Part sinch – Òtica dij fass

An costa part i parloma dij fass ëd lus fàit da ragg parassiaj. I doma giusta quàich idèja che a vnirà a taj cand i parleroma 'd laser. Is limitoma a parlé dël fass gaussian, e sòn an nòstr but a basta.

TÀULA DLA PART SINCH

TÀULA DLE FIGURE DLA PART SINCH

ËL FASS GAUSSIAN

Sto tipo 'd fass a lé col ch'a ven pì a taj. A l'é la descrission ëd n'onda che a viagia ant un fass ëd ragg para-assiaj, andova la potensa a resta consentrà antorna a l'ass ëd propagassion. La distribussion dl'intensità dël fass a l'é na fonsion gaussian-a, e da sì a deriva 'l nòm dël fass midem. Sta descrission as adata bin a la lus prodòta, pr'esempi, da un laser.

L'ampiëssa compléssa

I l'oma vist, ant la part 4, che n'onda para-assial a l'é arpresentà da n'onda pian-a dël tipo e^{-jkz}, modulà da n'anvlup compléss *A(**r**)*, che a càmbia motobin adasi con la distansa z. I l'oma che l'ampiëssa compléssa a l'é:

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r})\, e^{-jkz}$$

Për che st'ampiëssa compléssa *U(**r**)* a sodisfa a l'equassion ëd Helmholtz, $\nabla^2 U + k^2 U = 0$, a venta che l'anvlup *A(**r**)* a sodisfa l'equassion parassial ed Helmholtz ch'i l'oma vist ant la part 4 :

$$\nabla_T^2 A - j2k\frac{\partial A}{\partial z} = 0\,.$$

andova $\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ a l'é l'operator ëd Laplace trasversal, e as supon che l'anvlup a sia "*quasi*" costant, an manera che soe variassion su distanse dl'órdin dla longhessa d'onda λ a sio trascuràbij. An costa manera, da na mira local, j'onde as compòrto coma ònde pian-e, e le normaj ai front d'ònda a son ragg para-assiaj.

Na solussion sempia ëd costa equassion as oten con l'ipòtesi dj'onde ant l'aprossimassion paraboloidal, ch'i l'oma vist ant la part 4.

$$A(\vec{r}) = \frac{A_1}{z} e^{-jk\frac{\rho^2}{2z}} \quad \text{andova} \quad \rho^2 = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad A_1 \text{ a l'é na costant.}$$

Partend da costa solussion paraboloidal, e con na sempia trasformassion, as oten l'equassion dël fass gaussian. An efet l'aprossimassion paraboloidal a l'é solussion dl'equassion parassial ëd Helmholtz, e se as fà na sostitussion ëd variàbil butand $z-\xi$ al pòst ëd z, as oten ancora n'espression për *A(**r**)* che a l'é solussion dl'equassion parassial ëd Helmholtz:

$$A(\vec{r}) = \frac{A_1}{q(z)} e^{-jk\frac{\rho^2}{2q(z)}} \quad \text{andova} \quad q(z) = z - \xi$$

An costa equassion ξ a peul esse real, compléss ò imaginari pur, e l'equassion a contìnua a esse sodisfàita. Pròpi cand $\xi = -j\,z_0$, andova z_0 a l'é un nùmer real ciamà "***distansa 'd Rayleigh***", l'espression sì dzora a dà l'anvlup compléss dël fass gaussian, vis-a-dì:

$$A(\vec{r}) = \frac{A_1}{q(z)} e^{-jk\frac{\rho^2}{2q(z)}} \quad \text{andova} \quad q(z) = z + j z_0$$

A conven separé l'ampiëssa e la fase 'd cost anvlup compléss, e për sòn i scrivoma la fonsion compléssa *1/q(z)* an termo ëd doe fonsion reaj *R(z)* e *W(z)* tale ch'a sia:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - j\frac{\lambda}{\pi W^2(z)}$$

Sostituend lòn ch'i l'oma trovà ant l'equassion dl'ampiëssa compléssa ***U(r)*** i otnima

$$U(\vec{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} e^{-\frac{\rho^2}{W(z)}} e^{-jkz - jk\frac{\rho^2}{2R(z)} + j\zeta(z)}$$

andova ij vàire paràmeter dovrà a son dàit da:

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad ; \quad R(z) = z\left(1 + \frac{z_0}{z}\right)^2 \quad ; \quad \zeta(z) = \arctan\frac{z}{z_0} \quad ; \quad W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{\pi}}$$

i l'oma peui butà $A_0 = A_1 / jz_0$ për comodità. A_0 e z_0 a son doi paràmeter che a dipendo da le condission inissiaj.

Proprietà dël fass gaussian

Ste proprietà a peulo esse derivà da j'equassion ch'i l'oma scrivù sì dzora.

Intensità

I l'oma vist che l'intensità òtica a l'é dàita da $I(\mathbf{r}) = |U(r)|^2$, e a l'é fonsion dla distansa assial z e dla distansa radial $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. L'espression a dventa :

$$I(\rho, z) = I_0 \left(\frac{W_0}{W(z)}\right)^2 e^{-\frac{2\rho^2}{W^2(z)}} \quad \text{andova i l'oma butà} \quad I_0 = |A_0|^2$$

Për ògni distansa *z* i l'oma che, an fonsion dla distansa radial ρ da l'ass *z*, l'intensità a l'é na fonsion a ciòca gaussian-a, e da sòn a deriva 'l nòm dël fass. An figura 1 i arportoma , a diferente distanse *z*, ël valor dl'intensità normalisà I / I_0 an fonsion dla distansa ρ da l'ass.

