avere una retta:

- asintoti verticali, di equazione $x = x_0$, fig.3.12
- asintoti orizzontali, di equazione $y = l$, fig.3.13
- asintoti obliqui, di equazione $y = mx + q$, fig.3.14

3.8 Concavità di una funzione

La concavità è una proprietà geometrica del grafico della funzione, legata al modo di curvarsi del grafico stesso. Esistono due tipologie di concavità: verso l'alto (che alcuni chiamano concavità vera e propria) e verso il basso (che alcuni definiscono convessità).

Una funzione è concava verso l'alto in un intervallo I del dominio se per ogni punto dell'intervallo il grafico è tutto situato nel semipiano che sta sopra la retta tangente (vedi fig.3.15)

Definizione 16 *Sia f una funzione definita in un intervallo $I = [a, b]$. Sia $x_0 \in I$ e $t(x)$ la retta tangente al grafico, relativa al punto di ascissa x_0. Si dice che f* volge la concavità verso l'alto *nell'insieme I se, $\forall x \in I$, $\quad f(x) \geq t(x)$, ove con $t(x)$ si intende l'ordinata di x calcolata con la tangente t in x.*

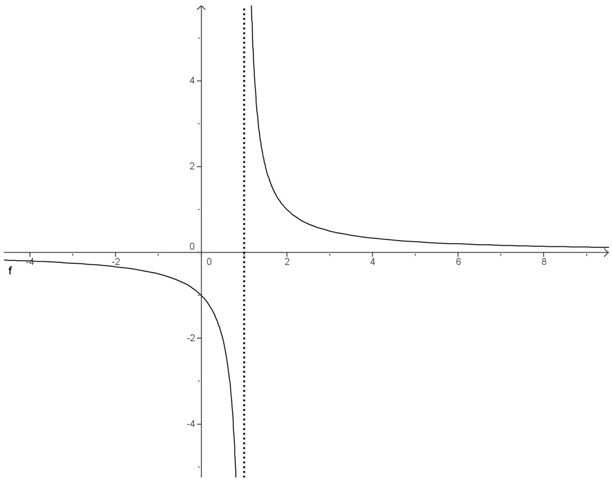


Figura 3.12: Esempio di asintoto verticale

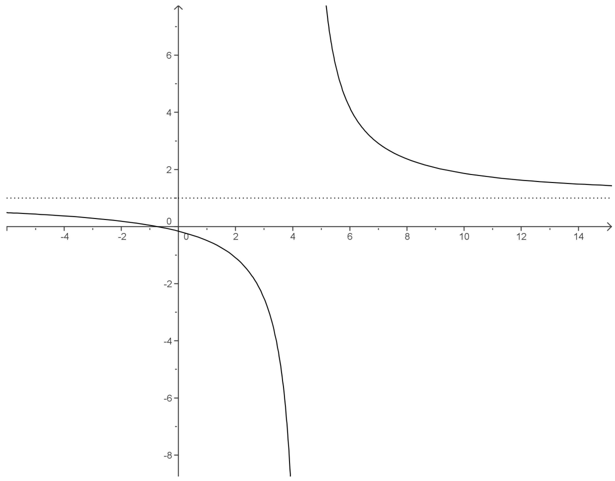


Figura 3.13: Esempio di asintoto orizzontale

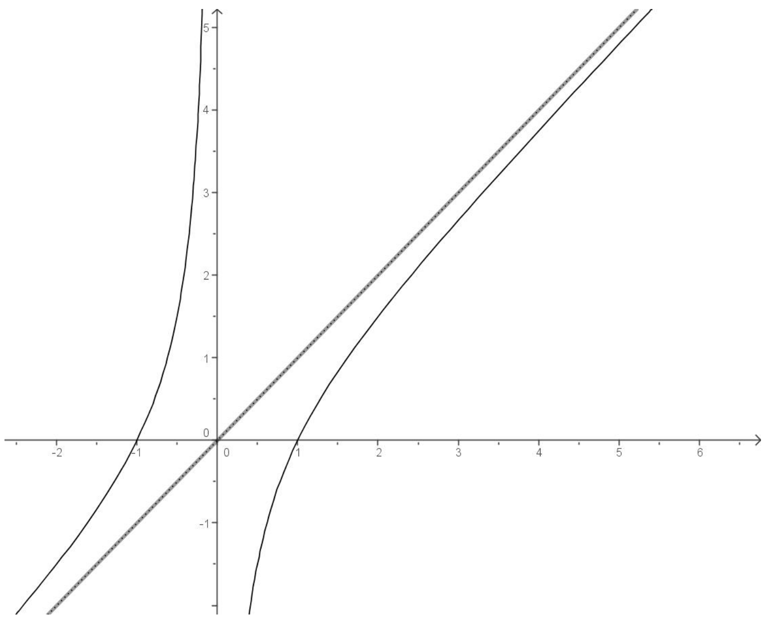


Figura 3.14: Esempio di asintoto obliquo

Viceversa funzione è concava verso il basso in I se per ogni punto dell'intorno il grafico è tutto situato nel semipiano che sta sotto la retta tangente. (vedi fig.3.16)

