

TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE

esercizi risolti

Classi quarte L.S.

In questa dispensa verrà riportato lo svolgimento di alcuni esercizi inerenti l'applicazione del primo principio della termodinamica, per il calcolo del lavoro prodotto in un ciclo ed il rendimento reale/ideale di una macchina termica.

Riprendiamo alcuni concetti utili.

- **STATO TERMODINAMICO:** Maniera di presentarsi di un qualsiasi sistema termodinamico relativamente alle tre variabili termodinamiche macroscopiche P , V , T , le quali sono correlate ad un preciso stato microscopico del gas (collegato alle proprietà cinematiche delle sue particelle, ossia alle posizioni e alle velocità delle molecole). Sul piano di Clapeyron (V, P) è denotato da un punto.
- **ENERGIA INTERNA U :** Viene definita come somma delle varie forme di energia che il sistema possiede. Se il sistema è particellare, come un gas perfetto, l'energia U è definita dalla relazione:

$$U = \sum_{i=1}^N E_i$$

dove E_i è l'ammontare di energia della i -esima particella ed N il numero totale di particelle del gas. E' ovvio che l'energia interna è collegata allo stato termodinamico, per cui, come vedremo, ΔU sarà sempre collegato ad una variazione dello stato stesso. In tal senso si dice che U è una funzione di stato. Nell'ipotesi che il gas segua la teoria cinetica, l'energia associata a ciascuna particella è puramente cinetica e quindi l'energia interna è funzione della sola temperatura (ricordare la relazione di Boltzmann fra l'energia cinetica media delle particelle e la temperatura assoluta). In tal caso $\Delta U \propto \Delta T$.

L'energia interna si può anche considerare una sorta di serbatoio energetico per il gas: la sua variazione sarà quindi dovuta ad un travaso di energia dall'ambiente a sistema, oppure ad una fuoriuscita di energia dal sistema all'ambiente (vedremo, sottoforma sia di calore acquisito/ceduto che di lavoro fatto sul/dal sistema)

- **TRASFORMAZIONE TERMODINAMICA:** Ogni processo o fenomeno che comporta una variazione dello stato termodinamico. Avviene sempre tra uno stato iniziale S_0 ed uno finale S_f . Essa può avvenire in vari modi:
 - a) trasformazione IDEALE o QUASISTATICA, quando la variazione dello stato avviene così lentamente da far passare il sistema attraverso stati contigui di equilibrio, dando cioè tempo al gas di abituarsi via via alla nuova condizione. In tal caso si parla anche di trasformazione REVERSIBILE, perchè mediante una trasformazione INVERSA possiamo ripristinare, a partire da S_f , lo stato iniziale S_0 . Sul piano di Clapeyron (V, P) è denotata da un qualsiasi tratto di curva continua.
 - b) trasformazione REALE o IRREVERSIBILE: quella che avviene in modo repentino o violento, non passando attraverso stati contigui di equilibrio e quindi non essendo per essa possibile eseguire una trasformazione inversa che ritorni allo stato iniziale. Sul piano di Clapeyron (V, P) è denotata da una linea a zig-zag.
 - c) trasformazione CICLICA, quando lo stato finale coincide con quello iniziale. Essa è per forza di cose la successione di almeno due trasformazioni in sequenza. Sul piano di Clapeyron (V, P) è denotata da una qualsiasi curva chiusa.
- **PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA:** Relazione che esprime la variazione dell'energia interna in funzione dei fenomeni che la provocano. Tale principio postula che, ai fini della variazione dell'energia interna di un sistema termodinamico, sono equivalenti l'azione del calore Q (che può essere fornito o sottratto al sistema) o la produzione di lavoro L (fatto dal sistema o prodotto sul sistema). Convenzionalmente, al calore fornito si dà segno positivo mentre a quello sottratto si attribuisce segno negativo. Per il lavoro, quello compiuto SUL sistema ha segno positivo, mentre quello fatto DAL sistema assume segno negativo. Matematicamente, il primo principio assume la formulazione:

$$\Delta U = Q - L$$

In generale, quindi, lo scambio di calore o la produzione di lavoro sono sempre correlati in maniera equivalente alla variazione dell'energia interna del sistema.

- **TRASFORMAZIONE ISOBARA:** Trasformazione dello stato di un gas che avviene senza variazione della pressione a cui è soggetto il gas stesso (es. variazione della temperatura e quindi del volume di un gas entro cilindro con pistone mobile che esercita sul gas sempre la stessa pressione). Il legame a pressione costante, tra V e T è espressa dalla *prima legge di Gay-Lussac* che è bene scrivere nella forma:

$$\frac{V}{T} = \text{cost}$$

ove V è il volume del gas perfetto e T è la temperatura rigorosamente espressa in gradi Kelvin. Sul piano di Clapeyron (V, P) è denotata da un segmento orizzontale.