An sl'ass dël fass, vis-a-dì a $\rho = 0$, l'ntensità a l'é màssima e a val

$$I(0,z) = I_0 \left[\frac{W_0}{W(z)}\right]^2 = \frac{I_0}{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$$

Se i vardoma com a vària l'intensità màssima normalisà ($I(0, z) / I_0$) al varié dla distansa arlongh l'ass *z* i trovoma l'andura arpresentà an figura 2.

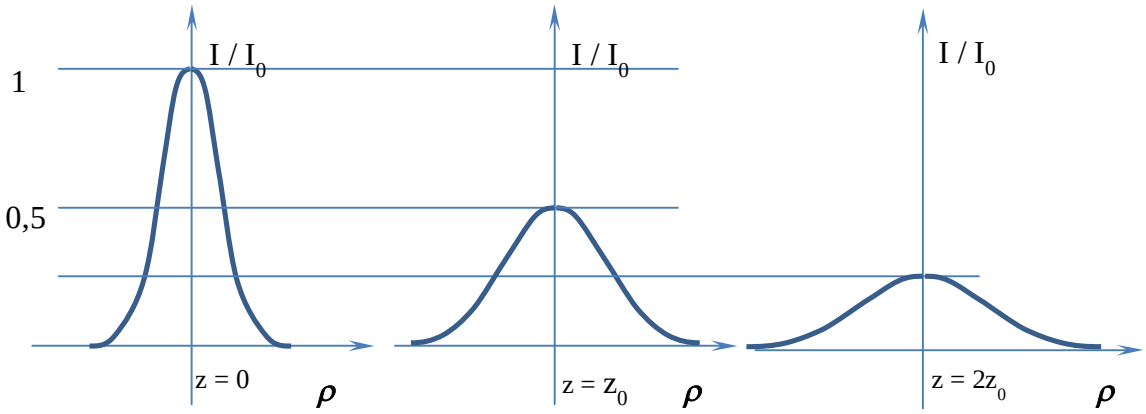

Figura 1 - Intensità dël fass an fonsion dla distansa radial për tre distanse da l'orìgin.

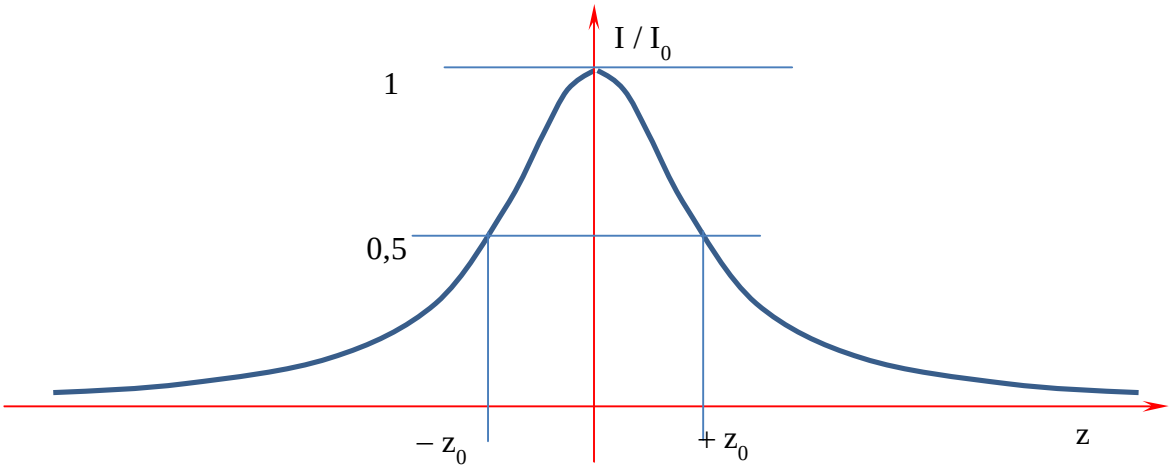

Figura 2 - Andura dl'intensità màssima an fonsion dla distansa z

I notoma che, cand | z | >> z_0 , l'espression ëd costa intensità a dventa $I(0,z)=\frac{I_0\, z_0^2}{z^2}$, e donca la diminussion dl'intensità a l'é coma cola dj'onde sfériche ò paraboloidaj.

Potensa

La potensa luminosa *P* trasportà dal fass a l'é dàita soa intensità integrà su tuta la surfassa interessà. An pràtica as trata d'integré l'intensità , a na distansa *z* qualonque, an sël pian $z = costant$.

$$P=\int_0^\infty I(\rho,z)2\pi\,\rho\,d\rho \quad \text{e da sì as arcava} \quad P=\frac{1}{2}\,I_0\left(\pi W_0^2\right)$$

A l'é ciàir che l'arzultà a dipend nen da *z*, dal moment che la potensa dël fass as ëspatara ma as perd nen.

As peul vardé cola ch'a lé la përsentual ëd potensa trasportà dal fass ant na dàita surfassa antorna a l'ass, comprèisa ant un dàit ragg ρ_0, con un pòch ëd cont as treuva che:

$$\frac{1}{P}\int_0^{\rho_0} I(\rho,z)2\pi\,\rho\,d\rho = 1 - e^{-\frac{2\rho_0^2}{W^2(z)}}$$

Se donca 'l ragg dla surfassa a val $\rho_0 = W(z)$, sta përsentual a l'é a-peu-pré ël 0,86, mentre ant na surfassa con ragg $\rho_0 = 1{,}5\,W(z)$, sta përsentual a riva antorna al 0,99.