Definizione 17 *Sia f una funzione definita in un intervallo $I = [a, b]$. Sia $x_0 \in I$ e $t(x)$ la retta tangente al grafico, relativa al punto di ascissa x_0. Si dice che f* volge la concavità verso il basso *nell'insieme I se, $\forall x \in I, \quad f(x) \leq t(x)$, ove con $t(x)$ si intende l'ordinata di x calcolata con la tangente t in x.*

In simboli, $\forall x \in I, \quad f(x) \leq t(x)$, ove con $t(x)$ si intende l'ordinata di x calcolata con la tangente t in x.

I punti di inversione della concavità si dicono punti di flesso (vedi fig.3.17).

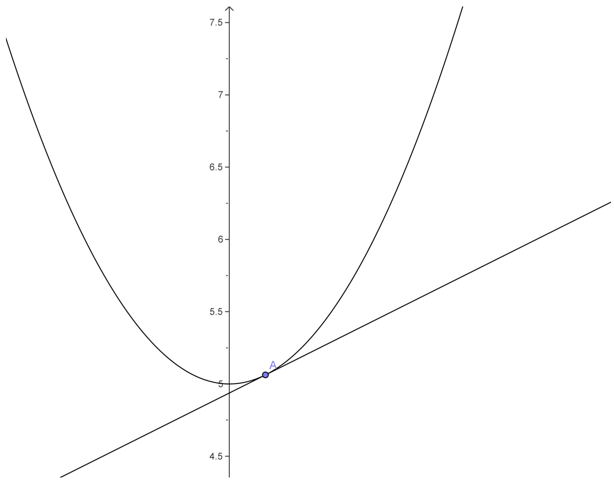


Figura 3.15: Funzione con concavità verso l'alto. Notare che la tangente divide il piano in due semipiani: il grafico della funzione è tutto contenuto in quello superiore

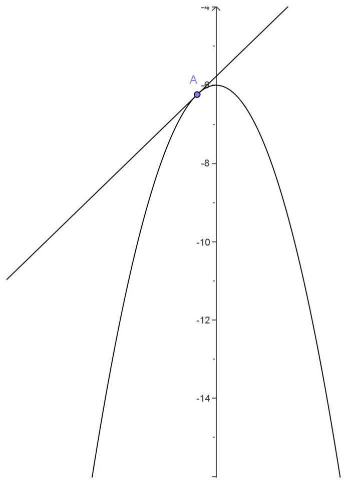


Figura 3.16: Funzione con concavità verso il basso. Notare che la tangente divide il piano in due semipiani: il grafico della funzione è tutto contenuto in quello superiore

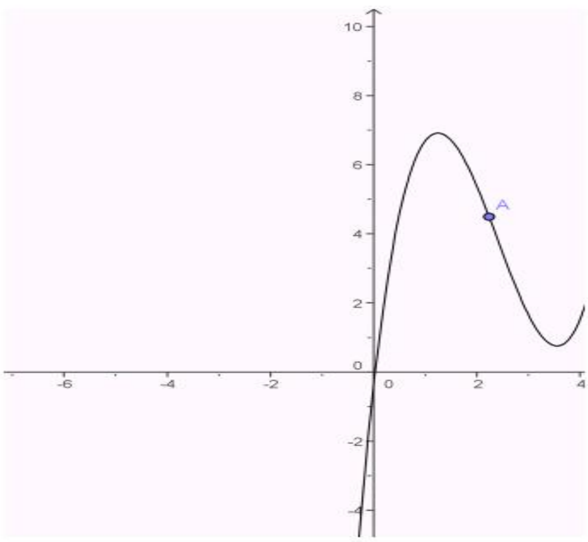


Figura 3.17: Esempio di punto di flesso. Il punto A separa i due andamenti; la funzione è concava verso il basso per $x < x_A$ e verso l'alto per $x > x_A$