Una siffatta trasformazione è sempre associata alla produzione di lavoro L , dovuta alla variazione di volume ΔV :

$$L = P \cdot \Delta V$$

Il calore Q scambiato tra sistema ed ambiente è proporzionale alla variazione di temperatura, tramite la relazione:

$$Q = n \cdot C_{M_P} \cdot \Delta T$$

ove n è il numero di moli del gas, C_{M_P} è la capacità termica molare a pressione costante (prodotto della massa molare del gas e del calore specifico c_P a pressione costante del gas stesso).

In una trasformazione isobara, la variazione di energia interna è quindi ascrivibile sia al calore che al lavoro. Ciò significa, per esempio che se si riscalda un gas a pressione costante, l'energia immessa (sottoforma di calore Q) parte va ad aumentare l'energia interna (e quindi la T del gas) e parte serve per la produzione di lavoro da parte del gas, dovuto alla sua espansione.

- **TRASFORMAZIONE ISOCORA:** Trasformazione dello stato di un gas che avviene senza variazione del volume (es. variazione della temperatura e quindi della pressione di un gas entro cilindro con pistone bloccato). Il legame a volume costante, tra T e P è espressa dalla *seconda legge di Gay-Lussac* che è bene scrivere nella forma:

$$\frac{P}{T} = \text{cost}$$

ove P è la pressione del gas perfetto e T è la temperatura rigorosamente espressa in gradi Kelvin. Sul piano di Clapeyron (V, P) è denotata da un segmento verticale.

Una siffatta trasformazione non è mai associata alla produzione di lavoro L , visto che la variazione di volume ΔV è nulla, per cui $L = 0$.

Il calore Q scambiato tra sistema ed ambiente è proporzionale alla variazione di temperatura, tramite la relazione:

$$Q = n \cdot C_{M_V} \cdot \Delta T$$

ove n è il numero di moli del gas, C_{M_V} è la capacità termica molare a volume costante (prodotto della massa molare del gas e del calore specifico c_V a volume costante del gas stesso).

In una trasformazione isocora, la variazione di energia interna è quindi ascrivibile solo al calore. Ciò significa, per esempio che se si riscalda un gas a volume costante, l'energia immessa (sottoforma di calore Q) va totalmente ad aumentare l'energia interna (e quindi la T del gas). Di conseguenza, una stessa quantità di energia Q comunicata al medesimo gas in maniera nel primo caso isobara e nel secondo isocora, produce un maggior incremento di T nel sistema a cui il calore è stato fornito a volume costante, per cui $\Delta T_V > \Delta T_P$. Dunque, se $Q = n \cdot C_{M_V} \cdot \Delta T_V = n \cdot C_{M_P} \cdot \Delta T_P$ significa che $C_{M_P} > C_{M_V}$ ed anzi, si può dimostrare che:

$$C_{M_P} - C_{M_V} = R$$

relazione questa, detta *relazione di Mayer*.

- **TRASFORMAZIONE ISOTERMA:** Trasformazione che avviene mantenendo costante la temperatura del gas, producendo quindi una variazione di pressione in seguito ad una variazione di volume o viceversa. È espressa dalla *legge di Boyle-Mariotte*:

$$P \cdot V = K \Rightarrow P_0 \cdot V_0 = P_1 \cdot V_1 = \dots$$

Sul piano di Clapeyron (V, P) è denotata da un ramo di iperbole equilatera.

Una siffatta trasformazione è sempre associata alla produzione di lavoro L , dovuta alla variazione di volume ΔV . Si può dimostrare che il lavoro prodotto nella trasformazione isoterma alla temperatura T tra due stati rispettivamente a V_0 e V_f vale:

$$L = n \cdot R \cdot T \cdot \ln \left(\frac{V_f}{V_0} \right)$$

Se in tale trasformazione non si ha una variazione di temperatura, ci attendiamo che non si abbia nemmeno una variazione di energia interna, per cui, se $\Delta U = 0$ allora $Q = L$, cioè il calore scambiato è pari al lavoro prodotto.

- **TRASFORMAZIONE ADIABATICA:** Trasformazione termodinamica che avviene senza che intervengano scambi di calore fra il sistema e l'ambiente, quindi a $Q = 0$. La legge che regola una trasf. adiabatica è la *relazione di Poisson*:

$$P_0 \cdot V_0^\gamma = P_1 \cdot V_1^\gamma = \dots = P_f \cdot V_f^\gamma = \text{cost}$$

Il coefficiente vale:

$$\gamma = \frac{C_{MP}}{C_{MV}}$$

ed è uguale per gas della stessa specie (mono-,bi-,tri-atomici).

Altre forme della legge di Poisson sono:

$$T \cdot V^{\gamma-1} = \text{cost}, \quad T \cdot P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{cost}$$

Sul piano di Clapeyron (V, P) è denotata da un ramo di curva esponenziale a pendenza maggiore di un'isoterma.