Ragg dël fass

Da lòn ch'i l'oma calcolà sì dzora i podoma vëdde che se 'l valor màssim dl'intensità as treuva an sl'ass, cost as arduv d'un fator $1/e^2$, che a val a-peu-pre $0{,}135$, a la distansa $\rho = W(z)$. Dal moment che 86% dla potensa dël fass a l'é trasportà an costa surfassa, as dis che *W(z)* a al'é 'l ragg del fass (ò 'dcò la "*larghëssa dël fass*").

I l'oma definì *W(z)* coma $W(z) = W_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$, che a l'ha sò mìnim W_0 an sël pian $z = 0$. Ël pont ëd mìnim a l'é dit "*strenziura dël fass*" e, 'l diàmeter $2W_0$ a l'é dit "*dimension dël pont luminos*". Për *z* che a val z_0 i l'oma che $W(z) = \sqrt{2}\,W_0$, e cand $z >> z_0$, i l'avroma che $W(z) \approx \frac{W_0}{z_0}\,z = \theta_0\,z$, andova $\theta_0 = \frac{W_0}{z_0}$. Costa espression as peul 'dcò scrive, second lòn ch'i l'oma butà : $\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi W_0}$. An figura 3 i arportoma costi arzultà.

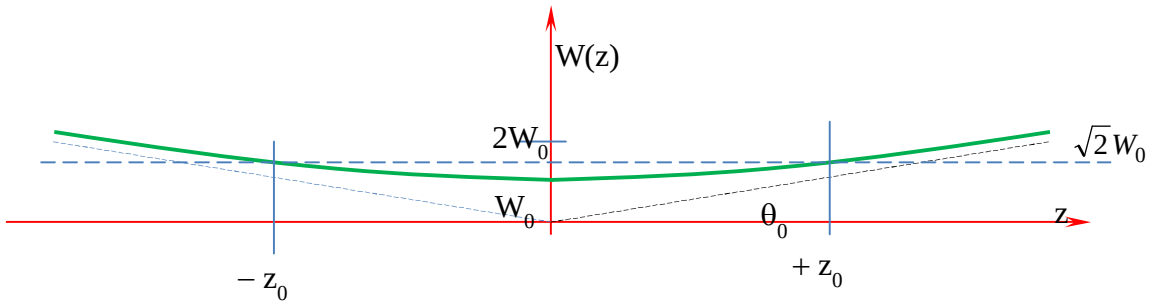

Figura 3 - Ragg dël fass gaussian

Divergensa dël ragg

L'àngol θ_0 che i l'oma indicà an figura a l'é la trassa d'un còno con ël cò ant l'orìgin, generà dal lat ëd l'àngolche a vira antorna a l'ass *z*. A sto còno a tend la surfassa 'd q0rotassion generà da la curva *W(z)* che a vira 'ntorna a l'ass z. Cand i soma ant la situassion $z >> z_0$, i l'oma che 'l còno a conten l'*86%* dla potensa del fass.

L'àngol θ_0 a ven ciamà "divergensa angolar dël fass" e a peul esse scrivùa coma

$$\theta_0 = \frac{2}{\pi}\frac{\lambda}{2W_0}$$

Costa relassion a mostra che, ant un fass che a peussa esse considerà gaussian, se 'l diàmeter inissial a l'é cit ël fass a divergg ëd pì, parèj coma se la longhëssa d'onda a l'é àuta. Për oten-e un fass pòch divergent a venta pàrte da un diàmeter inissial pì gròss, e dovré na longhëssa d'onda curta.

Profondità 'd feu

Ël fass a l'ha sò pont pì consentrà a z = 0, e sì as peul disse che a l'é "a feu". Man man ch'as ëslontan-a da sto pian a và sempe pì "fòra feu". As definiss, antlora, la distansa andova 'l ragg dël fass a stà andrinta al valor $W(z) = \sqrt{2}W_0$, distansa che, com i l'oma vist, a stà fra $-z_0$ e $+z_0$, coma "***profondità 'd feu***".

I l'oma donca che la profondità 'd feu a val $2z_0$, a val doi vire la distansa ëd Rayleigh, e a peul esse scrivùa coma :

$$2z_0 = \frac{2\pi W_0^2}{\lambda}$$

Për la profondità ëd feu a val l'istéss discors fàit për la divergensa, giusta voltà al contrari. Për avèj na longa profondità 'd feu a venta avèj un diàmeter ant l'orìgin pitòst gròss e na longhëssa d'onda curta.

Fase

I arcavoma la fase φ (ρ, z) ant un fass gaussian da l'ampiëssa compléssa ***U(r)*** ch'i l'oma scrivù prima coma $U(\vec{r}) = A_0 \frac{W_0}{W(z)} e^{-\frac{\rho^2}{W(z)}} e^{-jkz - jk\frac{\rho^2}{2R(z)} + j\zeta(z)}$. I l'oma che:

$$\varphi(\rho, z) = kz - \zeta(z) + \frac{k\rho^2}{2R(z)}$$

che an sl'ass, andova $\rho = 0$, as arduv a:

$$\varphi(\rho, z) = kz - \zeta(z)$$

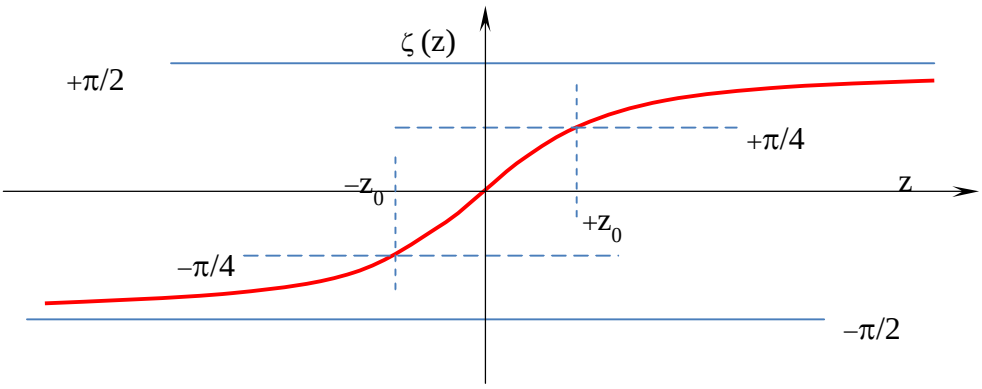

Figura 4 - Ritard ëd fase ant un fass gaussian, rispét a n'onda pian-a

A-i son doe component ëd costa fase, dont la prima, che a l'é $k\,z$, a l'é la fàse 'd n'onda pian-a. La sconda a l'é un ritard ëd fase $\zeta(z)$ che a l'é dàit da $\zeta(z) = \arctan\frac{z}{z_0}$, com i l'oma vist, che a pòrta a na variassion total passand da $-\infty$ a $+\infty$. ëd n'àngol π, second lòn ch'i l'oma disegnà an figura 4. St'efét a l'é ciamà "***efét Guoy***".

Front d'onda

Fòra da l'ass z ëd propagassion, andova $\rho \neq 0$, a interven ël ters termo ch'i l'oma scrivù ant l'espression dla fase. A arpresenta la curvadura dël front rispét a un pian normal a l'ass *z*.

Se i scrivoma la condission për che na surfassa a sia fase costanta i trovoma che a venta ch'a sia sodisfàita l'espression:

$$k\left[z + \frac{\rho^2}{2\,R(z)}\right] - \zeta(z) = 2\pi\,q$$

Le fonsion $\zeta(z)$ e $R(z)$ a vario bin pòch, e donca as peulo consideré costant an sij front d'onda, për ij pont che a stan andrinta al ragg dël fass. I podoma donca, dàita na distansa *z* an sl'ass, pensé che $\zeta(z)$ e $R(z)$ a sio costant an sël front d'onda che a ancontra l'ass *z* an col valor. I podoma donca scrive che:

$$z + \frac{\rho^2}{2\,R} = q\,\lambda + \frac{\zeta\,\lambda}{2\,\pi}$$

andova $\zeta = \zeta(z)$ e R = *R(z)*. Costa a l'é l'equassion d'un parabolòid con ragg *R*. I notoma che i l'oma butà $R(z) = z\left(1 + \frac{z_0}{z}\right)^2$, e donca, an fonsion ëd *z*, *R(z)* a l'ha l'andura arpresentà an figura 5.

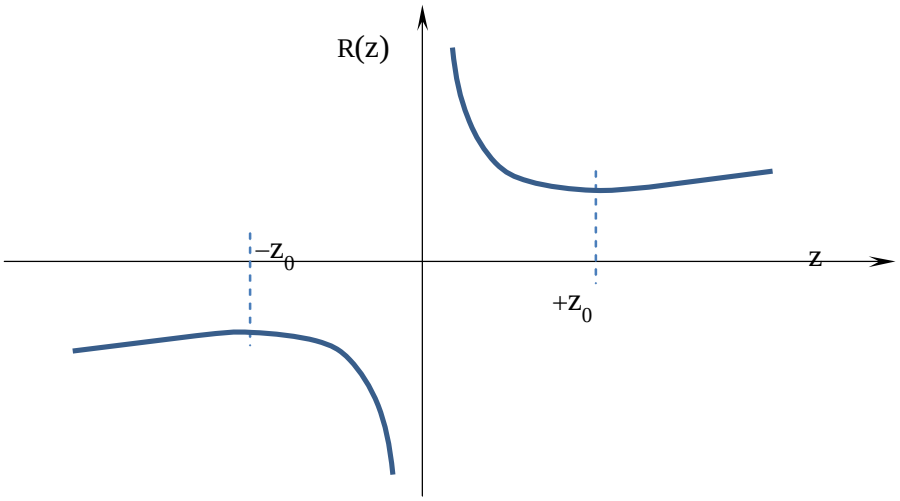

Figura 5 - Ragg ëd curvadura dij front d'onda

As peul noté che ant l'orìgin ël front a l'é pian (con ragg che a tend a l'anfinì). Ant ij doi pont $\pm z_0$ a-i é un mìnim ël valor $|R(z)|$, mentre cand *z* a dventa motobin gròss i l'oma che $R(z) \approx z$, e 'l front a tira a dventé sférich.

Paràmeter che a servo a caraterisé un fass gaussian

Na vira che a l'é conossùa la longhëssa d'onda λ dël fass, mentre che për n'onda pian-a a basta conosse l'ampiëssa e la diression ëd propagassion, e per n'onda sférica a basta conòsse apliëssa e pont d'orìgin, për un fass gaussian a venta conòsse ël paràmeter A_0 (ampiëssa 'd pich), l'ass z ed propagassion, la posission ëd soa strenziura e 'ncora un paràmeter che a peul esse, pr'esempi, ël ragg dla strenziura W_0, opura la distansa 'd Rayleigh z_0. Parèj, se as conòsso ampiëssa e ass, a venta 'ncora conòsse doi dj'àutri paràmeter.

