Part 8: Mecànica analìtica

Motobin ampressa i foma un cit arsum dij prinsipi dla Mecanica Newtonian-a. Da cost i partoma për rivé a la formulassion ëd Lagrange dla Mecanica, e peui a cola ëd Hamilton.. Lòn che i voroma mostré a l'é mach la strà vers la Mecànica Analìtica e la Fìsica Teòrica.

TÀULA DLA PART CH'A FÀ EUT

TÀULA DLE FIGURE DLA PART CH'A FÀ EUT

ACHIT

Lòn che i l'oma vist fin-a sì a l'é na curta esposission dla Mecànica Vetorial. I soma partì da la dëscrission dël moviment d'un pont material, peui i l'oma acenà al moviment dij sistema rèid, e an fin a col dij còrp sòlid. Le grandësse che i l'oma dëscrivù ant le prime eut part a l'han, për la pì part, un carater vetorial, a comensé da le equassion ëd Newton për ël moviment, che a son equassion vetoriaj (fòrsa e acelerassion a son stàite dëscrivùe coma vetor), beleché peui as peussa scrivje coma equassion scalar dle component, arferìe a un sistema d'arferiment che 'd sòlit a l'é cartesian an tre dimension.

L'ësvilup che a pòrta a la Mecànica Analìtica, dont i parloma an costa part, a serca d'ëscrive le equassion dël moviment coma relassion fra grandësse che a l'àbio un carater scalar, anlià a l'energia dij còrp midem. As oten na manera eleganta e satìa 'd dëscrive 'l moviment.

An pràrica, ant ël normal anviron macroscòpich, sta neuva formulassion a l'ha giusta quàich vantagi ant la dëscrission ëd cole "***fòrse finte***" che a peulo esse misurà ant ij sistema d'arferiment che a sio nen inersiaj, coma pr'esempi le fòrse 'd Coriolis, ant un sistema d'arferiment terestr, e che donca a vira ansema a la Tèra. Ant la formulassion ëd Newton coste fòrse a son mal fé a traté, mentre an Mecànica Analìtica a ven-o bastansa naturalment dëscrivùe.

Costa formulassion, anvece, a l'é necessaria për passé a la Mecànica Quantìstica e a la Mecànica Statìstica, a soa vira necessarie për dëscrive ij fenòmeni fìsich dël mond molecolar, atòmich e sub-atòmich. An costi anviron a l'é ëdcò sovens necessari arviresse a la Mecànica Relativìstica, dont la Mecànica Clàssica a l'é n'aprossimassion che a va bin cand le velocità an geugh a son motobin pì basse ëd cola dla lus.

Sì i voroma nen andé ant l'ancreus ëd coste costion, përchè nòstr but a l'é mach col ëd fé vëdde ij prim pass vers costi svilup, che a parto tuti da la Mecànica Clàssica. Sòn a dà ëdcò ocasion për noté che l'ëstudi dla Mecànica Clàssica a l'é bin compléss e a finiss nen con la Mecànica ëd Newton. A l'é n'ëstudi che a ventrìa nen saoté ò scursé prima d'afronté la Mecànica Quantìstica, Statìstica, Ondulatòria, Relativìstica e via fòrt, përchè dësnò as risiga ëd resté sensa quàich base ò passagi amportant.

Pàgina lassà veuida apòsta

IJ PONT ËD PARTENSA

Ij pont ëd partensa a son, an pràtica, tut lòn che i l'oma vist fin-a sì, ma ambelessì i voroma giusta buté an evidensa ij pì amportant, an manera da avèj-je sotman.

Prima ëd tut, coma natural, i tnima present ij tre prinsipi ëd Newton che a son a la base ë tuta soa formulassion.

1. Un còrp a resta ant l'ëstat ëd chiete ò moviment drit costant se a interven nen na fòrsa aplicà da fòra a modifichélo

2. Na fòrsa che a agiss an s'na massa a pròvoca na variassion ant ël temp dla quantità ëd moviment, che a l'é proporsional a la fòrsa e proporsional inversa a la massa. $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = m \cdot \vec{a}$

3. Se un còrp a aplica na fòrsa a n'àutr còrp, cost ultim a aplica al prim na fòrsa ëd reassion che a l'é ugual e contraria.

A propòsit dla grandëssa che i l'oma ciamà "***quantità ëd moviment***" $m \cdot \vec{v}$, notoma che, ëd sòlit, an mecànica analìtica costa a ven ciamà "***moment linear***" e as costuma indichéla con $\vec{p}$. Donca as ëscriv:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

A costi prinsipi i giontoma ël postulà che i l'oma enonsià parland ëd travaj virtuaj, a propòsit dle fòrse vincolar $\vec{F}^{(v)}$, che a l'han na natura dëscontìnua, ant un ëspostament virtual $\delta\vec{r}$ che a sia compatibil con ij vincoj, a parte da na situassion d'echilibri:

$$\vec{F}^{(v)} \times \delta\vec{r} \geq 0$$

e i l'oma vist che sòn a pòrta a formulé ël prinsipi dij travaj virtuaj dle fòrse aplicà $\vec{F}^{(a)}$ ant un sistema an echilibri për ëspostament virtuaj anfinitésim, anvertibij e compatibij con ij vincoj $\delta'\vec{r}$:

$$\vec{F}^{(a)} \times \delta'\vec{r} = 0$$

I l'oma peui estendù sto prinsipi ai sistema dinàmich, con ël prinsipi ëd d'Alembert:

$$\left[\vec{F} - \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v})\right] \times \delta'\vec{r} = 0$$

A venta ancora che i ten-o present le definission dl'energia cinética coma $E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ e la definission ëd potensial e energia potensial. A sto propòsit i pensoma a coma a ven definì un sistema conservativ, e i consideroma ël fàit che le component dle fòrse che a derivo da un potensial che a pròvoca un camp ëd fòrse conservativ as oten-o për derivassion coma:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad ; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad ; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

andova U a l'é la fonsion potensial, e për costa a val:

$$\vec{F} \times d\vec{s} = -dV \cdot m = dU$$

Motobin ampressa, coste a son le còse pì amportante che a toca avèj present ant ël discors che a vnirà dòp. Sti argoment as treuvo ant le part 3, 4 e 6. Prima a venta però vëdde n'àutr pont carateristich dla formulassion analitica, subit sì sota.

Coordinà generalisà

Fin-a adéss i l'oma tratà ij problema ant l'ëspassi arferendse a coordinà cartesian-e an tre dimension, ògni vira che sòn a l'era possibil, ò almanch còmod. I l'oma peui vist che an vàire problema le coordinà da consideré a peulo esse mach doe, përchè ël problema as arferiss a un moviment che a càpita an s'un pian. Dle vire i l'oma vist che le coordinà polar ò cilindriche a peulo esse pì còmode e semplificheé la tratassion.

Ij sistema 'd coordinà che vira për vira a l'han anteresse an fìsica a son, an particolar, le coordinà cartesian-e (ant l'ëspassi e an sël pian), le coordinà polar (ant l'ëspassi e an sël pian), le coordinà cilindriche. A l'é natural che coste a son nen le ùniche coordinà possìbij, dal moment che qualonque sistema bon a dëscrive an manera bi-unìvoca la posission d'un pont ant lë spassi a peul esse dovrà coma sistema ëd coordinà d'arferiment.

Për la mecànica analìtica, an particolar, le coordinà a l'han un significà pì general, anlià al concét dij ***gré 'd libertà*** d'un sistema mecànich. A son tute e mach le variabij necessarie a dëscrive 'l moviment. Ant l'ampostassion d'un problema a ven nen spessificà un particolar tipo ëd coordinà da dovré, còsa che a peul peui esse fàita a la fin, second lòn che a sarà pì convenient.

Ij vìncoj present ant un sistema a peulo arduve ij gré 'd libertà. I l'oma vist che un pendol compòst, pr'esempi, vincolà antorna a n'ass fiss, a l'ha mach un gré 'd libertà e soa posission a l'é dëscrivùa da na coordinà sola, che a l'é soa posission angolar antorna a l'ass fiss. Ma i l'oma 'dcò vist che nen tuti ij tipo 'd vincol a peulo esse tratà parèj.

Ël sistema ëd variàbij che as deuvra a ven ciamà "***coordinà generalisà***". An pràtica i podoma buté 'dcò la costion an costa manera :
A-i son sistema materiaj andova la posission ëd tuti ij pont a peul esse determinà conossend un dàit nùmer n ëd paràmeter andipendent fra 'd lor, che i indicoma con $q_1, q_2, \dots, q_n$ e che i ciamoma ***coordinà generalisà****. Se un dàit sistema a peul esse dëscrivù an costa manera da n coordinà generalisà, i disoma che 'l sistema a l'ha n* ***gre 'd libertà****.*

Un sistema ëd N pont P_i che ***ant ògni istant ëd temp*** t a peul esse dëscrivù da n coordinà generalisà ant ël sens ch'i l'oma vist (che a ven-o ciamà ***coordinà lagrangian-e***) andipendente fra 'd lor, a ven ciamà ***sistema olònom***.

Ant un sistema olònom ògni pont P_i a sarà na fonsion ëd $q_1, q_2, \dots, q_n$ e se a l'é 'l cas, ëdcò dël temp t an manera esplìssita. Donca, an general $P_i = P_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$. Se is arferima a na trien-a 'd coordinà cartesian-e sòn a echival a scrive le tre equassion:

$$\begin{cases} x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ y_i = y_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ z_i = z_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{cases}$$

Ël temp t a peul ëdcò nen essie, an manera esplìssita, ant j'equassion e antlora 'l sistema a ven dit ***a vìncoj andipendent dal temp***, ma se 'l sistema a l'é an moviment, le coordinà generalisà q_i a saran sempe fonsion dël temp.

Se 'l sistema a l'é an moviment, un pont P_i genérich, ant l'interval dt a l'avrà në spostament efetiv $d\,P_i$ che a sarà dàit da :

$$dP_i = \frac{dP_i}{dt}dt = \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial P_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial P_i}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial P_i}{\partial t}\right)dt$$

andova le $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, che a son le derivà rispét al temp dle coordinà generalisà, a son ciamà ***velocità lagrangian-e***. I podoma 'dcò scrive :

$$dP_i = \frac{dP_i}{dt}dt = \frac{\partial P_i}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial P_i}{\partial q_2}dq_2 + \ldots + \frac{\partial P_i}{\partial q_n}dq_n + \frac{\partial P_i}{\partial t}dt$$

e se ij vìncoj a dipendo nen dal temp (ant l'espression ëd P_i ël temp a l'é nen esplìssit) i l'oma che :

$$dP_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial q_j}d\dot{q}_j\,dt = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial q_j}dq_j$$

Le equassion dla mecànica, scrite dovrand le coordinà generalisà, a son, coma forma, istesse a cole scrite an coordinà cartesian-e, ma se ël sistema generalisà a ten cont dla possibilità ëd coordinà an moviment, antlora le equassion a conten-o termo che a arpresento an manera direta e natural, le "***fòrse finte***", coma cole ëd Coriolis.

Ël nùmer ëd coordinà generalisà necessari a dëscrive 'l moviment dël sistema a l'é donca dàit dai gré ëd libertà. Se ant ël sistema a-i son vincoj olònom, vis-a-dì taj che a peulo esse arpresentà da equassion algebriche fra le variàbij, antlora a l'é possibil arduve le variàbij con na conversion ëd coordinà, dal moment che nen tute le variàbij a son andipendente (un-a ò pì a peulo esse esprimùe travers j'àutre). Se, an efét, a-i son N particole, ël sistema a dovrìa avèj $3 \cdot N$ gré 'd libertà, ma se a-i son ëdcò m equassion vincolar, antlora as peul arduve 'l nùmer dle variàbij andipendente a $3 \cdot N - m$. An costa manera, con na giusta sernìa dle variàbij, as peul nen dovèj ten-e cont dij vincoj, che a resto già considerà an manera automàtica.

Spassi configurativ ò dle configurassion

I l'oma vist che ël moviment d'un sistema a N gré 'd lbertà a l'é dëscrivù da equassion an N variàbij andipendente. As peul antlora fé n'astrassion matemàtica e supon-e che l'ëstat dël sistema complét, a na dàita mira, a sia dëscrivù da la posission d'un pont ant un iper-spassi a N dimension. Sto spassi a ven ciamà "***spassi configurativ***" ò "***spassi dle configurassion***".

Moment për moment cost pont a pija posission diferente, e donca a dëscriv na lìnea an cost iper-spassi. Costa lìnea, che a l'ha gnente da fé con na traietòria fìsica, a ven ciamà "***percors dël moviment dël sistema***". Ël pont che a dëscriv sta lìnea a ven ciamà "***pont arpresentativ dël sistema***". Ël temp a peul esse considerà coma un parameter dla curva, e a ògni pont a l'é socià un ò pì valor dël temp.

Se ant ël sistema a-i son ëd vincoj olònom definì, antlora 'l percors dël moviment dël sistema a ven limità ant un sub-ëspassi. Se N a son le variàbij e m a son le equassion vincolar, ël sub-ëspassi a sarà a $N - m$ dimension.

Pàgina lassà veuida apòsta

LA FORMULASSION ËD LAGRANGE

Adess comensoma a intré ant la question dla formulassion diferenta e pì vantagiosa për le equassion dël moviment d'un còrp. Cola che i presentoma sì a l'é la formulassion dàita da Lagrange, che a deriva pitòst ampressa da lòn che i l'oma dit sì dzora. I la vardoma mach ant ël cas ëd fòrse che a derivo da un potensial conservativ, dal moment che nòstr but a l'é mach col ëd fé vëdde ij prim pass vers la Mecànica Analìtica.

Relassion simbòlica dla dinàmica

I arpijoma 'l dëscors che a l'ha portane a enonsié 'l prinsipi ëd d'Alembert e i comensoma a classifiché le fòrse an fòrse ative, che a son le ***fòrse aplicà*** an manera direta (e fra coste ël pèis) e ***fòrse vincolar***, che a ven-o da la reassion dij vìncoj, e che an prinsìpi a son nen conossùe.

I comensoma a consideré un sistema ëd N pont lìber P_i con le fòrse che a-j agisso ansima $\boldsymbol{F_i}$ (aplicà) e $\boldsymbol{\Phi_i}$ (vincolar). Për òghi pont a val l'equassion fondamental : $m_i\,\vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{\Phi}_i$.

I podoma scrive costa equassion coma : $\vec{F}_i + \left(-m_i\,\vec{a}_i\right) + \vec{\Phi}_i = 0$. Ël termo che i l'oma butà fra parèntesi a l'ha le dimension ëd na fòrsa e sì i podoma considerélo coma na "*fòrsa finta* " che i ciamoma ***fòrsa d'inèrsia***.

Sòn a veul dì che durant ël moviment, e për òghi pont P_i , le fòrse ative, cole d'inèrsia e cole vincolar a son an echilibri.

I podoma osservé che a val sens'àutr l'identità $\vec{F}_i = m_i\,\vec{a}_i + \vec{F}_i - m_i\,\vec{a}_i$ e donca i podoma consideré che la fòrsa $\boldsymbol{F_i}$ a peul esse pensà coma scomponùa an doe part, dont la prima, che a val $m_i\,\vec{a}_i$, a l'é la fòrsa che a serv a dé 'l moviment che 'l pont a l'ha an efét, mentre l'àutra, che a val $\vec{F}_i - m_i\,\vec{a}_i$ a arpresenta cola pàrt dla fòrsa che a ven anulà da la reassion vincolar e che donca a l'é coma se a fussa përdùa (a l'é l'adission geométrica dla fòrsa ativa e dla fòrsa d'inersia). La prima part a ven ciamà "***component eficent*** " e la sconda a ven ciamà "***component përdùa*** ".

N'àutra manera 'd vëdde 'l prinsipi ëd d'Alembert e 'l prinsipi dij travaj virtuaj a l'é che durant ël moviment le fòrse perdùe as fan echilìbri mersì ai vìncoj. J'equassion dël moviment a derivo parèj da cole dl'echilìbri se as buto le "*fòrse perdùe* " al pòst dle fòrse ative.