Se in una adiabatica non possono avvenire scambi di calore, si ha produzione di lavoro solamente a spese dell'energia interna, quindi:

$$L = -\Delta U = -n \cdot C_{MV} \cdot \Delta T$$

Si ha dunque una trasformazione adiabatica quando un gas produce lavoro per esempio per espansione, raffreddandosi e non riversando nell'ambiente l'energia interna perduta.

- **MACCHINA TERMICA** È un qualsiasi dispositivo che ha la funzione di convertire il calore Q_2 prelevato da una sorgente a temperatura T_2 in lavoro L , riversando l'energia rimasta Q_1 ad una sorgente più fredda a $T_1 < T_2$. Una macchina lavora grazie ad un fluido termodinamico, idealmente un gas perfetto, a cui viene fatta compiere una trasformazione ciclica (successione di trasformazioni ideali). È ovvio che $L = Q_2 - Q_1$. Importante il concetto di *rendimento* η , espresso come rapporto fra lavoro prodotto e calore usato per alimentare la sorgente calda:

$$\eta = \frac{L_{\text{prod}}}{Q_{\text{ass}}}$$

Il *teorema di Carnot* prevede che ci sia sempre un limite superiore al rendimento di una macchina termica reale η_r che lavora tra due temperature di riferimento T_1 e T_2 : detto limite corrisponde al rendimento η_C di una macchina di Carnot ideale che lavora fra le stesse due temperature (dette di esercizio):

$$\eta_r = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} < \eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2} < 1$$

STUDIO DI UNA TRASFORMAZIONE ADIABATICA

1

2 litri di un gas monoatomico ($\gamma = 1,66$) si trovano in condizioni normali di pressione e temperatura. In seguito ad una dilatazione adiabatica, arrivano ad occupare un volume finale di 2,8 litri. Calcolare i valori finali di P e T ed il lavoro fatto dal gas nell'espansione, sapendo che la sua capacità termica C_{M_V} vale $12,45 J/mK$ e che il gas è composto da 3 moli.

Secondo la legge di Poisson $PV^\gamma = cost$, uguagliando i prodotti fra stato iniziale e stato finale, abbiamo:

$$P_0 V_0^\gamma = P_f V_f^\gamma \Rightarrow P_f = P_0 \cdot \left(\frac{V_0}{V_f} \right)^\gamma$$

sostituendo i valori (che possiamo anche fare a meno di convertire in unità del S.I.), abbiamo:

$$P_f = 1 \cdot \left(\frac{2}{2,8} \right)^{1,66} \simeq 0,57 \text{ Atm}$$

Per calcolare il valore di T_f , usiamo la seconda forma dell'equazione di Poisson, ossia:

$$T_0 V_0^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1} = T_f = T_0 \cdot \left(\frac{V_0}{V_f} \right)^{\gamma-1}$$

In tal caso:

$$T_f = 273,16 \cdot \left(\frac{2}{2,8} \right)^{1,66-1} = 273 \cdot 0,80 \simeq 218,77$$

Per calcolare il lavoro, usiamo la formula: $L = -n \cdot C_{M_V} \cdot \Delta T$:

$$L = -3 \cdot 12,45 \cdot (218,77 - 273,16) = -37,35 \cdot (-54,39) = 2031,47 \text{ J}$$

Come si vede, si tratta di un lavoro positivo, quindi fatto dal gas verso l'esterno a causa della sua dilatazione.

2

Un gas biatomico, inizialmente a pressione atmosferica e volume $V_0 = 5 \text{ l}$ è compresso adiabaticamente sino a raggiungere una pressione finale di $P_f = 1,13 \text{ Atm}$. Calcola il volume occupato alla fine della trasformazione ($\gamma = 1,4$)

Usando l'equazione di Poisson, si ha:

$$P_0 V_0^\gamma = P_f V_f^\gamma \Rightarrow \left(\frac{V_0}{V_f} \right)^\gamma = \frac{P_f}{P_0}$$

Prendiamo ora i logaritmi di entrambi i membri:

$$\ln \left(\frac{V_0}{V_f} \right)^\gamma = \ln \left(\frac{P_f}{P_0} \right)$$

Per le note proprietà dei logaritmi, si ha:

$$\gamma \ln \left(\frac{V_0}{V_f} \right) = \ln \left(\frac{P_f}{P_0} \right) \Rightarrow \gamma \ln V_0 - \gamma \ln V_f = \ln \left(\frac{P_f}{P_0} \right) = \ln V_f = \frac{\gamma \ln V_0 - \ln \left(\frac{P_f}{P_0} \right)}{\gamma}$$

Inserendo i valori numerici:

$$\ln V_f = \frac{1,4 \ln 5 - \ln \left(\frac{1,13}{1} \right)}{1,4} \simeq 1,522$$

Ora, se $\ln V_f = 1,522$, esponenziando in base e si ha, per la nota relazione fra esponenziale e logaritmo della stessa base:

$$e^{\ln V_f} = e^{1,522} \Rightarrow V_f = e^{1,522} \simeq 4,58 \text{ l}$$

STUDIO DI UNA TRASFORMAZIONE ISOTERMA

3

Due moli di gas perfetto sono compresse isotericamente alla temperatura $T_0 = 15^\circ\text{C}$. La pressione varia da 0,8 a 1,6 atmosfere. Calcola il lavoro per effettuare tale trasformazione

