Part 7: Le vibrassion

Motobin amportant an natura a son ij moviment vibratòri e soe composission, che a ven-o analisà. As vëdd ëdcò l'arsonansa ant le ossilassion forsà, e quaicòs dla propagassion d'energia mecanica travers le onde ant ij còrp.

TAULA DLA PART CH'A FA SET

TAULA DLE FIGURE DLA PART CH'A FA SET

MOVIMENT PERIÒDICH

Un moviment a l'é ciamà periòdich cand, a intervaj ëd temp *T* costant, l'oget an moviment a arpija na dàita posission e ant ògni interval a arpét sempe ël moviment a l'istessa manera. A cost propòsit, i l'oma dësgià vist, an Cinemàtica, ël moviment armònich, che a l'é ël pì sempi ëd costi moviment. I l'oma ëdcò studià ël moviment d'un pèndol , che a l'é ancora un moviment armònich, almanch con aprossimassion motobin bon-a.

Ant lë spirit dë ste nòte, i voroma nen dì tut lòn che a-i sarìa da dì a propòsit dë stì moviment, che a peulo esse ant un-a, doe ò tre dimension, ma is limitoma ai cas pì comun (che a son ëdcò coj ch'a peulo vnì pì a taj an pràtica).

Moviment armònich

Com i l'oma dit, i l'oma già vist sto moviment an Cinemàtica, coma proiession su un diameter d'un moviment sircolar costant. A l'é ël moviment su na diression, d'un pont che a vibra antorna a na posission d'echilibri, Lë spassi an fonsion dël temp a arsulta na sinusòid e a peul esse scrit coma:

$x = A \cdot sen(\omega \cdot t + \vartheta)$ andova :

A a l'é ël massim spostament da la posission d'echilibri

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ a l'é la velocità angolar dël moviment sircolar supòst coma origin dla vibrassion

e f a l'é antlora ël nùmer ëd gir al second (ò osilassion al second) e a - i diso *Frequensa*

ϑ a l'é na costant che a dipend dal pont ëd partensa dël moviment, amportanta për paragoné

doi moviment fra 'd lor. Angol dël ragg dël moviment sircolar al temp pijà coma zero

An Cinemàtica i l'oma vist quale che a son velocità e acelerassion. Suponoma che a vibré a sia ma massa ***m***. Sto moviment a riva da l'integrassion ëd l'equassion:

$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x \quad \text{butand} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Donca ël moviment as produv cand an sla massa a agiss na fòrsa elastica ëd cole che i l'oma vist, che a l'é proporsional a lë spostament da la posission d'echilibri e a tira a arporté la massa an costa posission. An coste condission la massa a vibrerìa an manera andefinìa antorna a soa posission d'echilibri.

Ossilassion smortà

An pràtica, tute le ossilassion lìbere coma cole dëscrite, a ancontro resistense passive che a fan perde energia pì ò manch ampressa. Com a peul sucede, suponoma che la fòrsa ëd resistensa a dipenda da la velocità dla massa. Antlora l'equassion ëd partensa a dventa:

$$m \cdot \ddot{x} = -k \cdot x - r \cdot \dot{x} \quad \text{e as peul buté} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad \text{e} \quad 2 \cdot \delta = \frac{r}{m}$$

Oltra che la fòrsa d'arciam vers la posission d'echilibri, an sla massa adess a agiss ëdcò la fòrsa ëd resistensa. L'equassion a dventa:

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot x = 0$$

Ël risultà dl'integrassion dë st'equassion diferensial a dipend dal valor dle costant $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{\omega}^2, \boldsymbol{\delta}$, che a son sempe positive, ($\boldsymbol{\delta}$ a ven ciamà coeficent dë smortament) e a-i son ij tre cas:

Për $\delta < \omega$ $\quad x = e^{-\delta \cdot t} \cdot A \cdot \cos(\alpha \cdot t + \vartheta)$ andova $\alpha = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$

Për $\delta = \omega$ $\quad x = e^{-\delta \cdot t} \cdot (A + B \cdot t)$

Për $\delta > \omega$ $\quad x = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(A \cdot e^{\beta \cdot t} + B \cdot e^{-\beta \cdot t}\right)$ andova $\beta = \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$

Introma nen ant la tecnica ëd solussion dl'equassion, ma i arportoma an figura 1 ij tipo ëd grafich che as oten-o ant ij tre cas.