Për vìncoj sensa atrito, bilateraj e fiss, la condission d'echilibri d'un sistema a l'era, an Stàtica, për ël prinsipi dij travaj virtuaj, esprimùa da l'equassion:

$$\delta T = \sum_{1}^{N} \vec{F}_i \times \delta P_i = 0$$

Se adéss i andoma a sostituì le fòrse ative con cole perdùe, i trovoma n'equassion che a peul caraterisé 'l moviment e che a ven ciamà "***equassion simbòlica dla dinàmica*** ".

$$\delta T = \sum_{1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i\,\vec{a}_i\right) \times \delta P_i = 0$$

I notoma che costa a l'é na consegoensa dël prinsìpi dij travaj virtuaj, sempe për vìncoj sensa atrito, bilateraj e fiss, che a dis che 'l travaj fàit da le reassion vincolar a l'é zero.

I arcordoma mach, për nen fé confusion, che i l'oma indicà con T ël travaj (che an italian a-j diso L e an inglèis a-j diso W).

Tant an italian com an inglèis ëd sòlit la litra *T* a ìndica 'energìa cinética, che anvéce sì i l'oma ciamà *Ec*. I ciamoma sempe 'l potensial *U* e l'energìa potensial *–V*.

Se i ciamoma $\delta\Lambda$ ël travaj fàit da le reassion vincolar, ant ël cas ëd vìncoj che i tratoma sì i l'avroma che : $\delta\Lambda = \sum_{i=1}^{N} \vec{\Phi}_i \times \delta P_i = 0$.

Se i pensoma 'dcò a vìncoj che a peulo esse nen invertìbij, antlora i dovoma consideré d'avèj che $\delta\Lambda = \sum_{i=1}^{N} \vec{\Phi}_i \times \delta P_i \geq 0$ e coma consegoensa $\delta T = \sum_{1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i\, \vec{a}_i\right) \times \delta P_i \leq 0$. Costa a l'é ciamà la "***relassion simbòlica dla dinàmica*** ".

Le velocità virtuaj

I podoma rivé a j'istesse conclusion ëd prima partend da n'àutra mira, sempe considerand ël prinsìpi dij travaj virtuaj e col ëd d'Alembert

I vardoma se i rivoma a trové d'equassion andova a-i sio nen le reassion vincolar che a son nen conossùe. Për fé sòn i provoma a moltipliché, an manera scalar, ij doi member ëd nòstre equassion për ëd vetor che i preciseroma dòp, e peui i adissionoma tute le equassion. I scrivoma:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\, \vec{a}_i \times \vec{\upsilon}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i + \vec{\Phi}_i\right) \times \vec{\upsilon}_i \quad \text{e 'dcò} \quad \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i - m_i\, \vec{a}_i\right) \times \vec{\upsilon}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{\Phi}_i \times \vec{\upsilon}_i$$

As peul dimostré che costa equassion a val për qualonque sernìa dij *N* vetor j'equassion ëd partensa a implico costa equassion e, al contrari, se costa equassion a val, a valo 'dcò j'equassion ëd partensa.

An costa equassion i podoma trové na sernìa ëd vetor υ_i che a anulo lë scond member, se ij vìncoj a son sensa atrito, bilateraj e fiss. An efét, an cost cas, le reassion Φ_i a son normàj a jë spostament compatìbij e donca a son normaj a velocità compatibij con ij vìncoj. Se i pijoma coma vetor υ_i coj ch'a arpresento 'd velocità che a sio compatìbij con ij vìncoj e che i ciamoma "***velocità virtuaj*** ", lë scond member ëd nòstra equassion a arpresenta la potensa, che i ciamoma *Π*, svilupà da le reassion vincolar (travàj ant l'unità ëd temp), ma se 'l travaj a l'é zero a l'é 'dcò zero la potensa. Donca

$$\Pi = \sum_{i=1}^{N} \vec{\Phi}_i \times \vec{\upsilon}_i = 0 .$$

I foma quàich considerassion su coste velocità che i l'oma ciamà *virtuaj*. Se ste velocità a son compatìbij con ij vìncoj sensa atrito e fiss, antlora a corispondo a velocità possìbij, e fra 'd lor a-i é 'dcò cola real.

Se ij vìncoj a son mòbij a venta estende 'l concét com i l'avìo fàit për jë spostament virtuaj e consideré coste velocità a un dàit istant coma se ij vìncoj a fusso "*congelà* ". A l'é natural che an sta manera fra le velocità virtuaj a-i saran nen cole reaj.

Se peui ij vìncoj a son unilateraj, antlora a venta consideré l'espression :

$$\Pi = \sum_{i=1}^{N} \vec{\Phi}_i \times \vec{\upsilon}_i \geq 0 ,$$

sempe avend present che as trata ëd velocità arferìe a un precis istant, cand le fòrse vincolar a son efetìve.

Tornand a l'equassion ch'i l'avìo trovà i podoma scrive, ant ij doi cas ch'i l'oma vist:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - m_i\,\vec{a}_i\right)\times\vec{\upsilon}_i = 0 \qquad \text{equassion simbòlica dla dinàmica}$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - m_i\,\vec{a}_i\right)\times\vec{\upsilon}_i \le 0 \qquad \text{relassion simbòlica dla dinàmica}$$

As capiss che 'l fàit che sì a-i sio velocità virtuaj anvece che spostament virtuaj, da na mira dël concét, a l'ha gnun-e amportanse.

Sistema conservativ sensa vincoj

Dit sòn, adéss i comensoma a vardé 'l cas particolar d'un sistema sensa vìncoj, andova le fòrse a derivo da un potensial (sistema conservativ). An cost sistema, che a l'é 'l pì sempi, i antroduvoma la formulassion lagrangian-a.

I l'oma vist che për un sistema material d' N pont materiaj i podoma scrive $3{\cdot}N$ equassion dël moviment ant la forma:

$$F_i = \frac{d}{dt}\left(m_i \cdot \dot{x}_i\right)$$

mentre che l'energia cinética dël sistema a l'é definìa da:

$$Ec = \sum_i \frac{1}{2}\cdot m_i \cdot \dot{x}_i^{\,2}$$

I podoma noté che la derivà parsial $\frac{\partial Ec}{\partial \dot{x}_i}$ a val $m_i \cdot \dot{x}_i$, e donca i podoma scrive le equassion dël moviment coma:

$$F_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{x}_i}\right)$$

Ma i l'oma fàit l'ipòtesi che le fòrse a sio cole che a rivo da un camp ëd fòrse conservativ, e donca i l'avroma che $F_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$ andova, com i l'oma vist, $dU = -dV \cdot m$, e $V = V(x_i)$ a l'é ël potensial, fonsion dla posission.

Sòn a pòrta a na relassion motobin anteressanta:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

L'ansema ëd coste equassion a arpresenta ël moviment ëd nòstr sistema con na relassion fra doe grandësse scalar Ec e U. I soma an sla strà bon-a për nòstr but. Për convension, an manera che coste espression a sio coma cole che as treuvo an tanti test, ciamoma V ***l'energia potensial*** vis-a-dì ël potensial cambià 'd segn e moltiplicà për la massa, e scrivoma l'espression sì dzora coma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{x}_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

An costa manera le equassion dël moviment a son dàite da relassion fra grandësse che a l'han un caràter scalar, e pì nen vetorial. I voroma però, adess, passé a un sistema ëd coordinà generalisà q_i che an general a l'é arpresentabil, për ògni variabil, coma:

$$q_i = q_i(x_1, x_2, ..., x_{3N}, t) = q_i(x_j, t)$$

La dipendensa, an general, ëdcò dal temp, a përmëtt la considerassion ëd sistema ‘d coordinà an moviment. Pijoma për bon che a esista la relassion inversa (lòn che a l’é vèra ant la pì part dij cas d’anteresse fìsich), che a sarà:

$$x_j = x_j(q_i, t) \quad \text{e donca}$$

$$\dot{x}_j \equiv \frac{dx_j}{dt} = \sum_i \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial x_j}{\partial t}$$

e derivand costa espression rispét a $\dot{q}_i$ as oten giusta che $\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_j}{\partial q_i}$

Partoma da la considerassion dla derivà parsial dl’energia cinética rispét a $\dot{q}_i$. I l’oma che:

$$\frac{\partial Ec}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_j \cdot \dot{x}_j \cdot \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}$$

ma për lòn che i l’oma vist sì dzora costa espression a dventa:

$$\frac{\partial Ec}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_j \cdot \dot{x}_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_i}$$

e se adess i derivoma rispét al temp i otnoma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_j \left[m_j \cdot \ddot{x}_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + m_j \cdot \dot{x}_j \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right)\right]$$

I consideroma che as peul dëmostré che $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}$ dal moment che:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right) = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right) \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_k \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial x_j}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}$$

e sòn përchè, coma i l'oma vist prima

$$\dot{x}_j = \sum_k \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_k + \frac{\partial x_j}{\partial t}$$

e donca nòstra espression a dventa:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_j \left[F_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2} \cdot m_j \cdot \dot{x}_j^{\,2}\right)\right] = Q_i + \frac{\partial Ec}{\partial q_i}$$

andova le quantità $Q_i = \sum_j F_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_i}$ a ven-o ciamà coma component generalisà dle fòrse. Ma vist che i

consideroma un sistema conservativ, le fòrse a saran dàite da $Q_i = -\sum_j \frac{\partial V}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$ e sòn an lassa scrive, për nòstra espression:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial Ec}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

I l'oma torna n'equassion che a conten mach derivà ëd le doe fonsion scalar *Ec* e *V*. Rispét a cola che i l'avìo otnù an coordinà cartesian-e, sì i l'oma un termo ëd pì, che a l'é $\frac{\partial Ec}{\partial q_i}$. Sto termo a l'é col che a arpresenta, an coordinà generalisà, cole che a ven-o ciamà forse "*finte*" come cola ëd Coriolis ò le fòrse sentrifughe. A l'é sempe a zero an coordinà cartesian-e.

La fonsion Lagrangian-a

As peul dé na forma pì satìa e eleganta a l'espression dle equassion dël moviment definend la neuva fonsion:

$$L = Ec - V$$

Sta fonsion a ven ciamà la ***fonsion Lagrangian-a*** dël sistema. Dal moment che ant un sistema conservativ a venta che a sia $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$, l'éspression dël moviment a dventa:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

I arcordoma che, com a l'é natural, i soma ancora sempe ant l'ipòtesi d'un sistema conservativ.

Sistema nen conservativ

I suponoma che le component dle fòrsa generalisà a sio dàite da:

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial M}{\partial q_i}$$

andova $M = M(q_i, \dot{q}_i, t)$ a l'é na quàich fonsion ëd $q_i, \dot{q}_i, t$. L'equassion ch'i l'oma vist prima, vis-a-dì

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_j \left[F_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2} \cdot m_j \cdot \dot{x}_j^{\,2}\right)\right] = Q_i + \frac{\partial Ec}{\partial q_i}$$

a dventa 'ncora sempe $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$, bastamach che a sia $L = Ec - M$..

La restrission ch'i l'oma butà an sël tipo 'd fòrse, sicura, a l'é nen un cas general, ma a cheuvr la pì part dij moviment ëd partìcole carià ant un camp eletro-magnétich. An efét i podoma pensé a la fòrsa 'd Loretz che a agiss an sla partìcola con cària $\boldsymbol{e}$ (i dovroma j'unità 'd Gauss), che a l'é (notassion vetorial):

$$\vec{F} = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

Parèj com a l'é, st'espression a peul nen esse fàita intré ant ël formalism ch'i l'oma vist, ma as peul esprime 'l càmp travers ël potensial scalar ϕ e 'l potensial vetorial $\boldsymbol{A}$ (vardé la session 5 ëd coste nòte), second le relassion

$$\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} \quad ; \quad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Se as fan tuti ij cont, le component dla fòrsa 'd Lorentz a peulo esse esprimùe coma $F_i = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial x_{\cdot i}}\left[e\left(\phi - \frac{1}{c}\vec{v}\times A\right)\right]\right\}$ che a l'ha la forma ch'i l'oma suponù sì dzora, contut che a sia 'ncora an coordinà cartesian-e, se i butoma che $M = e\left(\phi - \frac{1}{c}\vec{v}\times A\right)$.

Se i passoma a coordinà generalisà i podoma scrive

$$Q_i = \sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = \sum_j \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial M}{\partial x_j}\right)\frac{\partial x_j}{\partial q_i} =$$

$$= \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial M}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial M}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right] =$$

$$= \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} + \frac{\partial M}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right)\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial M}{\partial q_i}$$

dal moment che $M = M\left(x_j, \dot{x}_j\right)$ e che $x_j = x_j\left(q_i, t\right)$. An costa manera la fòrsa 'd Lorentz a peul intré ant ël formalism lagrangian, e 'l moviment ëd la partìcola a l'é descrivù da l'equassion :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \text{andova} \quad L = Ec - M = Ec - e\left(\phi - \frac{1}{c}\vec{v}\times A\right)$$

Ij vincoj

Consideroma adess che nòstr sistema a l'àbia ëd vincoj che a arduvo i $3{\cdot}N$ gré ëd libertà inissiaj a un nùmer pì cit. Le fòrse vincolar a peulo nen esse conossùe se nen dòp avèj conossù ël moviment, dal moment che a cambio second cost.

Ij vincoj a peulo esse comprèis ant ël formalism lagrangian se a son olònom. An sto cas i podoma parte dal prinsipi ëd d'Alembert, che i podoma scrive ant la forma:

$$\sum_i \left[F_i^{(a)} - \frac{d}{dt}\left(m_i \cdot \dot{x}_i\right)\right] \times \delta x_i = 0$$

Le fòrse a son cole aplicà e donca cole vincolar a intro nen ant l'espression. Dal moment che ij vincoj a son olònom, a son daspërlor reversibij e a-i é nen da manca d'indichélo esplissitament.

Dal moment che a-i son vincoj, ij δx_i a son nen tuti andipendent, e donca i podoma nen dì che ij coeficent an parentesi quadrà a sio uguaj a zero. Sto problema a ven tratà ant la manera che i mostroma:

Suponoma che ij vincoj (olònom) a sio arpresentà da *r* equassion dla forma:

$$f_l\left(x_i, t\right) = 0 \quad \text{con } l \text{ da } 1 \text{ a } r$$

I consideroma che qualonque sistema ëd 3·N fonsion dle variabij x_i a peul esse un sistema ëd coordinà generalisà, bastamach che le equassion a sio andipendente e a peusso esse arzolvùe an manera ùnica. I podoma donca serché coste equassion an na manera che a vada bin për lòn che a serv.

Coma prime *r* equassion i podoma pié le stesse equassion vincolar,

$$q_l\left(x_i, t\right) = f_l\left(x_i, t\right) = 0 \quad \text{con } l \text{ da } 1 \text{ a } r$$

mentre për le $\left(3 \cdot N - r\right)$ equassion che a resto i podoma serne equassion dël tipo

$$q_l\left(x_i, t\right) = F_l\left(x_i, t\right) \quad \text{con } l \text{ da } r+1 \text{ a } 3 \cdot N$$

L'ansema ëd coste equassion a arpresenta na trasformassion ëd coordinà. Cost sistema a peul esse arzolvù, an tuti ij cas d'anteresse, an 3·N equassion dël tipo:

$$x_i = x_i\left(q_j, t\right) \quad \text{con } j \text{ da } 1 \text{ a } 3 \cdot N$$

I podoma dovré sta trasformassion për j'equassion dj'ëspostament virtuaj che i l'oma scrivù prima, e i otnoma:

$$\sum_{i=1}^{3 \cdot N}\left[Q_i^{(a)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial Ec}{\partial q_i}\right] \cdot \delta q_i = 0$$

andova $Q_i^{(a)} = \sum_j F_j^{(a)} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial q_i}$

Ma con le posission che i l'oma fàit prima, ij prim ***r*** termo dla somatòria a son, an manera idèntica uguaj a zero, dal moment che ij corispondent δq_i a venta che a sparisso. A dëscrive ël sistema a resto antlora le equassion:

$$\sum_{i=r+1}^{3 \cdot N}\left[Q_i^{(a)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial Ec}{\partial q_i}\right] \cdot \delta q_i = 0$$

Rispét a prima, coste equassion a l'han variabij tute andipendente, e donca as peul dì che le condission che a esprimo as oten-o ugualiand a zero ij coeficent d'ëspostament:

$$Q_i^{(a)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Ec}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial Ec}{\partial q_i} = 0 \quad \text{con } i \text{ da } \left(1+r\right) \text{ a } 3 \cdot N$$

Considerand la fonsion Lagrangian-a, le equassion dël moviment a dvento, coma i l'oma già vist:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \text{con } i \text{ da } \left(1+r\right) \text{ a } 3 \cdot N$$

Ij vincoj a son considerà an manera direta coma na limitassion dël moviment ant un sota-spassi dl'ëspassi dle configurassion che i l'oma vist prima.