Come è noto, il lavoro prodotto in una trasformazione isoterma vale:

$$L = nRT_0 \ln \left(\frac{V_f}{V_0} \right)$$

Il rapporto V_f/V_0 si dice *rapporto di compressione* K . Se a temperatura costante P_f/P_0 vale 2, significa che il gas ha un rapporto di compressione pari a $1/2$. Dunque, osservando che 15°C sono $15 + 273,15 = 288,15\text{ K}$:

$$L = 2 \cdot 8,314 \cdot 288,15 \cdot \ln(1/2) \simeq -3321,23\text{ J}$$

Si tratta di un lavoro negativo, dovuto alla compressione del gas, quindi eseguito sul gas stesso dall'esterno.

4

Calcolare il numero di moli di un gas che a temperatura costante di $T_0 = 350\text{ K}$ è compresso sino a raggiungere il 35% del volume iniziale attraverso un lavoro esterno pari a $L = -6\text{ KJ}$

Il rapporto di compressione isoterma K vale quindi 0,35, per cui, ricordando la formula del lavoro per una trafs.isoterma, possiamo dire che:

$$L = nRT_0 \ln K \Rightarrow n = \frac{L}{RT_0 \ln K}$$

Dunque:

$$n = \frac{-6.000}{8,314 \cdot 350 \ln 0,35} = \frac{-6.000}{8,314 \cdot 350 \cdot (-1,05)} \simeq 1,964\text{ moli}$$

5

Una mole di gas occupa inizialmente un volume $V_0 = 8\text{ l}$ e compie una trasformazione isoterma alla temperatura costante di $T_0 = 300\text{ K}$, producendo un lavoro di 150 J . Quale è il volume finale del gas?

Ricordando l'espressione del lavoro per una trasf.isoterma, possiamo scrivere che:

$$L = nRT_0 \ln K$$

essendo K il rapporto di compressione. Da questa formula troviamo K come segue:

$$\ln K = \frac{L}{nRT_0} \Rightarrow K = e^{\frac{L}{nRT_0}}$$

Nel nostro caso:

$$K = e^{\frac{15}{1 \cdot 8,314 \cdot 300}} = e^{0,06} \simeq 1,061$$

Per cui, se $\frac{V_f}{V_0} = 1,061$ si ha che

$$V_f = V_0 \cdot 1,061 \simeq 8,5\text{ l}$$

STUDIO DI TRASFORMAZIONI ISOCORE ED ISOBARE

6

Un gas che, sottoposto alla pressione costante di $P_0 = 1 \text{ Atm}$ subisce una dilatazione $\Delta V = 1 \text{ l}$. Quale è il lavoro compiuto dal gas?

La trasformazione è ovviamente isobara. Ricordando che per una trasformazione isobara si ha:

$$L = P_0 \cdot \Delta V$$

Se si vuole il lavoro in Joule, pressioni e volumi vanno convertiti in unità del S.I. Si ha che $\Delta V = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Quindi:

$$L = P_0 \cdot \Delta V = 1,013 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 101,3 \text{ J}$$

7

Se vengono compiuti 20 KJ di lavoro su un gas comprimendolo isobaricamente del 10%, a che pressione si trova il gas?

Una compressione del 10% corrisponde ad una variazione di volume pari a

$$\Delta V = -\frac{100 - 10}{100} = -1/9 = -0,11 \text{ m}^3$$

Se poi $L = P_0 \cdot \Delta V$, ricordando che il lavoro fatto sul sistema assume segno negativo, abbiamo:

$$P_0 = \frac{L}{\Delta V} = \frac{-20.000}{-0,11} = 181818,2 \text{ Pa} \simeq 1,8 \text{ Atm}$$

8

8 moli di elio, contenuti entro una bombola a tenuta stagna vengono riscaldati a volume costante, subendo un incremento di temperatura pari a $\Delta T = 100 \text{ C}$. Quanto vale la capacità termica molare dell'elio se il riscaldamento è stato prodotto da una sorgente di calore con potenza $K = 17 \text{ W}$ con $\Delta t = 10$ minuti di funzionamento?

Il lavoro prodotto dalla sorgente vale ovviamente $L = K \cdot \Delta t = 17 \cdot 10 \cdot 60 = 10.200 \text{ J}$.