Se a l'é conossù ël nùmer compléss $q(z) = z + jz_0$, ant un pont qualonque 'd l'ass, antlora i conossoma la distansa z da col pont al pont dë strenziura (che a l'é pijà com orìgin) e la distansa 'd Rayleigh z_0, giusta coma part real e part imaginària ëd q. Sto valor a l'é ciamà giusta ***paràmeter q***.

Conossend ël paràmeter q, as peul trové W_0, con j'espression ch'i l'oma arcavà prima, e soa posission. Se peui q a l' conossù ant un pont, antlora a l'é bin fàcil conòsslo an tuti ij pont, daita l'elementar dipendensa linear. Se ant ël pont z_1 i l'oma un q_1, ant ël pont $z_2 = z_1 + l$ i l'avroma giusta $q_2 = q_1 + l$.

Se ant un dàit pont a son conossù ij valor ëd W(z) a ëd R(z), as peulo trové ij valor ëd z, z_0 e W_0 con j'espression ch'i l'oma trovà, opura as peul trové 'l paràmeter q con l'espression:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{j\lambda}{\pi W^2(z)}$$

Trasmission d'un fass travers component òtich

I suponoma 'd manten-e le condission ëd ragg parassiaj, e i vardoma còs a càpita cand un fass gaussian a ven mandà, an sl'ass òtich, a na lente ò an ëspécc. Un fass gaussian a ven modificà (coma larghëssa e curvadura), ma a resta un fass gaussian.

Fass travers na lènte sutila

I l'oma vist ant la part 4 che la trasmëttensa dl'ampiëssa complessa ëd na lent sutila che a l'àbia na longhëssa focal f, a l'é proporsional a $e^{j\frac{k\rho^2}{2f}}$, andova $\rho^2 = x^2 + y^2$ (i mantnima j'istéssi arferiment). Se un fass gaussian a traversa la lent, soa ampiëssa compléssa a ven moltiplicà për sto fator ëd fase.

I consideroma un fass gaussian definì coma sì dzora, sentrà an $z = 0$ e con na strenziuta W_0, che a sia trasmëttù da na lent butà a na distansa z. Sòn a l'é arpresentà an figura 6.

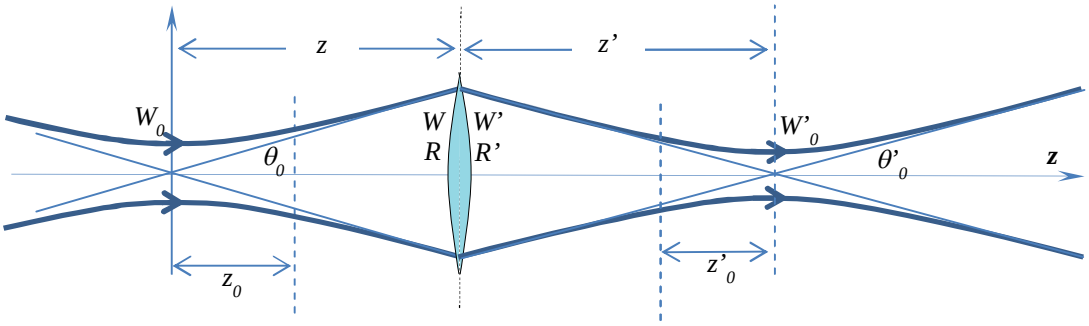

Figura 6 - Fass gaussian travers na lente

La fase dël fass che a riva an sël pian dla lente val, a sta mira, $kz + \frac{k\rho^2}{2R(z)} - \zeta(z)$. I l'oma vist prima cos a valo *R(z)* e *ζ(z)*. La fase dël fass dòp la lente a ven cambià e a dventa

$$kz + \frac{k\rho^2}{2R(z)} - \zeta(z) - k\frac{\rho^2}{2f} = kz + \frac{k\rho^2}{2R'(z)} - \zeta(z)$$

andova $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} - \frac{1}{f}$. I notoma che R a l'é positiv dal moment che 'l front d'onda dël fass incident a l'é divergent, mentre R' a l'é negariv, dal moment che 'l front d'onda dël fass tramëttù a l'é convergent.

Sòn a dis che 'l fass trasmëttù a l'é 'ncora un fass gaussian, con larghëssa $W' = W$. As peul dimostré (còsa che sì i foma nen), che 'l ragg dla strenziura dël fass trasmëttù a val:

$$W_0' = \frac{W}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi W^2}{\lambda R'}\right)^2}}$$

e che 'l senter a l'é a na distansa (negativa përchè a stà a drita dla lente)

$$-z' = \frac{R'}{1 + \left(\frac{\lambda R'}{\pi W^2}\right)^2}$$

Da coste espression peui as treuvo le relassion fra ij paràmeter dij doi fass. Is arferima a lòn ch'a l'é indicà an figura 6. Prima però i definima un "***fator d'ingrandiment***" *M* coma

$$M = \frac{M_r}{\sqrt{1+r^2}} \quad \text{andova} \quad M_r = \left|\frac{f}{z-f}\right| \quad \text{e} \quad r = \frac{z_0}{z-f}$$

Con coste posission as oten che:

$$W_0' = M W_0 \quad ; \quad z' - f = M^2 (z - f)$$
$$2z_0' = M^2 (2 z_0) \quad ; \quad 2\theta_0' = \frac{2\theta_0'}{M}$$

Na lente a peul donca cambié ij paràmeter d'un fass gaussian, sensa però cambié la natura gaussian-a dël fass.