Aplicassion dj'equassion ëd Lagrange

I vardoma adéss com a peulo esse ampostà ij problema an sto formalism, sensa peui andé fin-a a la solussion dël problema midem. Sòn giusta për fé vëdde com as ampòsta un probléma dovrand sto formalism.

Ël problema prinsipal a l'é, an partensa, che tipo 'd coordinà serne. A-i son nen teorìe che a peusso sugerì na sernìa, che al basa pì che tut an sij tentativ che a son arfàit cand as dimostro sbalià opura nen pràtich.

As peul sovens noté che as treuvo 'd variàbij che a peulo esse trascurà, e sòn a pòrta d'amportante semplificassion ant ij problema.

Ël problema dij doi còrp

I consideroma doe partìcole dont ël moviment a dipenda mach da fòrse conservative. Se i dovroma le posission vetoriaj $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ dle doe partìcole ël moviment dël sistéma a peul esse dëscrivù da la fonsion ëd Lagrange :

$$L = Ec - V = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

A-i é 'dcò n'àutra manera d'esprime l'energìa cinética, che a l'é giusta n'elaborassion matemàtica dl'espression sì dzora. As treuva :

$$Ec = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2$$

andova : $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}^2$ (vetor ëd separassion fra le doe partìcole). ; $\vec{R} = \dfrac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ (posission dël barissènter) ; $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (massa "ridòta" dël sistema) ; $M = m_1 + m_2$ (massa total dël sistema).

Sta descrission dël sistema a l'é pitòst artifissial, ma a l'ha 'l vantagi che an costa manera as peul consideré, sota le sòlite condission, 'dcò l'energìa potensial dividùa an doe part coma

$$V = V_1(\vec{r}) + V_2(\vec{R})$$

e sòn a fà supon-e che la Lagrangian-a dël sistema a peussa dividse an doe part coma :

$$L = L_1 + L_2 \quad \text{andova} \quad L_1 = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - V_1(\vec{r}_1) \quad \text{e} \quad L_2 = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{R}}^2 - V_2(\vec{r}_2)$$

Ël vantagi 'd costa espression a l'é che 'l moviment ëd doe partìcole che a interagisso fra 'd lor, adéss a le separà an doi moviment indipendent. Sta separassion a l'é possìbil tant cand a-i son nen fòrse estèrne che a agisso an sle partìcole, come 'dcò cand na fòrsa esterna a agiss an sle partìcole, bastamach che sta fòrsa, për unità 'd massa, a sia l'istessa an sle doe partìcole. Dal moment che costa condission a càpita sovens, a val la pen-a amposté 'l probléma an costa manera.

Ambelessì i vardoma mach la part dël moviment arpresentà da la prima part ëd nòstra espression, e sì i giontoma n'àutra condission, vis-a-dì che a sia 'dcò che la fòrsa che a agiss a sia na fòrsa sentral, con $V_1(\vec{r}) = V_1(r)$ con $r = |\vec{r}|$.

Se i dovroma coordinà polar sféricheì i l'oma che : $\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}^2$ e donca i l'avroma che la lagrangian-a a l'é:

$$L_1 = \frac{1}{2} \mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}^2 \right) - V_1(r)$$

La variàbil ϕ a compariss nen, an manera esplìcita, an costa equassion, e donca la corispondenta equassion ëd Lagrange : $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial \phi}$ a dventa giusta:

$$\frac{d}{dt}\left(\mu r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}\right) = 0 \quad \text{e donca} \quad \mu r^2 \sin^2\theta \dot{\phi} = \text{cost.}$$

Costa quantità a peul esse identificà con ël moment angolar arferì a l'ass polar, e a l'é costant qualonque a sia la sernìa dë st'ass. Se i pijoma st'ass che për l'istant inissial a l'é arlongh la diressio ëd r, antlora $\theta = 0$ an prinsìpi, e sta costant a l'é donca ugual a zero.

Dal moment che durant ël moviment r e θ a pijo valor diferent da zero, ma che l'equassion a venta che a sia sempe verificà, antlora a venta che a sia 'dcò $\dot{\phi} = 0$, còsa che a dis che ass polar e diression ël moviment a resto complanar. I podoma donca arduve 'l probléma su un pian , e le coordinà a dvento coordinà polar pian-e. La lagrangian-a a dventa $L_1 = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V_1(r)$.

A sta mira i podoma noté che la variàbil θ a l'é pì nen present an manera esplìcita, donca a l'é na variàbil che a peul esse trascurà, e la corispondenta equassion dël moviment $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}$ a dventa giusta $\mu r^2 \dot{\theta} = \text{cost.} = k$. Sòn a dis che 'l moment angolar antorna a n'ass përpendicolar al pian a l'é costant, e a l'é la sconda lèj ëd Keplero.

Se adéss i consideroma la variàbil *r*, l'equassion relativa a l'é pì complicà, e i podoma scrivla:

$$\mu \ddot{r} = \mu r \dot{\theta}^2 - \frac{\partial}{\partial r} V_1(r)$$

Për la solussion a venta peui conòsse com a l'é fàit sto porensial. Is fërmoma sì, dl moment che i l'oma butà an evidensa lòn ch'i vorìo evidensié, com i vëddroma peui.

Teorema 'd Làrmor

As arferiss al moviment ëd n'eletron ant ël camp ëd na nos atòmica, che a peul esse vist coma un problema dij doi còrp. Se i pensoma che le fòrse esterne a sio zero, i soma ant le condission dël problema 'd prima, e i podoma separé 'l moviment an doe component andipendente. Se as àpila un càmp magnétich le còse a dvento pì complicà, dal moment che le fòrse che as produvo a son nen j'istésse për unità 'd massa dle doe partìcole, e a l'é nen possìbil consideré le fòrse esterne mach fonsion dla posission ***R*** dël senter ëd màssa dël sistema.

I podoma però consideré che la massa dla nos a l'é sempe motobin pì gròssa 'd cola dl'eletron, e i foma na bon-a aprossimassion se i pijoma la nos coma fërma e i consideroma mach ël moviment dl'eletron. Parèj ël problema as arduv al moviment d'un sol còrp.

I l'oma vist che l'efét dël camp magnétich a l'é arpresentà, ant l'equassion ëd Lagrange, dal termo $-\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{A}$, mentre l'efét dël camp elétrich a l'é arpresentà dal potensial coma $V(r) = \frac{Ze^2}{r}$. Donca la lagrangian-a a sarà:

$$L = Ec - V(r) - \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{A}$$

Adéss i suponoma un camp magnétich costant ëd grandëssa H_0, paralél a l'ass *x*. I butoma 'l problema an coordinà cil'ndriche , andova le component ël potensial vetor a son

$$A_\rho = A_z = 0 \quad ; \quad A_\theta = \frac{1}{2}H_0\,\rho$$

e donca la lagrangian-a a dventa

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - V(\rho, z) - \frac{e}{c}\rho\dot{\theta}\frac{1}{2}H_0\,\rho$$

An costa espression a-i é nen, an manera esplìcita, la variàbil θ, e donca, la corispondenta equassion dël moviment, che a sarìa $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=\frac{\partial L}{\partial \theta}$ e donca $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)=0$, a dis che $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=\text{cost.}$, valadì

$$m\rho^2\left(\dot{\theta}-\frac{eH_0}{2mc}\right)=\text{cost.}$$

St'espression a l'é la conservassion dël moment angolar, contut che për adéss mach ël prim termo $m\rho^2\dot{\theta}$ as dirìa un moment angolar.

Adéss i foma na trasformassion dle coordinàdefinìa da $\rho=\rho'$; $z=z'$; $\theta=\alpha+\omega_0 t$ andova i l'oma butà $\omega_0=\frac{eH_0}{2mc}$. A sta mira la lagrangian-a trasformà a dventa :

$$L'=\frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}'^2+\rho'^2\dot{\alpha}^2+\dot{z}'^2\right)-V(\rho',z')-\frac{1}{2}m\rho'^2\omega_0^2$$

e i notoma che se a-i fussa nen ël camp magnétich la lagrangian-a a sarìa:

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2\right)-V(\rho,z)$$

Ste doe equassion a l'han l'istéssa forma, e a càmbio mach për ël termo $\frac{1}{2}m\rho'^2\omega_0^2$. Sto termo, se paragonà con $\frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2$ i trovoma che 'dcò për camp motobin fòrt, ël prim a l'é mach 10^{-12} vire lë scond. Donca as fà na bon-a aprossimassion se as trascura d'autut.

An costa manera le doe equassion a dëscrìvo doi moviment che a son idèntich. La prima a l'é ant un sistema an rotassion (che i l'oma otnù con l'ùltima trasformassion ëd coordinà), mentre l'àutr a l'é ant un sistema ferm.

As peul antlora conclude che se 'l moviment dl'eletron antorna a la nos a l'é dëscrivù ant na dàita manera e ant un sistema d'arferimernt fiss, cand a-i é nen ël camp aplicà, aplicand ël camp ël moviment a l'é dëscrivù a l'istéssa manera, ma ant un sistema dìarferiment an rotassion rispét al prim, con na velocità angolar ω_0. As dis che 'l sistema a l'ha na precession con velocità angolar costant ω_0.

LA FORMULASSION ËD HAMILTON

I passoma adéss a n'àutra dëscrission dle lèj dla mecànica, che a càmbia decis la mira d'andova as pija 'l problema. Ëd sòlit, për ij problema dla fìsica clàssica, sta neuva formulassion a pòrta gnun vantagi an pì rispét a coj che a ven-o da la formulassion ëd Lagrànge. Lòn che anvece a l'é amportant an sta formulassion a l'é che forniss na base bin còmoda për l¨svilup dla mecànica quantìstica e dla mecànica statìstica.

Ij moment

I l'oma vist prima che cand na coordinà a peul esse trascurà përchè a intra nen an manera esplìcita ant la formulassion dl'equassion dël moviment, sòn a ìmplica la costansa ëd na grandëssa che sovens a l'é arconossùa esse un moment.

Ant la formulassion lagnangian-a ij moment a son variàbij dipendente, përchè j'ùniche variàbij indipendente a son le coordinà generalisà e 'l temp.

Dal moment che i l'oma antrodovù le coordinà generalisà, i podoma 'dcò pensé d'antroduve ëd moment generalisà. A l'é ciàir però che an costa manera as seurt da la formulassion lagrangian-a e as và vers la formulassion che a l'é conossùa coma la formulassion ëd Hamilton.

I podoma definì ij moment generalisà, che i ciamoma p_i , coma:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

e donca i l'oma na component ëd moment për ògni coordinà generalisà. La cobia che as oten q_i e p_i a ven ciamà na cobia 'd ***variàbij coniugà***.

Sta definission a pòrta a grandësse che a son moment efetiv ant un sistema conservativ, ma a sta mira a-i é nen na rason precisa për ciamé "*moment* " ste component. e costa a l'é nen l'ùnica definission possìbil, dal moment che 'dcò d'àutre a pòrto a l'istéss arzultà. La giustificassion a stà pitòst ant ël fàit che jë svilup sucessiv ëd costa posission a pòrto a arzultà che a peulo vnì motobin a taj, e che tuta la teorìa che a na deriva dòp a l'é consistenta.

Con sistema che a son nen conservativ as oten-o, macassìa, component che a son nen ëd moment com i soma costumà a conòssje.

Se i consideroma 'l moviment ëd na partìcola carià ant un camp eletro-magnétich, che a l'é un sistema nen conservativ, i podoma scrive l'equassion lagnrangian-a L coma

$$L = Ec - e\left(\phi - \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{A}\right)$$

e për le component dij moment as oten:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{x}_i + \frac{e A_i}{c}$$

andova 'l termo $m\dot{x}_i$ a l'é sicura un moment, mentre 'l termo $\frac{e A_i}{c}$, sensa esse un moment mecànich com i conossoma, a ven giusta ciamà "*moment eletromagnétich*".

Coordinà trascuràbij

Se adéss i scrivoma l'equassion ëd Lagrange dël moviment e i aplicoma nòstra definission ëd moment generalisà, st'equassion a dventa:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}p_i$$

ma da nòstra definission a ven che, an general, se a càpita che $\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$ antlora $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=0=\frac{d}{dt}p_i$ e donca a ven sùbit che $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=p_i=\text{cost.}$

Donca a suced sempe che, se na variàbil a peul esse trascurà, antlora sò moment corispondent a l'é costant. La costansa dij moment angolar e linear ant ij sistema conservativ a l'é un cas particolar dla régola general.

Lë spassi dle fase

L'introdussion dij moment a përmëtt ëd cambié d'autut la mira d'andova vëdde le còse. Ant la formulassion ëd Lagrange le coordinà d'un sistema a son le quantità andipendente che a spessìfico lë stat dël sistema, e ognidun-a 'd coste variàbij a ven ornùa coma na fonsion ël temp coma solussion dl'ansema dle equassion diferensiaj dlë scond órdin che a sol j'equassion ëd Lagrange dël sistema.

N'àutra possibilità a l'é cola 'd consideré tant le coordinà coma ij moment, coma variàbij andipendente, sempe con ël but d'oten-e coste quantità coma fonsion esplìssite dël temp.

Për la formulassion ëd Lagrange a l'é stàit antrodovù lë spassi dle configurassion, andova un pont, andividoà da le coordinà generalisà a dasìa la "posission" dël sistema an fonsion dël temp. Se adéss as antroduvo coma variàbij andipendente, oltra a le coordinà, ëdcò ij moment, sto spassi a l'é pì nen ùtil a la dëscrission dël sistema. La stòria dël sistema ëd N partìcole a peul esse dëscrivùa da un camin ant në spassi a $6N$ dimension, un-a për òghi coordinà e un-a për òghi moment. A l'é ciàir che parlé dë spassi an sto cas a l'ha gnun significà geométrich, meno 'ncora che ant lë spassi dle configurassion.

Ël pont ëd partensa a l'é sempe col ëd trové j'equassion ëd Lagrange dël moviment, e peui a venta stabilì le condission inissiaj. Stabilì un pont ant lë spassi dle configurassion a veul dì stabilì 'l valor inissial (ò al contorn) dël sistema, ma sòn a basta nen a andividoé 'l moviment. Un pont ant lë spassi dle fase a stabilìss ël dobi dle condission al contorn e a definìss al complét ël moviment (ansema a la solussion dj'equassion, natural).

La fonsion Hamiltonian-a

An general la fonsion lagnangian-a a l'é, an general, fonsion dle q_i, dle $\dot{q}_i$ e dël temp t, e donca soa derivà total rispét al temp a l'é dàita da:

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial t}$$

ma i l'oma 'dcò j'equassion ëd Lagrange che a diso che $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_i}$, e se i foma la sostitussion i l'oma che :

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i+\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial t}=\sum_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)+\frac{\partial L}{\partial t}$$

e donca $\frac{dL}{dt} - \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) = \frac{\partial L}{\partial t}$ opura $\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t}$ e a sta mira i podoma dì che se $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, antlora $\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right) = \text{cost.}$, e, con la definission ëd moment: $\left(\sum_i p_i\,\dot{q}_i - L\right) = \text{cost.}$

A sta mira i foma la posission:

$$H = \sum_i p_i\,\dot{q}_i - L$$

e costa H a l'é na neuva fonsion, ciamà Hamiltonian-a, che, coma 'dcò la lagrangian-a L, a l'ha le dimension ëd n'energìa.