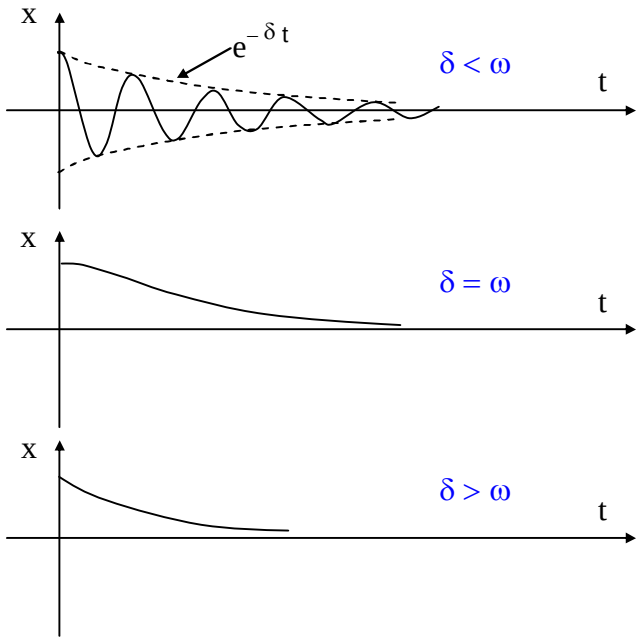

Figura 1 – Ossilassion smortà

Mach ant ël prim cas a-i é ancora n'ossilassion, ma as peul nen disse che a sia periòdica. A-i è un interval ëd temp T costant për ël passagi dal pont d'echilibri ant la stessa diression, ma a sto pont la velocità a diminuiss vira për vira. L'interval T a l'é pì long ëd col che a sarìa stabilì mach da massa e coeficent elàstich. Ël massim dl'ossilssion a diminuiss an manera esponensial con ël temp.

As vëdd che l'ampiëssa a cala coma $e^{-\delta t}$ e ël temp fra un passagi e l'àutr da la posission d'echilibri a l'é:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} \quad \text{anvece che} \quad T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega}$$

Sto temp a ven ancora ciamà "***period***" e a l'é pì longh ëd col che i l'avrìo sensa smortament. Cand $\delta = \omega$ as vëdd che T a perd so significà e donca 'l moviment a l'é pì nen periòdich.

Composission e scomposission dle ossilassion

An Cinemàtica i l'oma già vist quaicòs dla composission ëd doi moviment armònich particolar, sì i vardoma la còsa da na mira pì general.

Scomposission d'un moviment periòdich qualonque

As peul dëmostré che qualonque moviment periòdich a l'é l'adission ëd moviment armònich a frequensa diferenta. Pì percis, ògni moviment periòdich, con period *T*, a peul esse dëscrit coma l'adission d'un moviment arrnònich che a l'abia l'istess periòd *T*, pì n'anfinità ëd moviment arnònich, ognidun con un period che a l'é sota-multipl anter ëd *T*. Le ampiësse 'd costi moviment, e soe fasi, che a peulo ëdcò esse zero, a determino la forma dl'ossilassion adission. Sòn a veul dì che qualonque moviment periòdich a peul esse scrit coma:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t + \vartheta_n)$$

Costa a ven ciamà la "***série ëd Fourier***" che a svilùpa la fonsion *x(t)*. A parte da la fonsion *x(t)* as peulo trové le costante A_n e ϑ_n. Stoma nen sì a vëdde sto svilup an serie, bele che a sia n'ëstrument motobin amportant ant l'ëstudi ëd tuti ij sistema periòdich, dal moment che i l'oma già parlane a propòsit ëd nòstre nòte 'd matemàtica.

An pràtica, për le ossilassion che a n'anteresso, ël nùmer dij termo d'adission a l'é cit, e tuti j'àutri a l'ha ampiëssa zero. La figura 2 a mostra n'esempi.