Tale lavoro equivale al calore immesso nel sistema, che causa, a volume costante, solamente l'aumento della temperatura. Visto che è:

$$Q = n \cdot C_{M_V} \cdot \Delta T$$

allora:

$$C_{M_V} = \frac{Q}{n \Delta T} = \frac{10.200}{8 \cdot 100} = 12,75 \text{ J/mK}$$

9

$n = 1,5$ moli di azoto vengono riscaldate innalzando la temperatura del gas da $T_0 = 8 \text{ C}$ a $T_f = 122 \text{ C}$. Sapendo che la capacità termica molare a pressione costante vale $C_{M_P} = 29,12 \text{ J/mK}$, calcola il calore che deve essere fornito al gas nel caso in cui il riscaldamento avvenga a pressione costante e a volume costante.

Sappiamo che sussiste differenza nella risposta di un gas perfetto riscaldato a volume o a pressione costante. Per avere la stessa variazione di temperatura sappiamo che è necessario fornire maggior calore se il processo avviene a pressione costante, perchè parte di tale calore è disperso a causa del lavoro compiuto dal gas per espandersi, cosa che non accade se $\Delta V = 0$. Le formule $Q = n \cdot C_M \Delta T$ si particolareggiano per i due casi distinguendo C_{M_V} da C_{M_P} .

Ricordando la relazione di Mayer:

$$C_{M_P} - C_{M_V} = R$$

per cui $C_{M_V} = 29,12 - 8,314 = 20,81 \text{ J/mK}$.

A pressione costante:

$$Q_P = n \cdot C_{M_P} \cdot \Delta T = 1,5 \cdot 29,12 \cdot (122 - 8) = 4,979 \text{ KJ}$$

A volume costante:

$$Q_V = n \cdot C_{M_V} \cdot \Delta T = 1,5 \cdot 20,81 \cdot (122 - 8) = 3,558 \text{ KJ}$$

CALCOLO DI RENDIMENTI

10

Un motore termico reale assorbe $Q_2 = 200 \text{ Kcal}$ da una sorgente di calore e cede $Q_1 = 135 \text{ KCal}$ al fluido di raffreddamento, a temperatura $T_1 = 270 \text{ K}$. Calcola il rendimento reale e la minima temperatura che dovrebbe avere la sorgente calda affinché il rendimento uguali quello che corrisponde ad una macchina di Carnot che lavora alle stesse temperature

Per definizione di rendimento reale si ha:

$$\eta_r = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{135}{200} = 0,325 = 32,5\%$$

Ricordando il rendimento ideale di un ciclo di Carnot che lavori fra le stesse temperature di esercizio, si ha:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Uguagliando i due rendimenti:

$$\eta_r = \eta_C = 0,325 = 1 - \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow 0,325 = 1 - \frac{270}{T_2} \Rightarrow 0,325 \cdot T_2 = T_2 - 270 \Rightarrow T_2 = \frac{270}{1 - 0,325} = 400 \text{ K}$$

11

Una macchina di Carnot eroga una potenza di 4000 W assorbendo 8 KCal dalla sorgente calda ogni $\Delta t = 3 \text{ s}$ di funzionamento. Quale è il suo rendimento?

Ovviamente, anche per una macchina ideale il rendimento sarà dato dal rapporto $\eta = \frac{L}{Q}$, per cui, ricordando la definizione di potenza W :

$$W = \frac{L}{\Delta T} \Rightarrow L = W \cdot \Delta T$$

Nel nostro caso il lavoro vale $L = 4000 \cdot 3 = 12000 \text{ J}$. Del resto, il calore utilizzato, in Joule, vale: $Q = 8 \cdot 4186 = 33.488 \text{ J}$. Quindi:

$$\eta = \frac{12000}{33.488} = 0,36 = 36\%$$

STUDIO DI UN CICLO TERMODINAMICO

12

$n = 10$ moli di Argon ($C_{M_P} = 20,79 \text{ J/mK}$) subiscono una trasformazione ciclica ABCA composta dall'isoterma AB a $T_A = 300 \text{ K}$ che parte dal valore $P_A = 10^4 \text{ Pa}$, dall'isobara BC a pressione $P_B = 5 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ e dall'isocora CA al volume $V_C = 2,5 \text{ m}^3$. Calcolare le quantità di calore scambiate nelle varie fasi ed il lavoro totale prodotto nel ciclo.

Distinguiamo le tre trasformazioni in sequenza:

1. Espansione isoterma AB. Il gas si espande a temperatura costante. Per la prima legge della termodinamica, a temperatura costante, non si ha variazione di energia interna, quindi il calore scambiato equivale al lavoro fatto dal sistema a causa dell'espansione. Tale calore è ovviamente acquisito dall'esterno, per permettere al gas di espandersi, dunque sarà positivo. Quantitativamente, si ha:

$$L_{AB} = nRT_A \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)$$

Il volume iniziale, visto che la trasformazione è ciclica, equivale al volume costante dell'ultima isocora, per cui $V_A = V_C = 2,5 \text{ m}^3$. Calcoliamo il volume V_B con la legge di Boyle:

$$P_A \cdot V_A = P_B \cdot V_B \Rightarrow V_B = \frac{P_A \cdot V_A}{P_B} = \frac{10^4 \cdot 2,5}{5 \cdot 10^3} = 5 \text{ m}^3$$

Il lavoro sarà allora:

$$L_{AB} = 10 \cdot 8,314 \cdot 300 \ln \left(\frac{5}{2,5} \right) = 17.288,5 \text{ J} = Q_{AB}$$

2. Contrazione isobara BC. Il gas ora si contrae subendo un raffreddamento, dimezzando il proprio volume, per cui il lavoro è ora fatto sul sistema e sarà pertanto negativo.