I l'oma pen-a vist na caraterìstica amportanta 'd costa fonsion, valadì che H a l'é na costant dël moviment se la lagrangian-a L a dipend nen an manera esplìcita dal temp t. Ant la pì part dij cas d'anterésse fìsich, as peul vëdde che costa fonsion a finiss për esse l'espression dl'energìa total dël sistema.

As supon che H a sia esprimùa coma fonsion dle coordinà q_i, dij moment p_i e dël temp t, e donca $H = H(q_i, p_i, t)$. Se l'espression ëd H a l'é arcavà a parte da la lagrangian-a L, a smijrà na fonsion ëd $q_i, \dot{q}_i, t$, ma as supon che, da la definission dij moment, le variàbij $\dot{q}_j$ a sio arzolvùe an fonsion ëd q_i, p_i, t e sostituìe ant l'hamiltonian-a.

Da coste definission a peul esse derivà na forma alternativa për scrive j'equassion dël moviment, dovrand l'hamiltonian-a. An efét i l'oma che:

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

ma 'dcò, da l'istéssa definission ëd H:

$$dH = \sum_i \dot{q}_i\, dp_i + \sum_i p_i\, d\dot{q}_i - dL$$

andova, macassìa, i consideroma $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$. Donca

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt =$$
$$= \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i p_i\, d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

adess i sostituima costa espression ëd dL ant la sconda espression ch'i l'oma trovà sì dzora për dH e i otnoma:

$$dH = \sum_i \dot{q}_i\, dp_i + \underline{\sum_i p_i\, d\dot{q}_i} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \underline{\sum_i p_i\, d\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial t} dt =$$
$$= \sum_i \dot{q}_i\, dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad \text{ma i l'oma vist che} \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i \quad \text{e donca}$$
$$dH = \sum_i \dot{q}_i\, dp_i - \sum_i \dot{p}_i\, dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

A sta mira i podoma confronté la prima espression ch'i l'oma scrivù për dH, con cost'ùltima espression ch'i l'oma trovà. Dal moment che tute doe a esprimo l'istéss diferensial, a venta che ij coeficent dij doi a sio j'istéss. I l'oma donca che:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

Le prime doe equassion sì dzora a son ciamà "***forma canònica ëd Hamilton dj'equassion dël moviment*** ". As dirìa che coste equassion a son na semplificassion dij problema, dal moment che a son equassion diferensiaj dël prim órdin, mentre j'equassion ëd Lagrange a son dlë scond órdin. Ëd sòlit sòn a l'é nen vèra, përchè sovens as trata d'equassion nen fàcij da arzòlve.

Le condission che a përmëtto d'arzòlve an manera pì sempia coste equassion a son cand un-a ò 'd pì dle variàbij p_i opura q_i a comparisso nen an manera esplìcita ant la fonsion Hamiltonian-a, përchè sòn a ìndica che la corispondenta quantità coniugà a l'é na costant dël moviment.

A l'é ciàir che su sti argoment còse da dì a-i na son ancora vàire (sì i l'oma giusta comensà). I arpetoma, macassìa, che j'arzultà pì anteressant ëd costi svilup a son aplicà nentant ant la fìsica clàssica, che 'd sòlit a arzòlv ij problema sensa dovré costi svilup, ma pitòst a la mecànica quantìstica e a la mecànica statìstica. Se a capitrà 'd fé na session ëdcò su costi argoment i completroma 'l discors ambelelà.

Sensa andé tròp ant l'ancreus dla Mecànica Analìtica svipupà da Hamilton, ambelessì i vardoma 'ncora un prinsìpi, sempe 'd Hamilton, che a-j diso "***Prinsipi variassional*** ".

PRINSIPI VARIASSIONAJ

A-i son vàire prinsìpi variassionaj che a son stàit proponù. Sì i vardoma giusta 'l prinsìpi enunsià da Hamilton e i doma n'uciada al prinsìpi dla minor assion. I comensoma a parlé dël càlcol dle variassion.

Calcol dle variassion

Coma pont ëd partensa i consideroma 'l probléma matemàtich dë stabilì sota che condission certi tipo d'integraj a l'han un valor stassionari. I consideroma donca l'integral :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x)\, d\,x$$

andova $y' = \dfrac{d\,y}{d\,x}$ e as supon che x a sia na variàbil indipendenta e y na variàbil dipendenta. I suponoma che ij valor ëd *x* e *y* a sio dàit ai lìmit d'integrassion, e che 'l valor dl'integral *I* a dipenda dal camin che a ven përcorù fra ij doi lìmit. As trata 'd vëdde sota che condission l'integral *I* a peul avèj un valor stassionari. Is arferìma a figura 1.

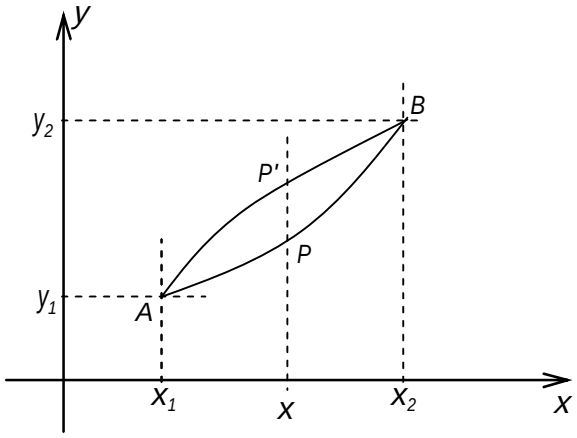

Figura 1 - La variassion δ

I suponoma che 'l camin *APB* a sia col andova l'integral a l'ha un valor stassionari, e i consideroma un camin davzin *AP'B* con jë stessi pont *A* e *B* estrem. Fra doi pont genérich dij doi camin P e P' i stabilìma la corispondensa $P \rightarrow P'$ tala che $P = (x, y)$ e $P' = (x, y + \delta y)$, vis-a-dì che la coordinà *x* a resta costant passand da *P* a *P'*. Sòn a definiss cola ch'a-j diso "***variassion δ***" dël camin. Ij lìmit ëd costa variassion a son che $\delta y_1 = \delta y_2 = 0$ (donca ant j'estrm a-i é nen variassion).

As supon che la variassion a sia un-a qualonque, bastamach ch'a sia cita, e sòn a peul ëdcò esse esprimù da l'espression $\delta\, y = \eta(x)\delta\alpha$, andova α a l'é un paràmeter comun a tuti ij pont, e $\eta(x)$ a l'é na qualonque fonsion ëd *x*, con le condission che $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. As peul peui definì un $\delta\, y' = \eta'(x)\delta\alpha$.

Dal moment che la variassion a l'é pensà esse cita, l'integral fàit an sël camin varià a peul esse dëscrivù daj termo 'd prim órdin dlë svilup an série 'd Tayor dla fonsion F. I l'oma che l'integral *I'* an sël camin varià a val:

$$I' = \int_{x_1}^{x_2} \left[F(y, y', x) + \frac{\partial F}{\partial y}\eta\delta\alpha + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\delta\alpha \right] dx$$

e da sì a ven che $\delta I = \delta\alpha \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' \right] dx$

I disoma che , integrand për part e considerand η' coma fator diferensial, as peul scrive $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' dx = \frac{\partial F}{\partial y'}\int_{x_1}^{x_2} \eta' dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta dx$, ma 'l prim termo a và a zero përchè η a val zero ant j'estrém, e donca $\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' dx = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta dx$. Antlora i podoma scrive:

$$\delta I = \delta\alpha \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\delta y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right] \eta dx$$

La condission për che I a l'àbia un valor stassionari a l'é che δI a sia zero. Dal moment che η a l'é na fonsion arbitrària, antlora a venta che 'l fator an parèntesi a sia zero, vis-a-dì:

$$\frac{\partial F}{\delta y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

Cost arzultà a peul esse generalisà al cas andova a-i son n variàbij dipendente y_i. A-i saran n condission con la forma $\frac{\partial F}{\delta y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) = 0$. Se peui le n variàbij y_i a son fonsion ëd m variàbij andipendente x_j, antlora ste condission a dvento: $\frac{\partial F}{\delta y_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{d}{dx_j}\left(\frac{\partial F}{\partial y_{i,j}'}\right) = 0$ andova $y_{i,j}' = \frac{dy_i}{dx_j}$

Sta condission dë stassionarietà a ven indicà con l'espression $\delta \int \cdots \int F\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_j = 0$.

Prinsìpi 'd Hamilton

I vardoma sto prinsìpi da doe mire diferente. I comensoma a consideré che j'equassion ëd Lagrange dël moviment a son dàite da j'espression $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ che donca i podoma scrive 'dcò ant la forma $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0$. I l'oma giusta vist che sòn a ìmplica che a sia:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0$$

se i consideroma L coma nòstra fonsion F, peuj i consideroma q_i coma nòstre y_i ëd prima, donca le $\dot{q}_i$ a saran le nòstre y'_i ëd prima, e a la fin t coma nòstr x ëd prima. L'integral $S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$ a l'é ciamà "***fonsion prinsipal ëd Hamilton***" e a l'ha në stat stassionari an corispondensa dël moviment real dël sistema. Costa a l'é na formulassion ël prinsìpi 'd Hamilton.

Adéss i vardoma la còsa da n'àutra mira.

Da lòn ch'i l'oma vist ant un sistema conservativ con vìncoj bilateraj e sensa atrito, la condission d'echilibri a corispond a un pont andova la fonsion potensial, dont a derivo le fòrse, a l'ha la derivà ch'as anula (pont stassionari).

Ëdcò për la dinàmica as peul trové quaicòs che a smija a sòn. An pràtica i sercoma na fonsion che a sia mìnima ò màssima an corispondensa d'un moviment possìbil për ël sistema (ò an corispondensa dël moviment real dël sistema). Sòn a veul dì trové na fonsion *I* tala ch'a sia $\delta I = 0$ për qualonque variassion dël moviment dël sistema rispét al moviment real che 'l sistema midem a fà.

Për podèj fé un disegn sempi për ilustré la còsa i suponoma, giusta ant ël disegn, d'avèj na sola variàbil generalisà. A l'istant t_1 la variàbil a val q_1, a l'istant t_2 la variàbil a val q_2. Ant lë spassi dle configurassion ël moviment ëd nòstr sistema a sarà arpresentà da na lìnia coma cola ëd figura 2.

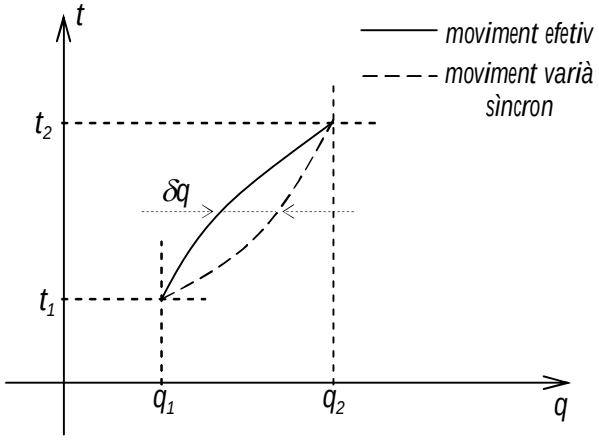

Figura 2 - Moviment varià sincron

I arpijoma l'equassion simbòlica dla Dinàmica për un sistema 'd pont $\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i - m_i\,\vec{a}_i\right)\cdot\delta\vec{x}_i = 0$ e i la consideroma ant un dàit interval ëd temp da t_1 a t_2. Le variassion $\delta\mathbf{x}_i$ a son intèise coma le variassion virtuaj ch'i l'oma vist prima, vis-a-dì coma se, istant për istant, ël pont a fussa ferm. A son peui considerà fonsion contìnue dël temp. Na vira che sti spostament, che a son diferent l'un da l'àutr, a sio fissà, dal moviment efetiv as peul trové n'àutr moviment, che a l'é indicà an figura e che as ës-ciama "***moviment varià sìncron*** ".

An costa situassion jë spostament virtuaj e la derivassion rispét al temp a son doe operassion andipendente, e donca për ògni pont a val la relassion : $\frac{d}{dt}\delta\vec{x}_i = \delta\frac{d\vec{x}_i}{dt} = \delta\vec{v}_i$

Dit sòn integroma rispét al temp da t_1 a t_2 nòstra equassion simbòlica e i l'avroma:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i \times \delta\vec{x}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i\,\frac{d\vec{v}_i}{dt}\,\delta\vec{x}_i\right]dt = 0$$

Ël prim termo dl'integrand a arpresenta 'l travaj virtual dle fòrse ative, che i podrìo ciamé $\delta^{\circ}T_a$ (i arcordoma che an ste nòte ël travaj a l'é *T* e l'energìa cinética a l'é *Ec*).

Svilupand l'integral (sì i lo foma nen) ant l'espression as buta an evidensa l'energia cinética *Ec* dij pont e as oten:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta^{\circ}T_a + \delta Ec\right)dt - \left|\sum_{i=i}^{N} m_i\,\vec{v}_i\,\delta\vec{x}_i\right|_{t_1}^{t_2} = 0$$

Se le fòrse ative a derivo da un potensial *U*, antlora i l'avroma che $\delta^{\circ}T_a = \delta U$. Se peui i consideroma, coma an figura, che ant j'estrem ëd l'interval considerà jë spostament virtuaj a son zero, anlora lë scond termo dl'espression ch'i l'oma scrit a spariss e a resta, a la fin:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(Ec - U\right)dt = 0 \quad ; \quad \delta\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = 0$$

andova *L* a l'é la fonsion lagrangian-a.

Sòn a esprim ël ***prinsìpi 'd Hamilton*** che a dis che:

fra tuti ij moviment varià sincron ant n'interval $t_1 \le t \le t_2$ *che a l'àbio spostament nuj ant j'estrem dl'interval midem, ij moviment efetiv a son coi andova l'intergral dla fonsion lagrangian-a L a l'é stassionari. Sòn a val për un sistema a vìncoj bilateraj e sensa atrito.*

Prinsìpi 'd Hamilton modificà

I l'oma vist che j'equassion dël moviment ëd Lagrange a peulo esse sostituìe da n'ansema d'equassion diferensiaj dël prim órdin ciamà equassion canòniche 'd Hamilton. I l'oma definì la fonsion Hamiltonian-a coma $H = \sum_i p_i\,\dot{q}_i - L$, e donca a val la relassion $L = \sum_i p_i\,\dot{q}_i - H$, andova $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

Antlora i podoma scrive 'l prinsìpi 'd Hamilton coma:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_i p_i\,\dot{q}_i - H\right)dt = 0$$

A venta noté che, ant ël prinsìpi 'd Hamilton enunsià prima, jë spostament ant lë spassi dle configurassion për le variàbij q_i , con *t* costant, a son indipendent, mentre a-i son corispondente variassion ëd $\dot{q}_i$ che a dipendo da le prime. An sto cas i soma ant lë spassi dle fase, e le variassion a *t* costant tant dle p_i coma dle q_i a son andipendente.