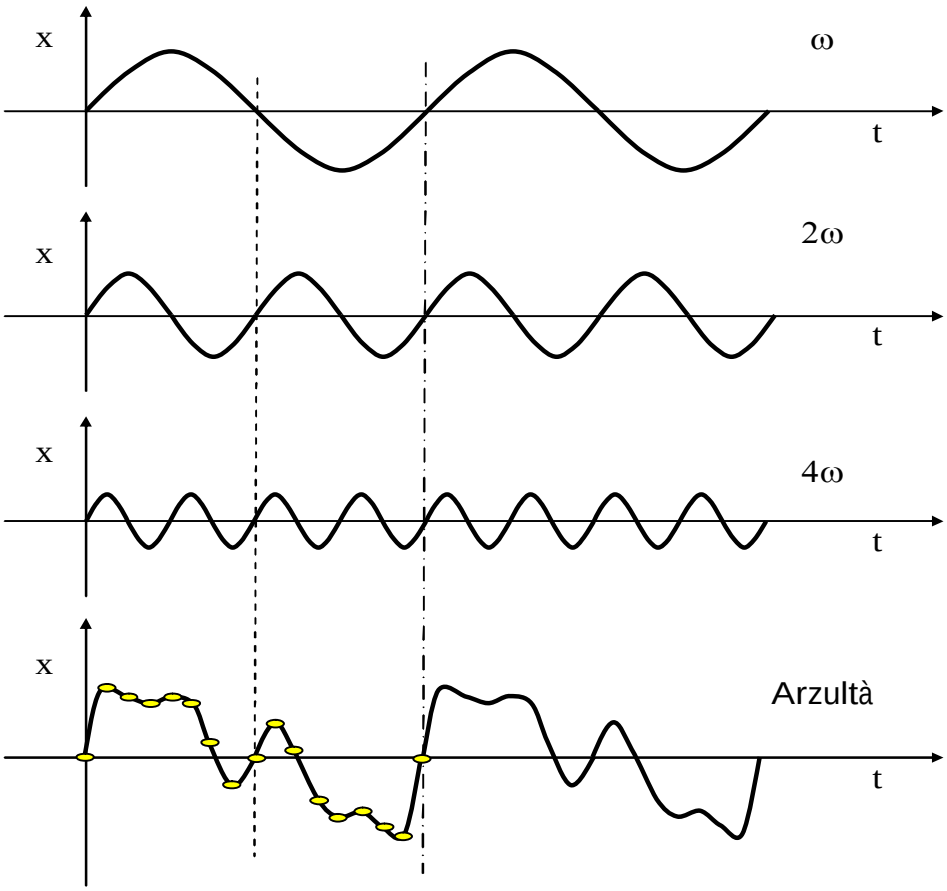

Figura 2 – Scomposission d'un moviment periòdich

Le ossilassion con frequensa multipla antrega ëd na dàita ossilassion as ës-ciamo soe armòniche. As nòta che n'onda quadra a l'é fàita da l'onda fondamentàl e soe armòniche pari (2ω, 4ω, 6ω, etc.), mentre n'onda tiangolar a l'é fàita da l'onda fondamentàl e soe armòniche dispari (3ω, 5ω, 7ω, etc.). A l'é natural che l'ampiëssa dle armòniche a l'é essensial.

Composission.

I l'oma vist n'esempi, an Cinemàtica d'adission ëd doi moviment armònic con l'istessa ampiëssa, con istessa diression e frequense pòch diverse (batiment), peui i l'oma vist quàich particolar cas d'adission ëd doi moviment normaj fra ëd lor. Sì is limitoma a doi moviment armònich an sl'istessa diression. Për ciairëssa arpetroma ëdcò quaicòs ch'i l'oma già dit. An general ij doi moviment a saran:

$$x_1 = A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \vartheta_1) \quad ; \quad x_2 = A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \vartheta_2)$$

Adëss i vëddoma vàire cas d'anteresse ëd composission dë sti moviment.

Doi moviment con l'istessa frequensa

Ant l'ipòtesi che $\omega_1 = \omega_2$ l'adission dij doi moviment, arcordand le fòrmule trigonometriche d'adission e sotrassion, che sì i stoma nen a arporté, a arsulta ancora un moviment con l'istessa frequensa, dont ampëssa massima A e fase θ a son dàite da:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1)}$$

$$\tan \vartheta = \frac{A_1 \cdot \sin \vartheta_1 + A_2 \cdot \sin \vartheta_2}{A_1 \cdot \cos \vartheta_1 + A_2 \cdot \cos \vartheta_2}$$

Se ij doi moviment a son an fase ($\vartheta_1 = \vartheta_2$) le doe ampiëssе as adission-o, se ij doi moviment a son an oposission ($\vartheta_1 = \pi + \vartheta_2$) le doe ampiëssе as sotrao. Ant j'àutri cas l'ampiëssa a pija un valor antrames.