Arbatiment an 's në spécc sférich

Se i definima n'arbatensa dl'ampiëssa compléssa com i l'oma fàit për la trasmëttensa, i trovoma che costa, për në spécc sférich ëd ragg R, a l'é proporsional a $e^{-j\frac{k\rho^2}{R}}$, andova për convension $R > 0$ për spécc bombà e $R < 0$ për spécc angav.

L'assion ëd në spécc sférich ëd ragg R un fass gaussian con ragg ëd curvadura R1 e larghëssa W1 a l'é donca cola d'arbate 'l fass e modifiché la fàse d'un fator $-\frac{k\rho^2}{R}$. Ël fass arbatù a resta gaussian e sò paràmeter a son :

$$W_2 = W_1 \quad ; \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{2}{R}$$

La relassion d'ij ragg a l'é l'istéssa 'd cola per la trasmission dla lente sutila, se as considera l'echivalensa $f = -\frac{R}{2}$. Sòn a dis che 'l fass gaussian a ven modificà pròpi coma da na lente sutila, gavà për la diression ëd propagassion, e a resta un fass gaussian (a l'é ciàir che i consideroma në "*spécc sutil*" ant l'istéssa manera dla "*lente sutila*", e sempe l'aprossimassion parassial).

I consideroma sì sota tre cas d'anterésse:

Spécc pian

A veul dì che i consideroma che $R = \infty$. Se i sostituìma ant j'espression trovà a arzulta che $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1}$ e donca che $R_1 = R_2$. Lë spécc a càmbia mach diression al ragg, sensa cambié la curvadura dle surfassa d'onda, com as peul vëdde an figura 7.

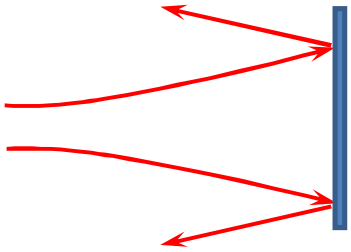

Figura 7 - Fass gaussian su në spécc pian

Spécc ant la strenziura

An sto cas ël ragg ëd curvadura dël front ëd l'onda a l'é $R_1 = \infty$, dal moment che ambelelì l'onda a l'é pian-a. I l'oma che $R_2 = \frac{R}{2}$. Se lë spécc a l'é angav (vis-a-dì con R < 0), antlora 'dcò R2 a l'é R2 < 0 e 'l fass a convergg vers na strenziura pì cita. Sòn a l'é arportà an figura 8.

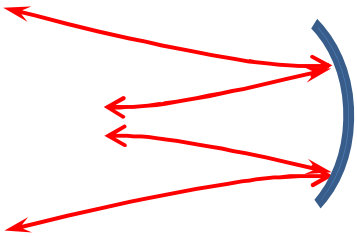

Figura 8 - Fass gaussian con në spécc ant la strenziura

Spécc con l'istéssa curvadura dël front dl'onda

An sto cas i l'oma che $R_1 = -R$. Antlora a arzulta da nòstra relassion che $R_2 = R$, e sòn a veul dì che 'l fass arbatù a cobia precis con ël fass incident. D'àutra part, an sto cas, le normaj al front a son ëdcò normaj a lë spécc, e se i consideroma coste normaj coma ragg, costi a torno andarera copiand ël ragg d'ariv. Sòn a l'é arpresentà an figura 9.

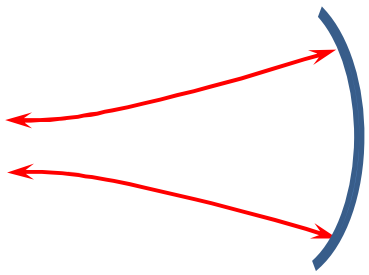

Figura 9 - Front dl'onda coincident con la gombura dlë spécc

Trasmission travers un sistema òtich qualónque

Sensa andé tròp ant l'ancreus, e sempe considerand situassion parassiaj, i disoma giusta doe còse an 's la trasmission d'un fass gaussian travers un sistema òtich che a sia arpresentà da na matris ëd cole viste ant la prima part.

I consideroma donca un sistema arbitrari coma col arpresentà an figura 10, andova i l'oma un fass gaussian an intrada caraterisà da un ragg ëd curvadura R_1 e na larghëssa W_1. Ël fass, për efét dël sistema con matris $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, a seurt caraterisà da un ragg R_2 e na larghëssa W_2.

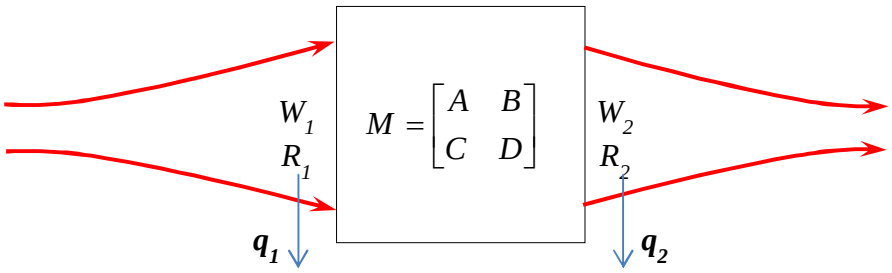

Figura 10 - Sistéma òtich traversà da un fass gaussian

Ij paràmeter q_1 a l'intrada dël sistema e q_2 a la seurtìa a përmëtto d'arcavé ij ragg R e le larghëssе W, e fra intrada e seurtìa a val sempe la relassion:

$$q_2 = \frac{A q_1 + B}{C q_1 + D}$$

J'element A, B, C, D a son determinà, an fonsion ël component, òtich com a son stàit determinà ant le patriss për l'òtica dij ragg. Ëdcò ambelessì a valo tute le considerassion ch'i l'oma fàit a propòsit dl'òtica dij ragg e, an particolar la composission ëd diferent component an cascà. Macassìa i andoma nen pì ant 'ancreus su sto sogét.