Essendo una trasformazione isobara, sarà:

$$L_{BC} = P_B \cdot \Delta V = 5 \cdot 10^3 \cdot (-2,5) = -12.500 \text{ J}.$$

Allo scopo di valutare il calore scambiato, troviamo la variazione di temperatura. Usiamo la prima legge di Gay-Lussac:

$$\frac{V_B}{T_B} = \frac{V_C}{T_C} \Rightarrow T_C = \frac{T_B \cdot V_C}{V_B} \Rightarrow T_C = \frac{300 \cdot 2,5}{5} = 150 \text{ K}$$

Si ha quindi che $\Delta T = -150 \text{ K}$. Calcoliamo il calore:

$$Q_{BC} = n \cdot C_{M_P} \cdot \Delta T = 10 \cdot 20,79 \cdot (-150) = -31.185 \text{ J}$$

Secondo il primo principio della termodinamica:

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} - L_{BC}$$

quindi, se volessimo trovare di quanto è variata l'energia interna, avremmo:

$$\Delta U = -31.185 - (-12.500) = -18.685 \text{ J}$$

3. Compressione isocora CA. Il gas ora viene compresso a volume costante, riportandolo al valore iniziale di pressione per cui, ovviamente, il lavoro prodotto dal sistema è nullo. La compressione avviene riscaldando il gas, quindi, fornendogli una certa quantità (positiva) di calore Q_{CA} .

Se il gas recupera i valori iniziali di volume e pressione, deve recuperare anche il valore della temperatura, per cui $T_A = 300$ e $\Delta T_{CA} = 150$.

Calcoliamo il calore, ricordando la relazione di Mayer secondo cui $C_{M_P} - C_{M_V} = R \Rightarrow C_{M_V} = C_{M_P} - 8,314 = 12,48 \text{ J/mK}$:

$$Q_{CA} = n \cdot C_{M_V} \cdot \Delta T = 10 \cdot 12,48 \cdot 150 = 18.720 \text{ J}$$

In tal caso, il riscaldamento isocoro ha prodotto solamente un'innalzamento dell'energia interna pari al calore fornito.

Infine, il lavoro totale prodotto dal ciclo sarà:

$$L_{TOT} = L_{AB} + L_{BC} + L_{AC} = 17.288,5 - 12.500 + 0 = 4788,5 \text{ J}$$

Verifichiamo la validità del primo principio della termodinamica: se la trasformazione è ciclica, $\Delta U = 0 \Rightarrow Q_{TOT} = L_{TOT}$.

Il calore totale scambiato vale:

$$Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 17.288,5 - 31.185 + 18.720 = 4823,5 \text{ J}$$

che è numericamente simile al lavoro totale eseguito, a meno dei valori comunque approssimati per le capacità termiche molari.

13

$n = 15$ moli di ossigeno ($C_{M_V} = 20,98 \text{ J/mK}$) subiscono una trasformazione ciclica $ABCA$ composta dall'isobara AB alla pressione $P_A = 10^5 \text{ Pa}$ che espande il volume da $V_A = 0,3 \text{ m}^3$ a $V_B = 0,4 \text{ m}^3$, dall'isocora BC e dall'isoterma CA alla temperatura $T_C = T_A$. Calcolare le quantità di calore scambiate nelle varie fasi ed il lavoro totale prodotto nel ciclo.

Distinguiamo le tre trasformazioni in sequenza:

1. Espansione isobara AB . Il gas si espande a pressione costante. Il gas produce lavoro positivo in seguito ad un riscaldamento:

$$L_{AB} = P_A \cdot \Delta V = 10^5 \cdot (0,4 - 0,3) = 10 \text{ KJ}$$

Dall'esterno gli deve essere fornito il calore Q_{AB} , per calcolare il quale ci serve l'incremento di temperatura ΔT .

Inizialmente, con l'equazione di stato stimiamo T_A :

$$T_A = \frac{V_A \cdot P_A}{n \cdot R} = \frac{0,3 \cdot 10^5}{15 \cdot 8,314} = 240,56 \text{ K}$$

Usando la prima legge di Gay-Lussac:

$$\frac{T_A}{V_A} = \frac{T_B}{V_B} \Rightarrow T_B = \frac{T_A \cdot V_B}{V_A} = \frac{240,56 \cdot 0,4}{0,3} = 320,75 \text{ K}$$

Quindi: $\Delta T_{AB} = 80,19 \text{ K}$.