Doi moviment con perìod diferent ma con-misurabij

An cost cas ij doi perìod a son taj che $m \cdot T_1 = n \cdot T_2$ andova m e n a son doi nùmer antregh. Se as pijo ij doi nùmer pì cit che a sodisfo la condission, i l'oma: $m \cdot T_1 = n \cdot T_2 = T$. Ël moviment che a arzulta a l'é nen armònich, ma a l'é periòdich, e a l'ha perìod ugual a T.

Se adess i consideroma un moviment con period T_0 e tuti ij moviment con period $\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{3}, \frac{T_0}{4}, \ldots \frac{T_0}{n}, \ldots$ etc. e j'adissionoma, otnoma un moviment periòdich, e is trovoma ant ël cas opòst dla scomposission d'un moviment periòdich qualonque.

Doi moviment con perìod nen con-misurabij

An efét, se le condission viste prima a son nen sodisfàite, la composission a dà nen un moviment periòdich. An ògni meud, a-i son almanch doi cas anteressant da analisé ëdcò cand ij doi period a son qualonque. Ij vëddoma sì sota..

Doi moviment con frequensa pòch diferenta

Sta composission a l'é già stàita vista an Cinemàtica. Lì i l'oma fàit na tratassion analìtica dël fenòmeno, mentre sì i doma na giustificassion lògica. Suponoma doe frequense quasi uguale, pr'esempi 100 Hz e 101 Hz e suponoma che ij dij moviment a parto an fase. La composission a l'avrà n'ampiëssa che a l'é l'adission dle doe ampiëssе e donca a l'é la massima.

Ël prim moviment a l'ha un perìod $T_1 = \frac{1}{f_1} = 0{,}01\,[\sec]$, mentre l'ëscond moviment a l'avrà un perìod $T_2 = \frac{1}{f_2} = 0{,}099099.....[\sec]$. Se i pijoma T_2 com arferiment, i podoma dì che l'ëscond moviment a l'ha perìod T e ël prim $T + \Delta T$. Parej, dòp un perìod T da l'inissi, mentre l'ëscond moviment a l'ha "fàit" n'angol ëd 2π, ël prim a l'é sfasasse, përchè so angol a l'é $2\pi \cdot T/(T + \Delta T)$ con na diferensa ëd :

$$\vartheta = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\Delta T}{T + \Delta T}$$

A ògni perìod l'angol d'ësfasament a chërs dë sta quantità. A na dàita mira θ a dventa motobin davsin a π. Sòn a càpita dòp n perìod, con n tal che:

$$\pi = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \frac{\Delta T}{T + \Delta T} \quad ; \quad n = \frac{T + \Delta T}{2 \cdot \Delta T}$$

A sta mira ij doi moviment a son an oposission e donca l'ampiëssa dla composission a l'é minima- Dòp àutri n perìod T ij doi moviment a torno an fase e la composission a l'ha torna un massim. Donca la variassion dl'ampiëssa a l'é periòdica con un period Γ che a val:

$$\Gamma = T \cdot \frac{T + \Delta T}{\Delta T}$$

La frequensa dla variassion dl'ampiëssa a l'é antlora:

$$\Phi = \frac{1}{\Gamma} = \frac{\Delta T}{T^2 + T \cdot \Delta T}$$

Doi moviment con frequensa motobin diferenta

Se ij doi moviment a son adissionà, as oten mach na ossilassion (cola a frequensa àuta) che a cambia valor sentral con l'andament che a l'ha ampiëssa e frequensa istesse a l'ossilassion a frequensa bassa..