Coma già i l'avìo fàit prima, i podoma 'dcò ambelessì esprime le variassion dle q_i e dle p_i travers un parameter α istéss për tuti ij pont dël camin d'integrassion ant lë spassi dle fase.

$$\delta q_i = \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\delta\alpha = \eta_i\,\delta\alpha \quad ; \quad \delta p_i = \frac{\partial p_i}{\partial \alpha}\delta\alpha = \xi_i\,\delta\alpha$$

andova η_i e ζ_i a son fonsion arbitràrie dël temp con la condission che :

$$\eta_i(t_1) = \eta_i(t_2) = \xi_i(t_1) = \xi_i(t_2) = 0$$

I podoma apliché ambelessì 'l procediment ch'i l'oma dovrà prima, e scrive che la variassion dl'integral a l'é dàita da:

$$\delta S = \delta\alpha\int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left(\frac{\partial p_i}{\partial \alpha}\dot{q}_i + p_i\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right)dt$$

I notoma che $\int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \eta_i' \, dt$ e integrand për part con η' coma fator difernsial i trovoma che $\int_{t_1}^{t_2} p_i \eta_i' \, dt = \left| p_i \eta_i \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \eta_i \, dt$ e dal moment che η_i a val zero ant j'estrem, i l'avroma $\int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \eta_i' \, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \eta_i \, dt$. I andoma antlora a sostituì costa espression an nòstr integral, tnisend ëdcò cont ëd coma i l'oma definì le fonsion η_i e ζ_i . I trovoma che:

$$\delta S = \delta \alpha \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \xi_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \eta_i \right] dt$$

Dal moment che le fonsion η_i e ζ_i .a son indipendente e arbitràrie, për che la variassion a sia zero a venta che a sio a zero in coeficent ed coste fonsion, e donca

$$\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0 \quad ; \quad \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad \text{e da sòn} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

che a so j'equassion canòniche dël moviment, com i l'avìo già trovàje.

Prinsìpi dla mìnima assion

I vardoma adéss un tipo 'd variassion pì general ëd col ch'i l'oma vist prima. A-i diso "***variassion Δ*** " , andova a l'é possìbil varié nen mach le coordinà, ma 'dcò 'l temp. As supon sempe che a j'estrem dël camin le coordinà dël camin anvarià e cole dël camin varià a coincido, ma sa supon che a peussa nen coincide 'l temp. An costa manera un pont *P* qualonque dël camin nen varià a l'avrà un corispondent *P'* ant ël camin varià dont le coordinà a son anlià da le relassion:

$$q_i \rightarrow q_i' = q_i + \Delta q_i = q_i + \delta q_i + \dot{q}_i \, \Delta t$$

An costa espression δ al'ha l'istéss significà 'd prima e ant j'estrem dël camin $\Delta q_i = 0$. Is arferima a figura 3, andova i dëscrivoma sta variassion për un sistema con na coordinà sola (opura na coordinà d'un sistema).

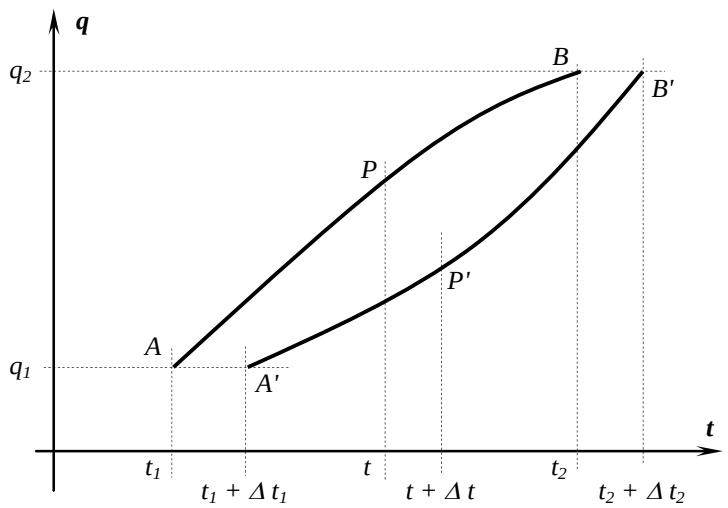

Figura 3 - Variassion Δ

I suponoma na qualonque fonsion $f = f(q_i, \dot{q}_i, t)$ e soa variassion *Δ* a sarà dàita da:

$$\begin{aligned}\Delta f &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} \Delta \dot{q}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t = \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} (\delta q_i + \dot{q}_i \Delta t) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} (\delta \dot{q}_i + \ddot{q}_i \Delta t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t \\ &= \delta f + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t\end{aligned}$$

Se i consideroma la variassion *Δ* dla fonsion prinsipal ëd Hamilton i l'oma:

$$\Delta S = \Delta \int_1^2 L\, dt = \delta \int_1^2 L\, dt + \left| L \Delta t \right|_1^2$$

An sto cas l'integral $\delta \int_1^2 L\, dt$ a spariss nen, përchè ant ij pont estrem i l'oma che $\delta q_i \neq 0$. Da j'equassion dël moviment ëd Lagrange, dal fàit che $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i)$ e che $\Delta q_i = \delta q_i + \dot{q}_i \Delta t$, i otnoma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = \\ &= \frac{d}{dt}(p_i\, \delta q_i) = \frac{d}{dt}(p_i\, \Delta q_i) - \frac{d}{dt}(p_i\, \dot{q}_i \Delta t)\end{aligned}$$

e dovrand sti arzultà ant l'espression ëd *ΔS* a ven che: $\Delta \int_1^2 L\, dt = \left| \left(L - \sum_i p_i\, \dot{q}_i \right) \Delta t \right|_1^2 = -\left| H\, \Delta t \right|_1^2$

Se i consideroma mach sistema andova $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ e'd variassion andova *H* a resta costanta, antlora i l'oma che $\left| H\, \Delta t \right|_1^2 = \Delta \int_1^2 H\, dt$. Da l'espression ëd prima, antlora:

$$\Delta \int_1^2 \sum_i p_i\, \dot{q}_i\, dt = 0$$

Costa espression a corispond al prinsìpi dla mìnima assion. La fonsion $W = \int \sum_i p_i\, \dot{q}_i\, dt$ a l'é dita la fonsion caraterìstica ëd Hamilton.

TEORÌA DLE TRASFORMASSION

Ant le formulassion ëd Lagrange e Hamilton i l'oma fàit atension che la forma dle relassion a fussa l'istéssa për tuti ij sistema 'd coordinà generalisà. Qualonque trasformassion dle coordinà arpresentà da le relassion $q'_i = q'(q_1, q_2, \cdots q_n, t)$ a produv equassion idèntiche a cole 'd partensa. I notoma che an coste considerassion i consideroma mach trasformassion che a comprendo tut l'ansema dle variàbij, e nen traformassion parsiaj.

I l'oma antrodovù, ant la formulassion ëd Hamilton, le coordinà definìe coma $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. Sòn a pòrta a pensé a un concét diferent complét da col ëd coordinà che a andividuo un pont. Macassìa, però, a-i é na similitùdin fra ij doi sistema 'd coordinà. I podoma scrive j'equassion canòniche :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

e i provoma a cambié giusta 'l nòm dle variàbij. Se i doma a q_i ël sìmbol $-p'_i$ e a p_i ël simbol q'_i , i podoma scrive che $\dot{q}'_i = \dfrac{\partial H}{\partial p'_i}$; $\dot{p}'_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q'_i}$, che as dëstìnguo nen da cole scrite dzora, e donca i podrìo dì che ij q'_i a arpresento le coordinà 'd posission e p'_i a arpresento ij moment. Da le definissionch'i l'oma dàit, però, a arzulta che le còse a son nen parèj. Sto paradòss as arzòlv disend che le coordinà q'_i e p'_i a son giusta da traté a l'istéssa manera. As peul gionté donca che ij doi ansema 'd coordinà q'_i e p'_i a son a l'istéss livél, sensa che a-i na sia un pì fondamental che l'àutr. Coma consegoensa i l'oma che na trasformassion generalisà a l'avrà la forma :

$$\left.\begin{aligned} q'_i &= q'_i\,(q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n, t) \\ p'_i &= p'_i\,(q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n, t) \end{aligned}\right\}$$

Për manten-e l'invariansa dont i l'oma dit, a venta che ij doi ansema 'd variàbij a sio an relassion travers j'espression: $\dot{q}'_i = \dfrac{\partial H'}{\partial p'_i}$; $\dot{p}'_i = -\dfrac{\partial H'}{\partial q'_i}$ andova i l'oma $H' = \sum_i p'_i\,\dot{q}'_i - L'$, mentre la fonsion L' a l'é cola che cand a sia sostituìa ant ël prinsìpi ëd Hamilton : $\delta \int L'\,dt = 0$, a dà le giuste equassion dël moviment, ant the neuve coordinà.

Le trasformassion che a sodisfo a coste régole a son ciamà "***Trasformassion Canòniche***". Sto tipo 'd trasformassion a l'é pì general ëd col ch'i l'oma vist prima, andova la neuva fonsion lagrangian-a as otnìa giusta sostituend le relassion dla trasformassion (trasformassion a pont).

Da lòn ch'i l'oma vist a ven che 'l prinsìpi ëd Hamilton modificà a val tant ant ël sistema original che an col trasformà. Donca:

$$\left.\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i\,\dot{q}_i - H \right) dt = 0 \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p'_i\,\dot{q}'_i - H' \right) dt = 0 \end{aligned}\right\}$$

I notoma 'ncora, ambelessì, che la condission $\delta \int f\, dt = 0$ a l'é, an general, sodisfàita da la posission $f = \frac{dF}{dt}$, con F che a l'é na fonsion arbitraria.

Ant lòn ch'i l'avìo vist prima, sòn a l'era nen amportant, dal moment che la fonsion sota integral a l'era conossùa. Ambelessì le còse a son diferente, dal moment che le doe equassion a peulo esse combinà ant l'espression:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(\sum_i p_i\, \dot{q}_i - H \right) - \left(\sum_i p'_i\, \dot{q}'_i - H' \right) \right\} dt = 0$$

andova l'integral a l'é nen, an general, conossù.

Da lòn ch'i l'oma vist a ven che as peul scrive che $\left(\sum_i p_i\, \dot{q}_i - H \right) - \left(\sum_i p'_i\, \dot{q}'_i - H' \right) = \frac{dF}{dt}$ e da sì i disoma che che la fonson F a sarà dipendenta da *(4n + 1)* variàbij che a son le p_i, q_i, p'_i, q'_i, t. A venta però consideré che a-i son ëdcò la $2n$ equassion dla trasformassion, e donca la dipendensa as arduv a (2n + 1) variàvij, dont un-a a l'é 'l temp t e j'àutre *2n* variàbij a peulo esse sernùe com a conven fra le p_i, q_i, p'_i, q'_i.

I podoma consideré 'l cas particolar andova *F* a l'é na fonsion qualonque ëd le *2n + 1* variàbij q_i, q'_i, t, vis-a-dì $F = F_1(q_1, \cdots, q_n, q'_1, \cdots q'_n, t)$. I l'avroma:

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q'_i} \dot{q}'_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

che i podoma andé a sostituì ant la relassion ch'i l'oma scrivù prima:

$$\left(\sum_i p_i\, \dot{q}_i - H \right) - \left(\sum_i p'_i\, \dot{q}'_i - H' \right) = \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q'_i} \dot{q}'_i + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \right) dq_i - \sum_i \left(p'_i - \frac{\partial F_1}{\partial' q_i} \right) dq'_i + \left(H' - H - \frac{\partial F_1}{\partial t} \right) dt = 0$$

e dal moment che tute le q_i, q'_i, t, a son andipendente, ij termo a van a zero an manera separà, e donca i podoma scrive :

$$p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} F_1(q_i, q'_i, t) \quad ; \quad p'_i = \frac{\partial}{\partial q'_i} F_1(q_i, q'_i, t)$$

$$H' - H = \frac{\partial}{\partial t} F_1(q_i, q'_i, t)$$

Le prime doe espression scrite a fan un sistema d'equassion che a peulo serve (almanch coma prinsipi) për arcavé le relassion:

$$\left. \begin{aligned} q'_i &= q'_i\,(q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n, t) \\ p'_i &= p'_i\,(q_1, q_2, \cdots, q_n, p_1, p_2, \cdots, p_n, t) \end{aligned} \right\}$$

che a son, natural, le trasformassion ch'i l'oma dit prima.

An costa manera as peul vëdde che la trasformassion a peul derivé da la conossensa ëd na fonsion F, che a ven dita "***fonsion generatriss***" dla trasformassion midema. Da lòn ch'i l'oma trovà a arzulta 'dcò che se la fonsion generatriss a conten nen ël temp an manera esplìssita, la neuva fonsion Hamiltonian-a a l'é istéssa a la fonsion Hamiltonian-a 'd partensa.

I l'oma dit che la fonsion generatriss a peul esse esprimùa coma fonsion ed $2n$ qualonque dle $4n$ variàbij p_i, q_i, p'_i, q'_i. (e, natural, dël temp t). J'àutri cas ëd fonsion generatriss a peulo esse tratà con na trasformassion ëd Legendre dla fonsion. I suponoma na fonsion F_2 dàita da:

$$F_2 = F_1(q_1, \cdots, q_n, q'_1, \cdots q'_n, t) + \sum_i p'_i\, q_i$$

e i vardoma d'esprime F_2 an fonsion dle variàbij q_i, p'_i, t. Vis-a-dì :

$$F_2 = F_2(q_1, \cdots, q_n, p'_1, \cdots p'_n, t)$$

Se i consideroma l'istéssa trasformassion ëd prima, i podoma scrivla coma:

$$\left(\sum_i p_i\, \dot{q}_i - H\right) - \left(\sum_i p'_i\, \dot{q}'_i - H'\right) = \frac{dF_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left(F_2 - \sum_i p'_i\, q_i\right)$$

che i podoma svilupé, un pas dòp l'àut, e trové:

$$\frac{d}{dt}\left(F_2 - \sum_i p'_i\, q_i\right) = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F_2}{\partial p'_i}\frac{dp'_i}{dt} + \frac{\partial F_2}{\partial t} \quad \text{e donca, fasend coma prima :}$$

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\right)\frac{dq_i}{dt} + \sum_i \left(q'_i - \frac{\partial F_2}{\partial p'_i}\right)\frac{dp'_i}{dt} + \left(H' - H - \frac{\partial F_2}{\partial t}\right) = 0 \quad \text{e, moltiplicand për } dt$$

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial F_2}{\partial q_i}\right) dq_i + \sum_i \left(q'_i - \frac{\partial F_2}{\partial p'_i}\right) dp'_i + \left(H' - H - \frac{\partial F_2}{\partial t}\right) dt = 0$$

e da sì i podoma arcavé:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad ; \quad q'_i = \frac{\partial F_2}{\partial p'_i} \quad ; \quad H' - H = \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

I podoma peui consideré la fonsion generatriss $F_3 = F_3(p_1, \cdots, p_n, q'_1, \cdots q'_n, t)$, che i podoma buté coma $F_3 = F_1(q_1, \cdots, q_n, q'_1, \cdots q'_n, t) - \sum_i p_i\, q_i$, che con ël procediment ëd prima an pòrta a scrive che $q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$; $p'_i = -\frac{\partial F_3}{\partial q'_i}$; $H' - H = \frac{\partial F_3}{\partial t}$

A la fin i consideroma la fonsion generatriss $F_4 = F_4(p_1, \cdots, p_n, p'_1, \cdots p'_n, t)$, che i podoma buté coma $F_4 = F_1(q_1, \cdots, q_n, q'_1, \cdots q'_n, t) + \sum_i p'_i\, q'_i - \sum_i p_i\, q_i$, che con ël procediment ëd prima an pòrta a scrive che $q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$; $q'_i = \frac{\partial F_3}{\partial p'_i}$; $H' - H = \frac{\partial F_4}{\partial t}$

Esempi 'd trasformassion canòniche

A l'é ciàir che 'l sens ëd fé na trasformassion a l'é col ëd trové na forma dj'equassion dël moviment che a sia pì manegiàbil. Macassìa sì i vardoma pì che tut com a fonsion-a 'l mecanism.

Fonsion generatris $F = \sum_i q_i\, p'_i$

Cost a l'é un cas particolar dla fonsion generatriss F_2 ch'i l'oma vist (cand $F_1 = 1$). Donca an sto cas i l'avroma $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p'_i$; $q'_i = \frac{\partial F_2}{\partial p'_i} = q_i$; $H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H$

As trata donca giustà dla trasformassion idèntica. Se i cambioma segn a la fonsion generatriss, e donca $F = -\sum_i q_i\, p'_i$, i otnoma che $p_i = -\, p'_i$; $q'_i = -\, q_i$; $H' = H$, e sòn a dis che l'inverson dlë spassi a l'é na trasformassion canònica.