IJ FASS HERMITE-GAUSSIAN

A-i son nen mach ij fass gaussian che a sodisfo a l'equassion parassial ëd Helmholtz, ma a-i son vàire diferente solussion. A son macassìa ëd gròss interésse cole solussion che a supon-o front d'onda paraboloidaj, coma la solussion gaussian-a, contut che a l'àbio na diferenta distribussion d'intensità. Ël vantagi ëd coste solussion a l'é che a son compatìbij con ònde arbatùe da spécc sférich ëd gròss ragg, coma coi dovrà për j'angav arsonant dij laser. I consideroma un fass gaussian con d'anvlup compléss dàit da:

$$A_G(x,y,z)=\frac{A_1}{q(z)}e^{-jk\frac{x^2+y^2}{2q(z)}}$$

andova $q(z)=z+j\,z_0$. I l'oma vist che 'l ragg dël fass *W(z)* e 'l ragg ëd curvadura dël front d'onda *R(z)* a son dait da $W(z)=W_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2}$ andova $W_0=\sqrt{\frac{\lambda\,z_0}{\pi}}$, e da $R(z)=z\left[1+\left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right]$.

I consideroma adéss na sconda onda, dont l'anvlup compléss a l'é na version modulà dël fass gaussian:

$$A(x,y,z)=X\left(\sqrt{2}\frac{x}{W(z)}\right)Y\left(\sqrt{2}\frac{y}{W(z)}\right)e^{j\,Z(z)}A_G(x,y,z)$$

andova le fonsion *X(-), Y(-), Z(-),* a son fonsion reaj.

Se sta fonsion a esist, antlora a venta ch'a l'àbia l'istéssa fase dl'onda gaussian-a, a meno ëd na fase *Z(z)* che a dipend nen da *x* e *y*. Se *Z(z)* a l'é na fonsion che a vària pian con *z*, antlora le doe onde a l'han j'istéss front d'onda paraboloidaj, con l'istéss ragg ëd curvadura *R(z)*, e donca a son tratà a l'istéssa manera da le lente sutile e jë spécc.

Sempe se sta fonsion a esist, antlora a venta che l'ampiëssa:

$$A_0\,X\left[\sqrt{2}\frac{x}{W(z)}\right]Y\left[\sqrt{2}\frac{y}{W(z)}\right]\left[\frac{W_0}{W(z)}\right]e^{\frac{x^2+y^2}{W^2(z)}}$$

andova $A_0=\frac{A_1}{j\,z_0}$, a sia na fonsion ëd *x / W(z)* e ëd *y / W(z)* andova le larghësse an diression *x* e *y* a cambio con *z* second l'istéss fator dë scala *W(z)*. La distribussion dle intensità an sël pian trasversal an diression x e y a son fonsion gaussian-e modulà da le fonsion *X(-)* e *Y(-)*.

St'onda modulà a arpresenta n'onda che a l'é nen gaussian-a, ma che a l'ha j'istéssi front d'onda e l'istéssa divergensa angolar dla fonsion gaussian-a.

Sta fonsion d'onda a esist se a-i son tre fonsion *X(x), Y(y), Z(z)* taj che la fonsion *A(x, y, z)* ch'i l'oma scrivù a sodisfa a l'equassion ëd Helmholtz.

Se i sostituima *A(x, y, z)* ant l'equassion ëd Helmholtz e i consideroma che l'equassion ëd partensa $A_G(x, y, z)$ a sodisfa chila midema a l'equassion ëd Helmholtz, e definend ancora doe variàbij $u=\sqrt{2}\frac{x}{W(z)}$ e $v=\sqrt{2}\frac{y}{W(z)}$ dòp sta sostitussion i trovoma:

$$\frac{1}{X}\left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - 2u\frac{\partial X}{\partial u}\right) + \frac{1}{Y}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial v^2} - 2u\frac{\partial Y}{\partial v}\right) + kW^2(z)\frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

An costa equassion ij tre termo dël prim mèmber a son ognidun fonsion ëd n'ùnica variàbil e a son donca indipendent l'un da l'àutr, donca a venta che a sio costant. Se i ciamoma $-2\mu_1$ la costant dël prim termo e $-2\mu_2$ la costant dlë scond termo, ël ters termo a venta ch'a vala $2(\mu_1 + \mu_2)$, i podoma scrive tre equassion diferensiaj ordinàrie, ognidun-a për na variàbil. I otmoma:

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2 X}{du^2} + u\frac{dX}{du} = \mu_1 X \quad ; \quad -\frac{1}{2}\frac{d^2 Y}{dv^2} + v\frac{dX}{dv} = \mu_2 Y \quad ; \quad z_0\left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]\frac{dZ}{dz} = \mu_1 + \mu_2$$

I stoma nen a intré ant ij particolar dle solussion ëd coste equassion, ma i disoma che a-i é tuta na famìja 'd solussion, caraterisà da nùmer antrégh për $\mu 1 = l$ e $\mu 2 = m$.