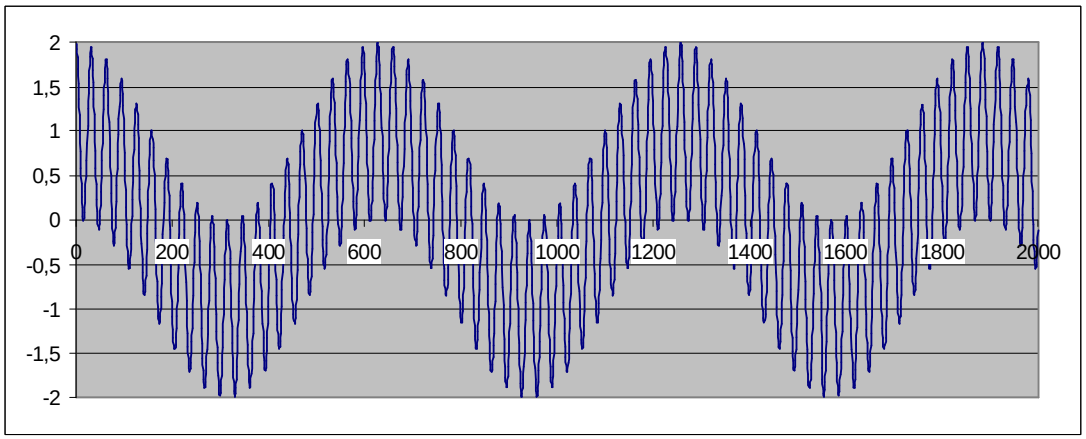

Figura 3 – Adission ëd doe ossilassion a frequensa motobin diferenta

Se anvece as fa an manera che l'ampiëssa dl'ossilassion a frequensa àuta f a l'abia n'andament che a varia periodicament con la frequensa bassa Φ, as oten lòn che as ciama la

modulassion d'ossilassion a frequensa pì àauta con cola a ferquensa pì bassa. An particolar sta modulassion a ven ciamà "***Modulassion d'ampiëssa*** ". Son as esprim, da na mira matemàtica, con:

$$x = \left[A + B \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \Phi \cdot t\right)\right] \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t\right)$$

Andova *A* al'è l'ampiëssa media dla frequensa àuta, e *B* a l'é l'ampiëssa dla variassion d'*A*. Se *A* e *B* a son istess, l'ampiëssa d'*x* a va da *0* a *2· A* e la modulassion as dis al *100%*. La figura 4 a mostra sto cas. I l'oma dit che le doe frequense a deuvo esse tant diferente, an realità sòn a l'é nen rigoros, ma al'è l'ipòtesi che i foma.

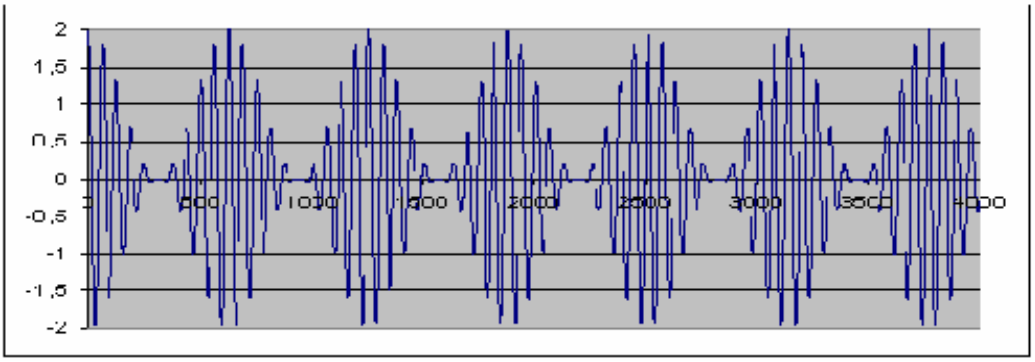

Figura 4 – Modulassion d'ampiëssa

Arcordoma, da la prima part d'ëste nòte (antrodussion matemàtica), che:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha + \beta\right) + \cos\left(\alpha - \beta\right)\right]$$

e donch nòstra espression a dventa:

$$x = A \cdot \cos\left(\omega \cdot t\right) + \frac{A}{2} \cdot \cos\left[\omega \cdot t + \Omega \cdot t\right] + \frac{A}{2} \cdot \cos\left[\omega \cdot t - \Omega \cdot t\right]$$

Sòn a veul dì che l'onda modulà da na sinusòid a l'é echivalenta a l'adission ëd tre onde, dont la prima a l'é l'onda midema, mentre le àutre doe a son le "onde lateraj", ognidùn-a con n'ampiëssa metà dl'ampiëssa dl'onda che a mòdula, l'un-a con na frequensa spostà an bass, rispét a l'onda modulà, dla frequensa dl'onda che a mòdula e l'àutra con na frequensa spostà an àut dla stessa quantità.

DINÀMICA DLE VIBRASSION

L'origin dle vibrassion a l'é la fòrsa elàstica. Se na massa ***m*** a l'ha na posission d'echilibri stabil ant un camp ëd fòrse elastiche, vis-a-dì fòrse proporsionaj a lë spostament da la posission d'echilibri., e a ven lassà lìbera, ël moviment che as produv a l'é na vibrassion. Se a-i son nen resistense, l'equassion dël moviment a sarà, second le lèj ëd Newton:

$$m \cdot \ddot{x} = k \cdot x$$

La solussion dë st'equassion diferensial, second lòn che i l'oma vist, a l'é:

$$x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \vartheta)$$

andova A e θ a son costant d'integrassion, che a dipendo dai valor inissiaj ëd posission e velocità, mentre $\omega = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{T}$ con T che a val $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$.