Fonsion generatris $F = \sum_i q_i\, q'_i$

I consideroma che costa F a l'é dël tipo ëd F_1 ch'i l'oma vist sì dzora. Donca i l'avroma: $p_i = q'_i$; $p'_i = q_i$; $H' = H$. Costa a l'é la trasformassion ch'i l'oma considerà an prinsìpi.

Fonsion generatris $F = \sum_i f_j(q_i) p'_i$ **con** f_j **arbitraria.**

La fonsion generatriss a l'é dël tipo F_2 ch'i l'oma vist. Se i aplicoma lòn ch'i l'oma trovà i otnoma che $p_i = \sum_j p'_j \dfrac{\partial f_j}{\partial q_i}$; $q'_i = f_i(q_k)$; $H' = H$, che a l'é na trasformassion ëd coordinà che i l'oma ciamà "a pont".

Aplicassion a un problema concrét

I suponoma d'avèj trovà la fonsion ëd Hamilton ëd nòstr probléma, e che costa a sia dàita da :

$$H = \frac{1}{2}\left(\mu q^2 + \frac{p^2}{m}\right)$$

e da costa espression i podoma trové j'equassion diferensiaj dël moviment coma :

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad ; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\mu\, q$$

che a l'han nen na solussion imedià. A bastrìa eliminé p e as oten-ria l'equassion diferensial dlë scond gré $m\ddot{q} = -\mu\, q$, che a l'é nen d'àutr che la fonsion Lagrangian-a ëd nòstr problema, che as podìa trové sensa passé da la formulassion ëd Hamilton.

Sì, però, i voroma dé n'esempi ëd trasformassion canònica, e donca i consideroma la trasformassion generà da la fonsion $F_1 = k\, q^2 \cot q'$.

I aplicoma j'espression ch'i l'oma trovà për la fonsion F_1 e i otnoma:

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = 2kq \cot q' \quad ; \quad p' = -\frac{\partial F_1}{\partial q'} = kq^2 \cos\mathrm{ec}^2\, q' \quad ; \quad H' = H$$

I podoma esprime p e q an fonsion ëd p' e q', otnend $p = \sqrt{4k\, p'} \cos q'$; $q = \sqrt{\dfrac{p'}{k}} \sin q'$.

mentre për la Hamiltonian-a i l'oma che :

$$H' = \frac{1}{2}\left(\mu q^2 + \frac{p^2}{m}\right) = \frac{1}{2}\left(\mu \frac{p'}{k} \sin^2 q' + \frac{4kp'}{m} \cos^2 q'\right) = \frac{\mu\, p'}{2k}\left(\sin^2 q' + \frac{4k^2}{m\mu} \cos^2 q'\right)$$

e se i suponoma che $k = \dfrac{1}{2}\sqrt{m\mu}$, costa espression as arduv giusta a

$$H' = \frac{\mu\, p'}{2k}\left(\sin^2 q' + \cos^2 q'\right) = \frac{\mu\, p'}{2k} = p'\sqrt{\frac{\mu}{m}}$$

As ved che q' a l'é na coordinà ignoràbil, e donca $\dot{p}' = \frac{\partial H'}{\partial q'} = 0$; $p' = \cos t = \alpha$. I l'oma 'dcò che $\dot{q}' = \frac{\partial H'}{\partial p'} = \sqrt{\frac{\mu}{m}}$; $q' = \sqrt{\frac{\mu}{m}}\, t + \beta$ andova β a l'é la costant d'integrassion. Se i sosrituima coste espression ant j'equassion $p = \sqrt{4k\, p'} \cos q'$; $q = \sqrt{\frac{p'}{k}} \sin q'$ ch'i l'abìo trovà, i l'oma arzolvù nòstr problema.

Sta manera 'd procede a vnirìa nen vàire a taj, se për ògni problema a ventèisa sërché d'andviné na fonsion generatriss che a podèissa esse ùtil a la solussion dël problema. Sì da dota i vardoma un métod che a serv a trové la fonsion generatriss.

Ël métod ëd Hamilton-Jacobi

Ambelessì as serca na trasformassion andova le neuve coordinà, tant ëd posission coma moment, a sio costante. I suponoma che costa trasformassion a esista, e che a sia generà da na fonsion generatriss $S = S(q_1, \cdots, q_n, q_1', \cdots q_n', t)$. Costa a l'é un cas particolar dla fonsion F_1 ch'i l'oma considerà prima.

I l'oma butà coma condission la costansa dle neuve coordinà, e donca a venta che a sia:

$$q_i' = \cos t = \alpha_i \quad ; \quad p_i' = \cos t = \beta_i \quad \text{e donca} \quad S = S(q_1, \cdots, q_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, t)$$

e dal moment che la trasformassion a l'é canònica a sarà:

$$\dot{q}_i' = \frac{\partial H'}{\partial p_i'} \quad ; \quad \dot{p}_i' = -\frac{\partial H'}{\partial q_i'} \quad \text{e donca} \quad \frac{\partial H'}{\partial p_i'} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial H'}{\partial q_i'} = 0$$

I podoma 'ncora impon-e la condission che $\frac{\partial H'}{\partial t} = 0$. A sta manera i l'oma che $H' = \text{cost}$, e costa costant a peul esse considerà zero, perché, se a-i é na trasformassion generà da na S_0 che a produv na Hamiltonian-a trasformà che a val $H_0 = \text{cost} = A$, antlora i podoma consideré la fonsion generatriss $S = S_0 - At$, e costa fonsion generatriss a darà $H' = 0$.

I l'oma vist che, an sto cas, për l'Hamiltonian-a a val la relassion $H' - H = \frac{\partial}{\partial t} F_1(q_i, q_i', t)$, che an nòstr cas, con le posission ch'i l'oma fàit, a pòrta a : $H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$. A val ëdcò la relassion $p_i = \frac{\partial}{\partial q_i} F_1(q_i, q_i', t)$ che për noi sì a dventa $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$

Da coste ultime relassion i podoma trové l'equassion, ciamà "***equassion d'Hamilton-Jacobi***":

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Contut che soa solussion a peussa presenté quàich dificoltà, i pijoma për bon che as peussa trové sempe na solussion ëd costa equassion. Le variàbij andipendente ëd costa equassion a son *(n + 1)*, vis-a-dì le q_i e t. Se i disoma che S_0 a l'é na solussion, a l'é ciàir che 'dcò la fonsion $S = S_0 + cost.$ a l'é na solussion, e un-a dle costant arbitràrie a peul esse ignorà, vist che a-i son, ant l'equassion, mach le derivà dla fonsion S.

La solussion general a l'avrà donca la forma $S = S(q_1, \cdots, q_n, c_1, \cdots, c_n, t)$, andova le costant arbitràrie a son ciamà c_i .

An prinsìpi i l'oma butà che la fonsion S a l'era $S = S(q_1, \cdots, q_n, q'_1, \cdots q'_n, t)$, andova le q'_i a j'ero costant che i l'avìo butà uguaj a α_i. A venta donca che a-i sia na relassion fra le c_i e le α_i, e costa relassion a peul esse n'identità. A venta però verifiché che se le α_i a ven-o sostituìe a le c_i, ij passagi ch'i l'oma fàit a contìnuo a esse vàlid. An particolar a venta verifiché che, an costa manera, ij moment trasformà p'_i a sio costant.

I l'oma vist prima che $p'_i = -\frac{\partial}{\partial q'_i} F_1(q_i, q'_i, t)$, e an nòstr cas le coordinà p'_i a son dàite da:

$$p'_i = -\frac{\partial S_0}{\partial c_i} \quad \text{e derivand rispét al temp:}$$

$$\frac{d\,p'_i}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial S_0}{\partial c_i} = -\left(\sum_j \frac{\partial^2 S_0}{\partial q_j\,\partial c_i}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 S_0}{\partial t\,\partial c_i}\right)$$

e dal moment che S_0 a l'é na solussion dl'equassion ëd Hamilton-Jacobi, i l'oma 'dcò che :

$$\frac{\partial^2 S_0}{\partial t\,\partial c_i} = \frac{\partial}{\partial c_i}\left(\frac{\partial S_0}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial c_i}\left[H\left(q_i, \frac{\partial S_0}{\partial q_i}, t\right)\right]$$

I tnima present che ambelessì le variàbij p_i a son arpresentà, com i l'oma vist, da $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$, mentre a val sempe la relassion $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$. Antlora i l'oma che :

$$\frac{\partial^2 S_0}{\partial t\,\partial c_i} = -\sum_j \frac{\partial H}{\partial\left(\frac{\partial S_0}{\partial q_j}\right)}\frac{\partial}{\partial c_i}\left(\frac{\partial S_0}{\partial q_j}\right) = -\sum_j \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 S_0}{\partial c_i\,\partial q_j} = -\sum_j \dot{q}_j \frac{\partial^2 S_0}{\partial c_i\,\partial q_j}$$

e se i andoma a sostituì costa eapression ant la derivà $\frac{d\,p'_i}{dt}$ i trovoma giusta che $\frac{d\,p'_i}{dt} = 0$, e che donca $p'_i = \text{cost.}$, coma i vorìo trové. An conclusion i l'oma provà che a-i é la possibilità d'identifiché le c_i con le α_i. A sta mira la fonsion generatriss a l'é andividoà cand as conòsso le costant α_i. Se as conòsso ij valor inissiaj qi e pi , costi a peulo esse sostituì ant l'equassion ëd Hamilton-Jacobi, e an costa manera as peulo arcavé le costant α_i. As peulo 'dcò arcavé le costant β_i, e peui, a la fin, j'espression $q_i = q_i(\alpha_j, \beta_j, t)$ e $p_i = p_i(\alpha_j, \beta_j, t)$, che a arzòlvo nòstr problema.

N'esempi

I doma n'aplicassion pràtica dël metod ch'i l'oma vist, giusta për vëdde com a fonsion-a, con un sempi problema d'ossilator elàstich. La fonsion Hamiltonian-a, an sto cas, a l'é giusta l'energìa total:

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}p^2 + \mu q^2\right)$$

e donca la relativa fonsion ëd Hamilton-Jacobi a sarà dàita da:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \mu q^2\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Se l'Hamiltonian-a a conten nen ël temp an manera esplìssita, la solussion ëd costa equassion a pija la forma:

$$S(q,\alpha,t)=S(q,\alpha)-c(\alpha)t \quad \text{e da lòn ch'i l'oma vist} \quad S(q,\alpha,t)=S'(q,\alpha)-\alpha t$$

e donca 'dcò l'equassion ëd Hamilton-Jacobi a dventa:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{\partial S'}{\partial q}\right)^2+\mu q^2\right]-\alpha=0 \quad \text{e donca} \quad \frac{\partial S'}{\partial q}=\sqrt{m\mu}\sqrt{\frac{2\alpha}{\mu}-q^2}$$

$$\text{e i notoma che} \quad p=\frac{\partial S'}{\partial q}$$

e integrand:

$$S=S'-\alpha t=\sqrt{m\mu}\int\sqrt{\frac{2\alpha}{\mu}-q^2}\,dq+C(\alpha)-\alpha t$$

andova, com i l'oma vist, la costant C(a) a peul esse trascurà sensa problema. An sto cas a-i é nen da manca ëd trové S an manera esplìssita, dal moment che i podoma trové la costant $\beta=p'$ che a val:

$$\beta=-\frac{\partial S}{\partial\alpha}=t-\int\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{2\alpha}{\mu}-q^2}\,dq=\left\{t-\sqrt{\frac{m}{\mu}}\cos^{-1}\left(q\sqrt{\frac{\mu}{2\alpha}}\right)\right\}$$

Ant l'equassion $p=\frac{\partial S'}{\partial q}=\sqrt{m\mu}\sqrt{\frac{2\alpha}{\mu}-q^2}$ ch'i l'oma vist prima, i sostituima le considdion inissiaj për q e p al temp $t=0$, e i butoma për coste $q=0$; $p=\sqrt{2mE_0}$, e parèj i trovoma la costant α che a val $\alpha=E_0$ andova E_0 a l'é l'energìa total dël sistema (as ved sùbit che a l'é l'energìa cinética and cola potensial a val zero). Sostituend peui ant l'espression ëd β i trovoma $\beta=-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{\mu}}$.

Na vira conossù 'l valor ed β, da l'istéssa equassion as treuva l'espression esplìssita dla coordinà q:

$$q=\sqrt{\frac{2E_0}{\mu}}\cos\left(t\sqrt{\frac{\mu}{m}}+\frac{\pi}{2}\right)$$

e da soa espression vista prima, as arcava l'espression esplìssita dla coordinà p:

$$p=\sqrt{2mE_0}\sin\left(t\sqrt{\frac{\mu}{m}}+\frac{\pi}{2}\right)$$

Trasformassion infinitesimaj

I l'oma vist prima che la fonsion generartiss $F_2=\sum_i q_i\,p_i'$ a produv la trasformassion identità. Se i consideroma ε coma un paràmeter infinitésim andipendent da q_i e da p_i, i l'avroma che un cambi infinitesimal dle variàbij a sarà generà da la fonsion

$$F_2=\sum_i q_i\,p_i'+\varepsilon\,G(q_i,\,p_i)$$

andova G a l'é na fonsion arbitraria. Se i aplicoma le régole dle trasformassion ch'i l'oma vist, i l'avroma:

$$q_i'=\frac{\partial F}{\partial p_i'}=q_i+\varepsilon\frac{\partial G}{\partial p_i'} \quad ; \quad p_i=\frac{\partial F}{\partial q_i}=p_i'+\varepsilon\frac{\partial G}{\partial q_i}$$

e donca i l'avroma un $\delta q_i = \varepsilon \dfrac{\partial G}{\partial p'_i}$; $\delta p_i = -\varepsilon \dfrac{\partial G}{\partial q_i}$.

I consideroma peui che $(p'_i - p_i)$ a l'é n'infinitésim e che donca as peul sostituì p'_i con p_i , ant la fonsion *G*. As oten: $\delta q_i = \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial p_i} G(q_i \,.\, p_i)$; $\delta p_i = -\varepsilon \dfrac{\partial}{\partial q_i} G(q_i \,.\, p_i)$.

Ant ël contest ëd coste trasformassion infinitésime, i ciamoma "*fonsion generatriss*" nòstra *G*. Se i butoma che $\varepsilon = dt$, e che $G = H$ i otnoma, dovrand le relassion canòniche :

$$\delta q_i = dt \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \, dt \quad ; \quad \delta p_i = -dt \frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i \, dt$$

Sòn a dis che ij cambiament dle variàbij coniugà, che as produvo dovrand la fonsion Hamiltonian-a *H* coma fonsion generatriss, a corispondo a coj che vreman a càpito ant ël moviment. I càmbi ant un perìod finì fra un t_0 e un t a peulo esse considerà coma l'adission sucessìva dij càmbi anfinitésim, sempe generà da la fonsion *H*.

Për ël moment, për lòn ch'a rësguarda la teorìa dle trasformassion is fermoma ambelessì. Coma sempe, se peui a capitrà che a venta gionté quaicòs, i lo giontroma an sël moment.

PARÈNTESI ËD POISSON

Costa a l'é n'arpresentassion che a ven motobin a taj an Mecànica Analìtica, e che a giuta ant ël passagi a la Mecànica Quantìstica.