L'espression dl'ampiëssa compléssa che as oten a l'é donca caraterisà da doi ìndes che a andivìduo un-a dle solussion dla famija:

$$U_{l,m}(x,y,z) = A_{l,m}\left[\frac{W_0}{W(z)}\right]G_l\left[\frac{\sqrt{2}x}{W(z)}\right]G_m\left[\frac{\sqrt{2}y}{W(z)}\right]e^{-jkz - jk\frac{x^2+y^2}{2R(z)} + j(l+m+1)\zeta(z)}$$

Le fonsion G_l e G_m a dipendo da le variàbij ch'i l'oma definì coma u e v, e l'ìndes a ìndica l'òrdin dla solussion. Sì i arportoma l'andura indicativa dj'órdin bass ëd G_l , an figura 11.

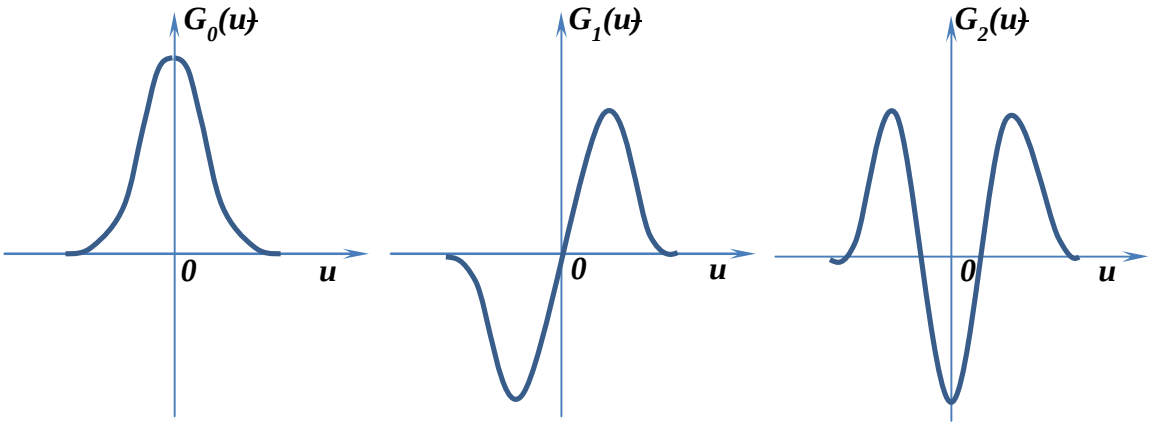

Figura 11 - Fonsion G_l d'órdin diferent

Un fass che a corisponda a la solussion d'órdin *(l, m)* a l'é dit "***fass hermite-gaussian d'órdin l, m*** ". A l'é fàcil da dimostré che 'l fass d'órdin (0. 0) a corispond al fass gaussian ch'i l'oma vist prima.

Intensità dël fass

L'intensità d'un fass dë sto tipo, che a sia d'órdin (l, m) a l'é dàita da l'espression;

$$I_{l,m}(x,y,z) = \left|A_{l,m}\right|^2\left[\frac{W_0}{W(z)}\right]^2 G_l^2\left[\frac{\sqrt{2}x}{W(z)}\right]^2 G_m^2\left[\frac{\sqrt{2}y}{W(z)}\right]^2$$

e a peul esse arpresentà an fonsion dle distanse normalisà *u* e *v*, com a l'é arportà an figuira 12. As peul vëdde che pì l'órdin a l'é àut e pì 'l fass a l'é largh.

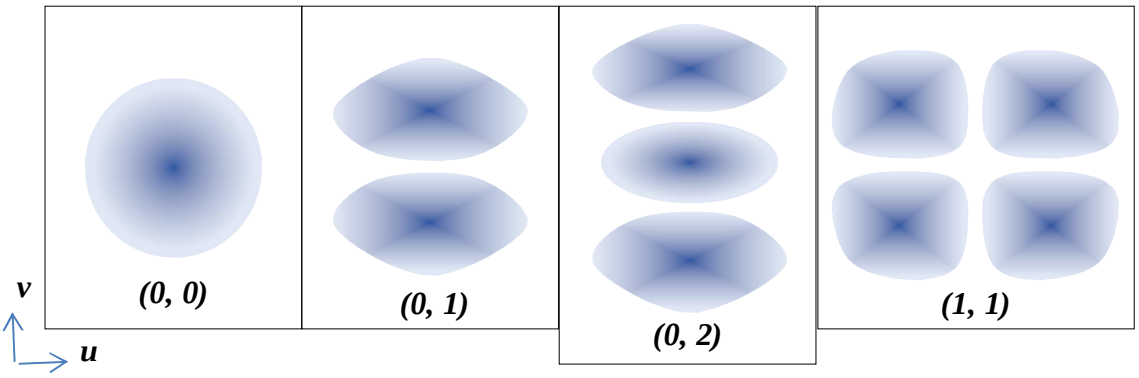

Figura 12 - Intensità dël fass su un pian trasversal, fonsion dl'órdin

L'arpresentassion an figura a arsent dij lìmit gràfich dëlsistema dovrà, ma a l'é bastansa ciàira.

A-i son ancora d'àutri tipo 'd fass, che però sì i stoma nen a vardé. Parland ëd laser, ant la session dedicà a l'eletrònica, i arpijroma sto sogét.

pàgina lassa veuida apòsta