Na còsa simil a val për moviment ëd rotassion (elasticità ëd torsion). L'acelerassion linear $\ddot{x}$ a ven sostituìa da cola angolar $\ddot{\alpha}$ e la massa m dal moment d'inersia J.

I l'oma vist che un pendol che a fasa cite ossilassion as compòrta a l'istessa manera. Le cite ossilassion a përmëtto l'aprossimassion ëd consideré la fòrsa d'arciam coma fòrsa elastica.

As vëdd che tant pì la massa a l'é grossa e/ò la reassion elàstica a l'é cita, tan pì ël period a l'é longh, coma i savoma da l'esperiensa.

Se i vardoma la còsa da la mira dla conservassion dl'energia, i podoma dì che a lë spostament massim, andova la velocità a l'é zero, tuta l'energia a l'é potensial (elàstica) e la velocità a dventa zero, mentre cand la massa a passa da la posission d'echilibri l'energia potensial a l'é zero e la velocità a l'é massima (massim dl'energia cinética).

L'energia potensial socià al camp ëd fòrse elàstiche (che a dipendo mach da l'ëspostament e nen da la massa), coma i l'oma vist ant la part ch'a fà sinch, a l'é dàita da: $E_e = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$, mentre l'energia cinética a sarà sempe $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2$ e donca i l'avroma:

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{x}^2 = \text{cost}$$

Se la fonsion x a l'é dla forma $x = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \vartheta)$, sostitoend as oten:

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t + \vartheta) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t + \vartheta) = \text{cost}$$

Costa equassion a l'é sodisfàita se $k = m \cdot \omega^2$ e donca se $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$ coma i l'avìo già vist.

L'istess rasonament a peul esse fàit për ma massa che a vira antorna a n'ass, com i l'oma già dit. A basta ten-e cont che la massa a ven sostituìa dal moment d'inersia rispét a col ass e la costant elàstica a peul esse, pr'esempi, cola ëd torsion.

Ossilassion forsà

Suponoma adess un sistema elàstich real che daspërchiél a sarìa un sistema ossilant smortà, coma col che i l'oma già vist prima. A sto sistema aplicoma na fòrsa, për adéss generica, ***f(t)***. An costa manera l'equassion che a dëscriv ël moviment dël sistema a dventa:

$$m \cdot \ddot{x} + r \cdot \dot{x} + k \cdot x = f(t)$$

che a peul esse scrivùa, con le posission viste fin-a sì, coma:

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot x = f(t)$$

La solussion ëd costa equassion diferensial, che a l'é nen omogenia, a l'é dël tipo $x = x_0 + x_1$ andova x_0 a l'é l'integral general dl'equassion omogenia (cola che as oten butand $f(t) = 0$), e x_1 al'è n'integral particolar qualonque dl'equassion completa (vardé le nòte 'd matemàtica). Ël termo x_0 a arpresenta l'ossilassion lìbera smortà dël sistema. I l'oma già vistla e notoma che sto termo, dòp un period inissial, a va a zero e a anfluiss pì nen.

Për ël termo x_1 i notoma che a l'é d'anteresse cand la fòrsa $f(t)$ aplicà a l'é armònica, vis-a-dì dël tipo $f(t) = F \cdot \cos(\Omega \cdot t)$. Se i butoma $\Phi = \frac{F}{m}$, l'equassion a dventa:

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + k \cdot x = \Phi \cdot \cos(\Omega \cdot t)$$

La solussion general ëd costa equassion a l'é dël tipo:

$$x = x_0 + x_1 = A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(a \cdot t + \delta) + A \cdot \cos(\Omega \cdot t - \vartheta)$$

$$\text{i notoma an ciàir che } x_1 = A \cdot \cos(\Omega \cdot t - \vartheta)$$

Se i consideroma l'equassion a regim, vis-a-dì dòp un temp a basta long da podèj consideré ël prim termo dlë scond member bastansa davzin a zero da pì nen anfluì, a basta stabilì ël valor d'A e ëd θ për arzolve nòstr problema.