Definission

Se $F = F(q_i, p_i, t)$ a l'é na qualonque variàbil dinàmica d'un sisrema arpresentà da le variàbij coniugà q_i e p_i, i podoma scrive soa derivà total rispét al temp t coma:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t}$$

e se i consideroma j'equassion canòniche ëd Hamilton i l'avroma che :

$$\dot{F} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

La quantità che, an costa espression, a l'é indicà con $\sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$ a arzulta esse bin amportanta ant la Mecànica Analìtica, e a ven ciamà parentesi ëd Poisson dle doe fonsion F e H. Ma la definission ëd Parentesi ëd Poisson a l'é pì general, e a rësguarda qualonque cobia ëd variàbij dinàmiche X e Y, fonsion ëd q_i e p_i. La parentesi ëd Poisson a l'é indicà con $[X,Y]_{q,p}$ e a l'é dàita da:

$$[X,Y]_{q,p} = \sum_i \left(\frac{\partial X}{\partial q_i}\frac{\partial Y}{\partial p_i} - \frac{\partial X}{\partial p_i}\frac{\partial Y}{\partial q_i} \right)$$

Da costa definission a seguo sùbit le proprietà indicà sì sota (anova i arportoma nen sempe j'indes dle vadiàbij):

$$[X,Y] = -[Y,X] \quad ; \quad [X,X] = 0$$
$$[X, Y+Z] = [X,Y] + [X,Z]$$
$$[X, Y\cdot Z] = Y[X,Y] + [X,Y]Z$$
$$[c\cdot X, Y] = c[X,Y]$$
$$[F(A), B] = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial A}\frac{\partial A}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial B}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial F}{\partial A}[A,B]$$

$$\left.\begin{array}{c} [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \\ [q_i, p_j] = \delta_{ij} \quad \text{andova} \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j \quad \text{e} \quad \delta_{ij} = 1 \quad \text{se} \quad i = j \end{array}\right\} \text{par.ëd Poisson fondamentaj.}$$

Invariansa rispét a le trasformassion canòniche

Cola d'invariansa rispét a le trasformassion canòniche a l'é na proprietà motobin amportanta dle parentesi ëd Poisson. A val donca la relassion $[X,Y]_{q,p} = [X,Y]_{q',p'}$ andova as intend che X er Y a l'han l'istéss valor, contu che a peusso avej forma diferenta. La dimostrassion ëd sòn a ven da lòn ch'i l'oma vist fin-a si.

An efét i l'oma vist che na trasformassion canònica a peul esse generà a parte da na fonsion $F_1 = F_1(q_i, q'_i, t)$, e an sto cas a son vere le relassion:

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad ; \quad p'_i = \frac{\partial F_1}{\partial q'_i}$$

e da sì i l'oma che :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q'_j} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial q'_j \, \partial p_i} = -\frac{\partial p'_j}{\partial q_i}$$

e se as deuvro j'àutri tipo, ch'i l'oma vist, ëd fonsion generatriss (F_2 , F_3 , F_4), as treuva, an corispondensa $\frac{\partial q_i}{\partial q'_j} = \frac{\partial p'_j}{\partial p_i}$; $\frac{\partial q_i}{\partial p'_j} = -\frac{\partial q'_j}{\partial p_i}$; $\frac{\partial p_i}{\partial p'_j} = \frac{\partial q'_j}{\partial q_i}$,

I aplicoma sti arzultà a le parentesi 'd Poisson fondamentaj e i otnoma:

$$\left[q'_i \, , \, p'_j\right]_{q\,,\,p} = \sum_k \left(\frac{\partial q'_i}{\partial q_k} \frac{\partial p'_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q'_i}{\partial p_k} \frac{\partial p'_j}{\partial q_k} \right) = \sum_k \left(\frac{\partial q'_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial q'_j} + \frac{\partial q'_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q'_j} \right) \equiv \frac{\partial q'_i}{\partial q'_j} = \delta_{i\,j} = \left[q'_i \, , \, p'_j\right]_{q'\,,\,p'}$$

e sòn përchè $\frac{\partial q'_i}{\partial p_k} = 0$, dal moment che q a l'é nen fonsion ëd p. A l'istéssa manera as dimostra che :

$$\left[q'_i \, , \, q'_j\right]_{q,\,p} = \left[q'_i \, , \, q'_j\right]_{q',\,p'} = 0 \quad ; \quad \left[p'_i \, , \, p'_j\right]_{q,\,p} = \left[p'_i \, , \, p'_j\right]_{q',\,p'} = 0$$

e donca le parentesi fondamentaj a son invariant rispét a le trasformassion canòniche. Ant ël cas general, anvece, i l'oma:

$$\begin{aligned}
\left[X \, , Y\right]_{q',\,p'} &= \sum_k \left(\frac{\partial X}{\partial q'_k} \frac{\partial Y}{\partial p'_k} - \frac{\partial X}{\partial p'_k} \frac{\partial Y}{\partial q'_k} \right) = \\
&= \sum_{j,k} \left\{ \frac{\partial X}{\partial q'_k} \left(\frac{\partial Y}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial p'_k} + \frac{\partial Y}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial p'_k} \right) - \frac{\partial X}{\partial p'_k} \left(\frac{\partial Y}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial q'_k} + \frac{\partial Y}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q'_k} \right) \right\} = \\
&= \sum_j \left\{ \frac{\partial Y}{\partial q_j} \left[X \, , q_j\right]_{q',\,p'} + \frac{\partial Y}{\partial p_j} \left[X \, , p_j\right]_{q',\,p'} \right\}
\end{aligned}$$

A sta mira i consideroma che se an costa espression i sostituima X con q_i e peui Y con X, i otnima l'espression dla parentesi $\left[q_i \, , X\right]_{q',\,p'}$. L'espression dla parentesi $\left[X \, , q_i\right]_{q',\,p'}$ a sarà:

$$\begin{aligned}
\left[X \, , q_i\right]_{q',\,p'} &= -\left[q_i \, , X\right]_{q',\,p'} = \\
&= -\sum_k \left\{ \frac{\partial X}{\partial q_k} \left[q_j \, , q_k\right]_{q',\,p'} + \frac{\partial X}{\partial p_k} \left[q_j \, , p_k\right]_{q',\,p'} \right\} = \\
&= -\sum_k \frac{\partial X}{\partial p_k} \delta_{j,k} = -\frac{\partial X}{\partial p_j}
\end{aligned}$$

A l'istéssa manera as peul dimostré che $\left[X \, , p_i\right]_{q',\,p'} = -\frac{\partial X}{\partial q_j}$, e sostituend sti doi arzultà ant l'espression ëd $\left[X \, , Y\right]_{q',\,p'}$ i l'oma che:

$$\left[X \, , Y\right]_{q',\,p'} = \sum_j \left\{ -\frac{\partial Y}{\partial q_j} \frac{\partial X}{\partial p_j} + \frac{\partial Y}{\partial p_j} \frac{\partial X}{\partial q_j} \right\} = \left[X \, , Y\right]_{q,\,p}$$

Sòn a dimostra l'invariansa rispét a le trasformassion canòniche, e donca a l'é nen necessari indiché l'ansema dle variàbij coniugà dovrà për valuté la parentesi ëd Poisson.

Costant dël moviment

Da la definission ch'i l'oma dàit ëd parentesi 'd Poisson, e partend da l'espression ch'i l'oma vist $\dot{F}=\sum_i\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)+\frac{\partial F}{\partial t}$ che i podoma scrive $\frac{dF}{dt}=[F,H]+\frac{\partial F}{\partial t}$, i podoma arcavé che, se ant la variàbil dinàmica F a-i é nen ël temp an manera esplìssita, vis-a-dì che se $\frac{\partial F}{\partial t}=0$, antlora costa variàbil a l'é na costant dël moviment (vis-a-dì che i l'avroma $\frac{dF}{dt}=0$) se soa parentesi 'd Poisson con la fonsion Hamiltonian-a H a val zero ($[F, H]=0$).

A parte da sòn as ved sùbit che j'equassion dël moviment a peulo esse scrivùe coma:

$$\dot{q}_i=[q_i,H] \quad ; \quad \dot{p}_i=[p_i,H]$$

mentre a val ëdcò, coma cas particolar, considerand la H coma variàbil dinàmica:

$$\frac{dH}{dt}=[H,H]+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}$$

Identità ëd Jacobi

I consideroma l'espression :

$$[X,[Y,Z]]-[Y,[X,Z]]=\left[X,\sum_i\left(\frac{\partial Y}{\partial q_i}\frac{\partial Z}{\partial p_i}-\frac{\partial Y}{\partial p_i}\frac{\partial Z}{\partial q_i}\right)\right]-\left[Y,\sum_i\left(\frac{\partial X}{\partial q_i}\frac{\partial Z}{\partial p_i}-\frac{\partial X}{\partial p_i}\frac{\partial Z}{\partial q_i}\right)\right]$$

e peui i dovroma le proprietà ch'i l'oma vist an prinsìpi, e archeujima ij termo an manera convenienta. I podoma oten-e l'espression:

$$\sum_i\left\{-\frac{\partial Z}{\partial q_i}\left(\left[\frac{\partial X}{\partial p_i},Y\right]+\left[X,\frac{\partial Y}{\partial p_i}\right]\right)+\frac{\partial Z}{\partial p_i}\left(\left[\frac{\partial X}{\partial q_i},Y\right]+\left[X,\frac{\partial Y}{\partial q_i}\right]\right)\right\}+$$
$$+\sum_i\left\{\frac{\partial Y}{\partial q_i}\left[X,\frac{\partial Z}{\partial p_i}\right]-\frac{\partial Y}{\partial p_i}\left[X,\frac{\partial Z}{\partial q_i}\right]-\frac{\partial X}{\partial q_i}\left[Y,\frac{\partial Z}{\partial p_i}\right]-\frac{\partial X}{\partial p_i}\left[Y,\frac{\partial Z}{\partial q_i}\right]\right\}$$

A sta mira i tnima cont che a val l'identità : $\frac{\partial}{\partial x}[X,Y]=\left[\frac{\partial X}{\partial x},Y\right]+\left[X,\frac{\partial Y}{\partial x}\right]$. Antlora ël prim termo dl'espression sì dzora a dventa :

$$\sum_i\left\{-\frac{\partial Z}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}[X,Y]+\frac{\partial Z}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}[X,Y]\right\}=-[Z,[X,Y]]$$

mentre as peul vedde fàcil che lë scond termo a val zero. An definitiva a arzulta l'identità ëd Jacobi che a peul esse scrivùa:

$$[X,[Y,Z]]-[Y,[X,Z]]=-[Z,[X,Y]] \quad \text{opura 'dcò:}$$
$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$$

Aplicassion

I consideroma na partìcola che as bogia sota l'efét d'un potensial sentral, e vardoma 'd trové le costant dël moviment che, com i l'oma vist, a l'han parentesi 'd Poisson nula con l'Hamiltonian-a. I consideroma 'l moment dla quantità 's moviment dla partìcola, arferendse a un sistema 'd coordinà che i podoma pensé an tre dimension (as peul supon-e un sistema cartesian), e nòstra partìcola a l'avrà coordinà generalisà x_1 , x_2 , x_3 . I ciamoma con p_1 , p_2 , p_3 i relativ moment coniugà.

I consideroma 'l moment angolar $\vec{l} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$, vis-a-dì 'l moment dla quantità 'd moviment dla partìcola. I l'oma:

$$\vec{l} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} \quad \text{dont le component a son} \quad \begin{cases} l_1 = x_2\, p_3 - x_3\, p_2 \\ l_2 = x_3\, p_1 - x_1\, p_3 \\ l_3 = x_1\, p_2 - x_2\, p_1 \end{cases}$$

andova i l'oma che $p_i = m\,\dot{x}_i$.

Se i vardoma 'l valor dle parentesi ëd Poisson ëd l_1 e l_2 i trovoma:

$$[l_1, l_1] = \sum \left(\frac{\partial l_1}{\partial x_i}\frac{\partial l_1}{\partial p_i} - \frac{\partial l_1}{\partial p_i}\frac{\partial l_1}{\partial x_i} \right) = 0$$

$$[l_1, l_2] = \sum \left(\frac{\partial l_1}{\partial x_i}\frac{\partial l_2}{\partial p_i} - \frac{\partial l_1}{\partial p_i}\frac{\partial l_2}{\partial x_i} \right) = p_2\, x_1 - p_2\, x_1 = l_3$$

$$[l_1, l_3] = \sum \left(\frac{\partial l_1}{\partial x_i}\frac{\partial l_3}{\partial p_i} - \frac{\partial l_1}{\partial p_i}\frac{\partial l_3}{\partial x_i} \right) = -\, p_1\, x_3 + p_3\, x_1 = -l_2$$

$$[l_3, l_1] = \sum \left(\frac{\partial l_3}{\partial x_i}\frac{\partial l_1}{\partial p_i} - \frac{\partial l_3}{\partial p_i}\frac{\partial l_1}{\partial x_i} \right) = p_1\, x_3 - p_3\, x_1 = l_2$$

mentre j'àutre combinassion a son coma un-a 'd coste con le component scambià (se j'ìndes a son diferent) e donca con segn cambià, opura, se j'indes a son j'istéss, a valo zero. As peul arzume st'arzultà disend che:

$$[l_i, l_j] = \sum_k \varepsilon_{i,j,k}\, l_k$$

andova $k = 1$ se (i, j, k) a l'é na përmutassion pari ëd (1, 2, 3), $k = -1$ se (i, j, k) a l'é na përmutassion dispari ëd (1, 2, 3), e $k = 0$ ant j'àutri cas (con i e j istéss).

I podoma 'dcò calcolé le parentesi ëd Poisson dla component l_1 dël moment angolar con le coordinà generalisà x_1 , x_2 , x_3. I l'avroma

$$\left.\begin{aligned} [l_1, x_1] &= \sum \left(\frac{\partial l_1}{\partial x_i}\frac{\partial x_1}{\partial p_i} - \frac{\partial l_1}{\partial p_i}\frac{\partial x_1}{\partial x_i} \right) = 0 \\ [l_1, x_2] &= \sum \left(\frac{\partial l_1}{\partial x_i}\frac{\partial x_2}{\partial p_i} - \frac{\partial l_1}{\partial p_i}\frac{\partial x_2}{\partial x_i} \right) = x_3 \\ [l_1, x_3] &= \sum \left(\frac{\partial l_1}{\partial x_i}\frac{\partial x_3}{\partial p_i} - \frac{\partial l_1}{\partial p_i}\frac{\partial x_3}{\partial x_i} \right) = -x_2 \end{aligned}\right\}$$

e sòn përchè le variàbij xi a dipendo nen da le variàbij pi e donca ij prim termo a son sempe a zero, mentre da jë scond termo i l'oma : Ant la prima riga mach $\partial x_1 / \partial x_1 = 1$, mentre $\partial i_1 / \partial p_1 = 0$ e donca ij doi termo a son a zero. Ant la sconda riga mach $\partial x_2 / \partial x_2 = 1$ mentre $\partial l_1 / \partial p_1 = -x_3$ e donca 'l prim termo meno lë scond a fà x_3 . Ant la tersa riga $\partial x_3 / \partial x_3 = 1$ mentre $\partial l_1 / \partial p_3 = x_2$ e donca 'l prim termo

meno lë scond a fà $-x_2$. Se i sercoma j'istesse parentesi con l_1 e le component dij moment p_1 , p_2 , p_3, ant l'istéssa manera i trovoma d'espression dl'istéss tipo.

$$\left.\begin{array}{l}[l_1, p_1]=0\\ [l_1, x_2]=p_3\\ [l_1, x_3]=-p_2\end{array}\right\}$$

Pì an general i podoma dì che, dàit un vetor qualonque ***u*** ëd component ***u*** (u_1 , u_2 , u_3), i l'avroma: $[l_1, u_1]=0$; $[l_1, u_2]=u_3$; $[l_1, u_3]=-u_2$. I notoma che 0 , u_3 , $-u_2$ a son le component dël vetor :

$$\vec{u}\wedge\vec{i}_1=\begin{vmatrix}\vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} \text{ e che } l_1=\vec{l}\times\vec{i}_1$$

Antlora i podoma argrupé le tre relassion e scrive: $\left[\left(\vec{l}\times\vec{i}_1\right),\vec{u}\right]=\vec{u}\wedge\vec{i}_1$ e, pì an general, se a a l'é un versor qualonque i l'avroma che $\left[\left(\vec{l}\times\vec{a}\right),\vec{u}\right]=\vec{u}\wedge\vec{a}$.