Calcoliamo il calore, osservando che $C_{M_P} = C_{M_V} + R = 20,98 + 8,314 = 29,37 \text{ J/mK}$:

$$Q_{AB} = n \cdot C_{M_P} \cdot \Delta T_{AB} = 15 \cdot 29,37 \cdot 80,19 = 35.326,2 \text{ J}$$

2. Decompressione isocora BC . Il gas ora si contrae subendo un raffreddamento a volume costante, per cui il lavoro è nullo. La temperatura deve diminuire in seguito alla decompressione.

Allo scopo di valutare il calore scambiato, valutiamo la variazione di temperatura. E' ovvio che $T_C = T_A$, visto che è un ciclo, per cui $\Delta T_{BC} = -\Delta T_{AB} = -80,19 \text{ K}$:

Calcoliamo il calore:

$$Q_{BC} = n \cdot C_{M_V} \cdot \Delta T = 15 \cdot 20,98 \cdot (-80,19) = -25.235,8 \text{ J}$$

3. Compressione isoterma CA . Il gas ora viene compresso a temperatura costante, riportandolo al valore iniziale di pressione. La compressione avviene con produzione di lavoro negativo da parte del gas, per cui, ricordando il lavoro per una trasformazione isoterma:

$$L_{CA} = nRT_A \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) = 15 \cdot 8,314 \cdot 241 \cdot \ln(0,3/0,4) \simeq -8646,32 \text{ J}$$

In un'isoterma, il calore è pari al lavoro, quindi il gas riversa calore nell'ambiente $Q_{CA} = L_{CA}$

Infine, il lavoro totale prodotto dal ciclo sarà:

$$L_{TOT} = L_{AB} + L_{BC} + L_{AC} = 10.000 + 0 - 8646,32 = 1353,68 \text{ J}$$

Se si tratta di una trasformazione ciclica, il lavoro prodotto è pari al calore scambiato. Quest'ultimo vale:

$$Q_{TOT} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 35.326,2 - 25.235,8 - 8646,32 = 1444,08 \text{ J}$$

valore numericamente simile a quello del lavoro prodotto, a meno degli arrotondamenti.

14

$n = 3$ moli di elio ($\gamma = 1,67$) subiscono una trasformazione ciclica $ABCA$ composta dall'adiabatica AB che porta il gas da una pressione P_A incognita, alla pressione $P_B = 9,47 \text{ Atm}$ partendo da un volume iniziale $V_A = 6 \text{ l}$, variando la temperatura da $T_A = 300 \text{ K}$ a $T_B = 270 \text{ K}$, dall'isobara BC e dall'isocora CA . Calcolare il lavoro totale prodotto dal ciclo. Specificare di quanto è variata l'energia interna e perchè. Effettuare infine uno studio dei calori scambiati nelle varie fasi e stimare i rendimenti reali e ideali di questo ciclo. Si assuma $C_{M_V} = 12,52 \text{ J/mK}$.

Inizialmente, dopo aver visualizzato la trasf. sul piano di Clapeyron, ci procuriamo i valori incogniti inerenti i vari stati.

1. espansione adiabatica AB . Avviene tra i due stati le cui temperature sono note. Applichiamo l'equazione di Poisson nelle due forme $TV^{\gamma-1} = \text{cost}$ e $TP^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{cost}$ per trovare i valori di P_A e V_B .

$$T_A \cdot V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = K^{\gamma-1}$$

essendo $K = V_B/V_A$ il rapporto di compressione tra i volumi. Si ha $T_A/T_B = 1,11$. Usando le note relazioni fra esponenziali e logaritmi, si ha:

$$1,11 = K^{0,67} \Rightarrow \ln 1,11 = 0,67 \cdot \ln K \Rightarrow \ln K = \frac{\ln 1,11}{0,67} \simeq 0,157$$

Dunque:

$$\ln K = 0,157 \Rightarrow e^{\ln K} = e^{0,157} \Rightarrow K \simeq 1,17$$

Dunque vuol dire che $V_B = V_A \cdot 1,17 = 7,02 \text{ l}$. Per le pressioni:

$$T_A P_A^{(1-\gamma)/\gamma} = T_B P_B^{(1-\gamma)/\gamma} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{P_B}{P_A} \right)^{(1-\gamma)/\gamma}$$

Sia $H = \frac{P_B}{P_A}$ il rapporto di compressione tra le pressioni. Si ha $T_A/T_B = 1,11$. Analogamente a quanto fatto per i volumi:

$$\ln 1,11 = ((1-\gamma)/\gamma) \ln H \Rightarrow 0,1052 = -0,4011 \ln H \Rightarrow \ln H = -0,26$$

Usando le note relazioni fra esponenziali e logaritmi, si ha:

$$\ln H = -0,26 \Rightarrow e^{\ln H} = e^{-0,26} \Rightarrow H \simeq 0,77$$

Dunque vuol dire che $P_A = P_B/0,77 = 12,3 \text{ Atm}$.