Për trové sti valor i consideroma che x_1 a venta che a sia solussion dl'equassion $x = x_0 + x_1$ e, dal moment che:

$$\dot{x}_1 = -\Omega \cdot A \cdot \sin(\Omega \cdot t - \vartheta) \quad \text{e} \quad \ddot{x}_1 = -\Omega^2 \cdot A \cdot \cos(\Omega \cdot t - \vartheta)$$

i podoma scrive che:

$$-\Omega^2 A \cdot \cos(\Omega \cdot t - \vartheta) - 2 \cdot \delta \cdot \Omega \cdot A \cdot \sin(\Omega \cdot t - \vartheta) + \omega^2 \cdot A \cdot \cos(\Omega \cdot t - \vartheta) = \Phi \cdot \cos(\Omega \cdot t)$$

$$\text{e cheuijend a fator comun:}$$

$$\left(\omega^2 - \Omega^2\right) \cdot A \cdot \cos(\Omega \cdot t - \vartheta) - 2 \cdot \delta \cdot \Omega \cdot A \cdot \sin(\Omega \cdot t - \vartheta) = \Phi \cdot \cos(\Omega \cdot t)$$

Costa espression a venta che a sia sodisfàita për ògni valor ëd t, e an particolar:
për $\Omega \cdot t - \vartheta = 0$ a dventa:

$$\left(\omega^2 - \Omega^2\right) \cdot A = \Phi \cdot \cos \vartheta$$

për $\Omega \cdot t - \vartheta = \frac{\pi}{2}$ a dventa:

$$-2 \cdot \delta \cdot \Omega \cdot A = -\Phi \cdot \sin \vartheta$$

Da coste espression as arcava, sensa fé tuti ij passagi:

$$A^2 = \frac{\Phi^2}{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4 \cdot \delta^2 \cdot \Omega^2} \quad ; \quad tan\vartheta = \frac{2 \cdot \delta \cdot \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}$$

A sta mira arcordoma che $\delta = \frac{r}{m}$ andova r a l'é ël coeficent dël termo ëd resistensa passiva. Arcordoma ëdcò che ω a l'é la pulsassion natural dël sistema e Ω a l'é la pulsassion dla fòrsa esterna.

Arsonansa

As vëdd da l'espression dl'ampiëssa dl'ossilassion a regim, che se Ω a dventa istess a ω, ël denominator a l'ha un valor minim, e donca l'ampiëssa a l'é massima. A stabilì st'ampiëssa però, a concor ëdcò ël fator d'ësmortament δ.

Vardoma da na mira analìtica còs a suced. Pijand l'espression dl'ampiëssa, i podoma prima divide numerator e donominator për ω^4. As oten:

$$A^2 = \frac{\frac{\Phi^2}{\omega^4}}{\frac{\omega^4}{\omega^4} - \frac{2 \cdot \omega^2 \cdot \Omega^2}{\omega^4} + \frac{\Omega^4}{\omega^4} + \frac{4 \cdot \delta^2 \cdot \Omega^2}{\omega^4}}$$

Se adess i butoma $q = \frac{\Omega^2}{\omega^2}$ e $\psi = \frac{\delta}{\omega}$ as oten:

$$A^2 = \frac{\Phi^2 / \omega^4}{1 - 2 \cdot q + q^4 + 4 \cdot \psi^2 \cdot q^2} = \frac{\Phi^2 / \omega^4}{\left(1 - q^2\right)^2 + 4 \cdot \psi^2 \cdot q^2}$$

Tnima cont che nòstra variabil a l'é Ω, e për trové ël massim d'A i sercoma ël minim dël denominator. Derivand rispét a q e ugualiand a zero as oten un minim për:

$$q = \sqrt{1 - 2 \cdot \psi^2}$$

Sòn a dis che nen sempe un massim a-i é. An efet, përchè a-i sia un massim ant ël camp real, a venta che l'espression sota radis a sia nen negativa. A venta donca che a sia $\psi^2 < 0{,}5$. Sòn a veul dì che le resistense passive a venta nen che a sio tròp grosse.

Se $\psi^2 > 0{,}5$, l'ampiëssa a diminuiss an manera costanta con ël chërse dla frequensa dla fòrsa esterna (dàit sperimental) mentre se $\psi^2 = 0{,}5$ antlora l'ampiëssa as manten motobin costanta fin-a a $\Omega = \omega$, e peui a comensa a calé.

Pì cit a l'é lë smortament, pì àuta a l'é l'ampiëssa massima. An teorìa, se a-i fussa nen d'autut dë smortament, për qualonque intensità ëd fòrsa, l'ampiëssa massima a tirerìa a andé a l'anfinì.