Adéss i vardoma 'l comportament dla parentesi ëd Poisson dël moment angolar ***l*** con në scalar qualonque, che i butoma $u=\boldsymbol{u}^2$. I l'oma :

$$\left[l_1, \vec{u}^2\right]=\left[l_1, \left(u_1^2+u_2^2+u_3^2\right)\right]=\left[l_1, u_1^2\right]+\left[l_1, u_2^2\right]+\left[l_1, u_3^2\right]$$

ma a lìé ciàir che $u_i^2 = f(u_1)$ e i l'oma vist fra le proprietà che $[F(A), B]=\frac{\partial F}{\partial A}[A, B]$, parèj coma $[A, f(B)]=\frac{\partial F}{\partial B}[A, B]$. I notoma donca che $\frac{\partial f(u_i)}{\partial u_i}=2u_i$, e i podoma arscrive:

$$\left[l_1, \vec{u}^2\right]=2u_1\left[l_1, u_1\right]+2u_2\left[l_1, u_2\right]+2u_3\left[l_1, u^3\right]$$

Ant lë scond member ëd costa espression, la prima parentesi 'd Poisson a val *0*, la sconda a val u_3 , e la tersa a val $-u_2$. As ved sùbit donca che lë scond member midem a val *0*.

I l'oma donca che 'l moment angolar ***l*** a l'ha parentesi 'd Poisson che con ij vetor a seguo le régole ch'i l'oma vist, mentre con jë scalar a son uguaj a zero. La fonsion Hamiltonian-a a l'é në scalar che a val $H=\frac{p^2}{2m}+V(r)$. I l'oma che *[* ***l*** *, H] = 0*, e donca ***l*** a l'é na costant dël moviment.

Pàgina lassà veuida apòsta

IJ SISTEMA CONTÌNUO

Fin-a sì i l'oma parlà 'd sistema con un nùmer finì ëd gré 'd libertà. Sì i vardoma còs a suced se ij métod Lagrangian e Hamiltonian a son estendù ai sistema conrìnuo, con un nùmer ëd gré 'd libertà gròss a l'anfinì. Ël problema a stà giusta ant ël trové na fonsion Lagrangian-a che a vada.

La formulassion ëd Lagrange

Is butoma ant un cas motobin sempi, d'un sòlid contìnuo unidimensional, com a peul esse aprossimà da n'elàstich. I consideroma sòn coma cas lìmit ëd na sequensa 'd masse a pont anlià da mòle, com arpresentà an figura 4.

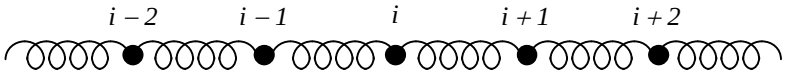

Figura 4 - Modél ëd sistema contìnuo

I suponoma tute le masse con valor m, a distansa a, colegà da arsort con costant ëd fòrsa k. Se i ciamoma η_i lë spostament dla partìcola ch'a fà i, l'equassion ëd sò moviment a sarà (i dovroma la definission ëd fòrsa elàstica):

$$m\ddot{\eta}_i = k\left[\left(\eta_{i+1}-\eta_i\right)-\left(\eta_i-\eta_{i-1}\right)\right]$$

As trata d'un sistema conservativ, e an sto sistema le fòrse a peulo esse derivà da un potensial scalar V che a val:

$$V=\sum_i \frac{1}{2}k\,m\ddot{\eta}_i = k\left(\eta_{i+1}-\eta_i\right)^2$$

Për podèj fé coste posission (che tute le masse a seguo l'istéssa lej), a venta fé 'd suposission ò an sla periodissità n'un retìcol anfinì ò an sle fòrse a j'estrem d'un retìcol finì. Sì i suponoma giusta che un-a dle possibilità a sia la nòstra, bastamach che a vala l'ipòtesi che tute le masse a seguo l'istéssa lej.

L'energìa cinética dël sistema a l'é $Ec=\sum_i \frac{1}{2}m\dot{\eta}_i^2$. Antlora la fonsion lagrangian-a a sarà:

$$L=Ec-V=\sum_i\left[\frac{1}{2}m\dot{\eta}_i^2-\frac{1}{2}k\left(\eta_{i+1}-\eta_i\right)^2\right]$$

Adéss i scrivoma la fonsion lagnrangian-a ant la forma:

$$L=\frac{1}{2}\sum_i a\left[\frac{m}{a}\dot{\eta}_i^2-k\,a\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}\right)^2\right]$$

A sta mira as peul passé al sistema contìnuo passand al lìmit për $a \to 0$. I podoma ansi fé corisponde al segment a ël diferensial dx e a la somatòria $\sum(\cdots)a$, l'integral $\int(\cdots)dx$. Peui i l'oma

che $\frac{m}{a}$ a dventa na densità linear ρ, mentre (suponend na session unitaria) $k\,a = E$ (mòdul ëd Young), e 'ncora i l'oma che $\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a}$ al lìmit a dventa $\frac{d\eta}{dx}$.

Nòstra espression Lagnangian-a as trasforma antlora ant l'espression: $L = \int L\ dx$ andova $L = \frac{1}{2}\left[\rho\dot{\eta}^2 - E\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\right]$.Costa a l'é 'dcò ciamà ***densità Lagrangian-a***.

L'ìndes *i* ant l'espression discréta as trasforma ant la variàbil ëd posission *x*, mentre i l'oma già vist che a a corispond adéss a *dx*. I l'oma vist che $\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a} = \frac{\eta(x+a)-\eta(x)}{a}$ al lìmit a dventa $\frac{d\eta}{dx}$, pròpi coma ant la definission ëd derivà, e i podoma 'dcò vardé l'espression dj'equassion dël moviment. I l'avìo an partensa $m\ddot{\eta}_i = k\left[(\eta_{i+1}-\eta_i)-(\eta_i-\eta_{i-1})\right]$. I moltiplicoma e dividoma lë scond member për *a*. I otmìma: $m\ddot{\eta}_i = k\,a\left(\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a} - \frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{a}\right)$ e peui i dividoma tuti doi ij member për *a*:

$$\frac{m}{a}\ddot{\eta}_i = k\,a\,\frac{\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a} - \frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{a}}{a}$$

L'espression $\frac{\frac{\eta_{i+1}-\eta_i}{a} - \frac{\eta_i-\eta_{i-1}}{a}}{a}$ a echival, con le considerassion ëd prima a scrive: $\frac{\frac{\eta(x+a)-\eta(x)}{a} - \frac{\eta(x)-\eta(x-a)}{a}}{a}$ ma con $a = dx$ che a tend a zero, costa a l'é nen d'àutr che la definission dla derivà sconda $\frac{d^2\eta}{dx^2}$.

I podoma scrive antlora la Lagrangian-a e l'equassion dël moviment, che a dvento:

$$L = \frac{1}{2}\int \rho\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - E\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 dx$$

$$\rho\frac{d^2\eta}{dt^2} - E\frac{d^2\eta}{dx^2} = 0$$

L'equassion dël moviment a l'é cola dla propagassion dj'onde che i l'oma dësgià vist. A-i sarìa da fé na discussion an sl' usagi dle derivà totaj anvece che le derivà parsiaj, che sì i foma nen.

Se i suponoma che 'l prinsìpi ëd Hamilton a sia aplicàbil an nòstr cas, antlora i podoma scrivlo coma : $\delta\int L\,dt = 0$ e donca coma:

$$\delta\iint L\ dx\,dt = 0$$

A l'é ciàir che a-i é gnente che a disa che as peul apliché 'l prinsìpi ëd Hamilton ant la manera che i l'oma scrivulo, e l'ùnica a l'é verifiché che la còsa a vada bin, confrontand la con n'àutra manera dë scrive 'l prinsìpi midem. La forma ch'i l'oma scrivù a sugeriss che le variàbij *x* e *t* a sio da traté a l'istessa manera.

La variassion dl'integral as oten donca an manera ëd ten-e fiss ij pont inissial e final dël camin d'integrassion (η_1 , x_1 , t_1), (η_2 , x_2 , t_2), e fasend varié 'l valor η dj'àutri pont, sempe anvece tnisend fiss x e t .

La condission necessaria e suficenta përchè costa variassion a daga un valor stassionari a l'integral, a l'é stàita vista a sò temp. An nòstr cas costa a dventa:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \eta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\frac{d\eta}{dx}} \right) = 0$$

I l'oma vist che l'equassion dël moviment $\rho \frac{d^2\eta}{dt^2} - E\frac{d^2\eta}{dx^2} = 0$ che i l'oma vist, a l'é l'equassion ëd la propagassion d'onde ant un mojen elàstich unidimensional. La suposission che 'l prinsìpi ëd Hamilton a sia aplicàbil ai sistema contìnuo, an sto cas, a l'é consistenta. An tuti ij cas andova as peul fé sta verìfica a-i é sempe l'istéss arzultà, e as peul conclude che la mecànica dij sistema contìnuo a peul esse arzumùa con l'espression matemàtica:

$$\delta \int L\, dt = \delta \iint \iint L\, dt\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \delta \iint L\, dV\, dt = 0$$

e sòn, natural, a supon la possibilità ëd trové la fonsion ëd densità:

$$L = L\left(\eta^{(r)}, \frac{d\eta^{(r)}}{dt}, \frac{d\eta^{(r)}}{dx_j}, x_j, t \right)$$

I suponoma donca la possibilità 'd consideré le tre coordinà spassiaj (cartesian-e) e n variàbij che sì i l'oma indicà con $\eta^{(r)}$. Ste variàbij a son ciamà "*variàbij ëd camp*" e a peulo arpresenté nen mach dë spostament com i l'oma vist prima.

La condission për podèj dovré l'espression matemàtica vista sì dzora a l'é che a-i sio n equassion dël tipo:

$$\frac{\partial L}{\partial \eta^{(r)}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} - \sum_j \frac{d}{dx_j}\frac{\partial L}{\frac{d\eta^{(r)}}{dx_j}} = 0$$

L'espression $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} - \sum_j \frac{d}{dx_j}\frac{\partial L}{\frac{d\eta^{(r)}}{dx_j}}$ as ëscriv sovens giusta coma $p_i = \frac{\delta L}{\delta \eta}$ e costa espression a ven ciamà "***derivà funsional ëd L*** ".

I podoma 'ncora dovré la notassion $\frac{d\eta^{(r)}}{dx_j} = \eta,_j^{(r)}$, giusta për semplifiché la grafìa dj'espression.

Sensa andé pì ant l'ancreus, da coste considerassion i arcavoma che ant ij sistema contìnuo le variàbij ëd camp a pijo 'l pòst dle coordinà spassiaj. Ste coordinà spassiaj, peui, a continuo a essie coma paràmeter indipendent, ansema al temp t . A propòsit dle variàbij ëd camp e ij camp midem, a ventrà traté la costion an manera separà (magara peui).

Formulassion ëd Hamilton

La procedura a l'é l'istéssa 'd cola che as fà ant ël cas discrét, e dovrand le fonsion ëd densità ela derivà fonsional al pòst dle derivà parsiaj ordinàrie, as treuvo d'arzultà che a l'han l'istéssa forma 'd coj ch'i l'oma trovà prima. Se hi a l'é na coordinà, ant ël cas discret ël moment coniugà a sta variàbil a sarà dàit da $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i}$.

An passand an manera diréta al cas contìnuo i l'avrìo che $L = \sum_i a L_i \quad \rightarrow \quad \int L\, dx$ e donca i l'oma che:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} dx$$

ma sòn a pòrta a avèj un moment che a l'é n'anfinitésim. A conven donca definì na "**densità 'd moment π**" second l'espression: $\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}}$. An general, a n variàbij ëd camp $\eta^{(r)}$ a corispondo n "*variàbij coniugà* " dàite da $\pi^{(r)} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^{(r)}}$.

Continuand a ségoe sto formalism, i podoma definì na "*densità Hamiltonian-a H* " travers l'espression:

$$H = \sum_r \pi^{(r)} \dot{\eta}^{(r)} - L$$

e l'Hamiltonian-a integral H a sarà antlora dàita da $H = \int H \; dV$. I notoma che:

$$H = H\left(\eta^{(r)}, \frac{d\eta^{(r)}}{dx_j}, \pi^{(r)}, x_j, t\right)$$

Equassion hamiltonian-e canòniche

I pijoma an considerassion ël diferensial total dla fonsion H. Prima i diferensioma cost'ùltima espression e peui l'espression ëd soa definission.

$$dH = \sum_r \left(\frac{\partial H}{\partial \eta^{(r)}} d\eta^{(r)} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial \eta,_j^{(r)}} d\eta,_j^{(r)} + \frac{\partial H}{\partial \pi^{(r)}} d\pi^{(r)} \right) + \sum_i \frac{\partial H}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

e da la definission midema ëd H:

$$dH = \sum_r \left(\dot{\eta}^{(r)} d\pi^{(r)} + \pi^{(r)} d\dot{\eta}^{(r)} \right) - dL =$$

$$= \sum_r \left(\dot{\eta}^{(r)} d\pi^{(r)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} d\dot{\eta}^{(r)} \right) - \sum_r \left(\frac{\partial L}{\partial \eta^{(r)}} d\eta^{(r)} + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \eta,_j^{(r)}} d\eta,_j^{(r)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^{(r)}} d\dot{\eta}^{(r)} \right) +$$

$$- \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_j} dx_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt =$$

$$= \sum_r \left(\dot{\eta}^{(r)} d\pi^{(r)} - \frac{\partial L}{\partial \eta^{(r)}} d\eta^{(r)} - \sum_j \frac{\partial L}{\partial \eta,_j^{(r)}} d\eta,_j^{(r)} \right) - \sum_i \frac{\partial L}{\partial x_j} dx_j - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Dal moment che coste doe espression a son l'istéssa còsa, ij coeficent a venta che a sio j'istéss, e donca i egualioma ij coeficent.

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial H}{\partial \eta^{(r)}} = -\dfrac{\partial L}{\partial \eta^{(r)}} \quad ; \quad \dfrac{\partial H}{\partial \eta_{,j}^{(r)}} = -\dfrac{\partial L}{\partial \eta_{,j}^{(r)}} \quad ; \quad \dfrac{\partial H}{\partial \eta^{(r)}} = \dot{\eta}^{(r)} \\ \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t} \quad ; \quad \dfrac{\partial H}{\partial x_j} = -\dfrac{\partial L}{\partial x_j}\end{array}\right\}$$

I l'oma vist prima che $\pi^{(r)} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^{(r)}}$ e donca i l'avroma che $\dot{\pi}^{(r)} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^{(r)}}\right)$, e se i consideroma l'espression dla derivà funsonal ëd L i podoma scrive:

$$\dot{\pi}^{(r)} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}^{(r)}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \eta^{(r)}} - \sum_j \frac{d}{dx_j}\frac{\partial L}{\partial \eta_{,j}^{(r)}} =$$

$$= -\frac{\partial H}{\partial \eta^{(r)}} + \sum_j \frac{d}{dx_j}\frac{\partial H}{\partial \eta_{,j}^{(r)}} \equiv -\frac{\delta H}{\delta \eta^{(r)}}$$

e peui ëdcò: $\dot{\eta}^{(r)} = \dfrac{\partial L}{\partial \pi^{(r)}} = \dfrac{\partial H}{\partial \eta^{(r)}} - \sum_j \dfrac{d}{dx_j}\dfrac{\partial H}{\partial \eta_{,j}^{(r)}} \equiv \dfrac{\delta H}{\delta \pi^{(r)}}$ e sòn përché ant l'espression ëd H a-i son nen le terivà ëd π. A la fin i l'oma le relassion corispondente a j'equassion canòniche 'd prima:

$$\frac{\delta H}{\delta \pi^{(r)}} = \dot{\eta}^{(r)} \quad ; \quad \frac{\delta H}{\delta \eta^{(r)}} = \dot{\pi}^{(r)}$$ e a valo 'dcò le relassion:

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = -\frac{\partial L}{\partial x_j} \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

E për adéss is fërmoma ambelessì.

Pàgina lassà veuida apòsta