Possiamo calcolare già anche il lavoro effettuato DAL gas durante l'espansione:

$$L_{AB} = -n \cdot C_{M_V} \cdot \Delta T = -3 \cdot 12,52 \cdot (270 - 300) = 1126,8 \text{ J}$$

Come si vede, è un lavoro positivo, quindi prodotto a spese dell'energia interna.

Essendo, infine, una trasformazione adiabatica, essa si svolge senza scambi di calore, quindi di sicuro $Q_{AB} = 0 \text{ J}$.

2. Contrazione isobara BC . Il gas si contrae dal valore V_B al valore V_C che però è pari a V_A dato che l'ultima trasformazione è a volume costante. Possiamo già calcolarci il lavoro, ricordando la formula (e convertendo le unità di misura!):

$$L_{BC} = P_B \cdot \Delta V = 9,47 \cdot 1,013 \cdot 10^5 \cdot (V_C - V_B) = 959.311 \cdot (6 - 7,02) \cdot 10^{-3} = -978,5 \text{ J}$$

Per calcolarci il calore scambiato, usiamo la formula:

$$Q_{BC} = n \cdot C_{M_P} \cdot \Delta T$$

Ci manca lo sbalzo di temperatura. Per calcolarla, usiamo la legge isobara:

$$\frac{T_B}{V_B} = \frac{T_C}{V_C} \Rightarrow T_C = \frac{T_B \cdot V_C}{V_B} = \frac{270 \cdot 6}{7,02} = 230,77 \text{ K}$$

quindi $\Delta T = -39,23 \text{ K}$: come ci si attendeva, la temperatura è calata, visto che il gas si è ridotto di volume. Con tale dato:

$$Q_{BC} = 3 \cdot (12,52 + 8,314) \cdot (-39,23) = -2451,95 \text{ J}$$

un calore negativo in quanto legato ad un raffreddamento.

3. riscaldamento isocoro CA. Il gas ora viene riscaldato a volume costante, dunque non si ha produzione di lavoro, ma solo comunicazione di calore Q_{CA} al gas stesso.

Si ha $\Delta T_{CA} = 69,23 \text{ K}$. Con tale dato:

$$Q_{CA} = 3 \cdot (12,52) \cdot 69,23 = 2600,28 \text{ J}$$

un calore positivo in quanto legato ad un riscaldamento.

A questo punto, possiamo rispondere a tutte le domande.

1. Il lavoro totale sarà dato da:

$$L_{TOT} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} = 1126,8 - 978,5 + 0 = 148,3 \text{ J}$$

2. La variazione di energia intera è naturalmente pari a zero, visto che si tratta di una trasformazione ciclica. Stato iniziale e finale coincidono: visto che l'energia interna dipende solo dallo stato termodinamico in cui si trova il gas, se di fatto, lo stato non varia, si avrà $\Delta U = 0$. Nella realtà ciò non si realizza, perchè molte delle ipotesi del problema vengono a cadere: ci sono delle dissipazioni (nei meccanismi della macchina termica che realizzerebbe tale ciclo) e soprattutto non si può avere a che fare con fluidi termodinamici ideali, ma reali, per i quali non valgono le leggi viste!.
3. Nelle varie fasi abbiamo già calcolato i calori scambiati. Il calore netto scambiato fra gas ed ambiente (di cui fanno parte le due sorgenti, quella calda e quella fredda tra cui si svolge il ciclo) vale:

$$Q_{TOT} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 0 - 2451,95 + 2600,28 = 148,33 \text{ J}$$

Come si vede, è identico al lavoro prodotto: il calore si è quindi convertito totalmente in lavoro!

4. Il rendimento reale vale:

$$\eta_r = \frac{L_{prodotto}}{Q_{assorbito}} = \frac{|Q_{ass}| - |Q_{ceduto}|}{|Q_{ass}|}$$

Il calore assorbito dall'esterno è quello della fase CA, per cui $|Q_{ass}| = |Q_{CA}| = 2600,28 \text{ J}$.

Il calore ceduto all'esterno è quello inerente la fase BC, quindi $|Q_{ceduto}| = |Q_{BC}| = 2451,95 \text{ J}$.

Il rendimento vale pertanto:

$$\frac{|Q_{ass}| - |Q_{ceduto}|}{|Q_{ass}|} = \frac{2600,28 - 2451,95}{2600,28} = 0,057 = 5,7\%$$

Il rendimento ideale è quello di un ciclo di Carnot equivalente che opera fra le stesse temperature di esercizio. Troviamo le temperature massima e minima. Sappiamo che $T_A = 300 \text{ K}$, $T_B = 270$, $T_C = 230,77 \text{ K}$.

Dunque possiamo considerare $T_C = T_{fredda} = 230,77 \text{ K}$, mentre $T_A = T_{calda} = 300 \text{ K}$. Il rendimento ideale è pertanto:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_C}{T_A} = 1 - \frac{230,77}{300} = 0,77 = 77\%$$

che è superiore al rendimento reale, come dovrebbe essere!