La condission dl'ampiëssa massima a ven dita ***arsonansa***.

Se i vardoma cos a fa la fase dl'ossilassion rispét a cola dla fòrsa esterna, i vëddoma che, an condission d'arsonansa le doe ossilassion a son sempe an quadratura, vis-a-dì che a l'han na diferensa ëd fase ugual a π/2. Për frequense forsà pì basse ëd cola d'arsonansa la fase a tira vers zero, për frequense pì àute a tira a vnì ugual a π. Pì la resistensa a l'é cita, pì la fase a varia ampressa ant l'antorn dl'arsonansa, coma as peul vëdde an figura 5, andova a ven mostrà, an fonsion dla frequensa "*d'ecitassion*", ampiëssa e fase con ψ pijà coma parameter. La figura a l'é mach andicativa.

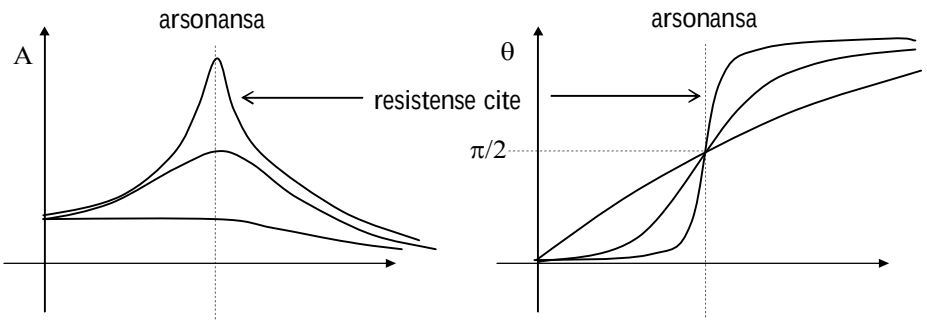

Figura 5 – Ampiëssa e fase antorna a l'arsonansa

Ossilator cobià

Acenoma mach ampressa e qualitativament a costa question. Is arferoma a figura 6.

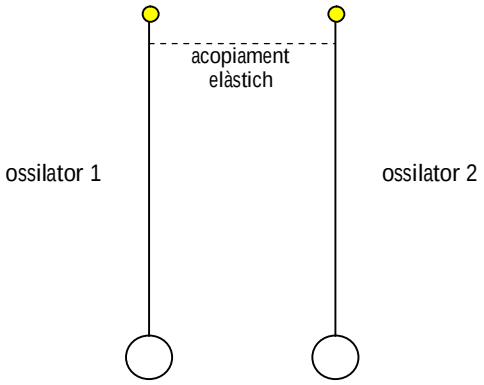

Figura 6 – Ossilator cobià

As considero doi ossilator istess, e donca con l'istessa frequensa d'arsonansa, che an nòstr cas a son doi pendoj. Ij doi a son acopià da un fil elàstich. Suponoma che an echilibri la tension dël fil a sia cita e che a ten-a quasi vertiaj ij pendoj. Se un pendol, foma col dë snistra, as bogia, disoma a snistra, la tension an sël fil elàstich a chërs e a fa varié la fòrsa aplicà dal fil al pendol ëd drita. Dal moment che ël pendol dë snistra a fa un moviment armònic, ël pendol ëd drita a arsev na fòrsa d'ecitassion armònica, che an sto cas a l'é an arsonansa, e a comensa a bautié con ampiëssa che a chërs. N'ëstudi rigoros a l'é complicà dal fàit che as peul nen trascuré ël transitòri inissial.

A l'é ciàir che se ël sistema, dòp ël prim andi, a l'é isolà, l'energia total a venta che a resta costanta. Parèj, se ël pendol a drita as buta an moviment e a ossila con ampiëssa che a chërs, a aumenta soa energia, che a venta che a sia gavà al pendol dë snistra.

An efét ël pendol dë snistra a riduv man man soa ampiëssa, ma a manten na fase che a-j përmëtt ëd cede soa energia a l'àutr, fin-a a fërmesse, mentre l'àutr a riva a la massima ampiëssa. A sta mira ël process as anvert.

Pì l'acopiament a l'é strèit e pì lést a l'é ël process ëd trasferiment dl'energia (a-i van meno perìod). N'acopiament strèit a l'é dàit da n'elàstich pì robust, pì dur. Se a-i fusso nen resistense ël process a continuerìa a l'anfinì. An pràtica, un pòch a la vira, l'ampiëssa massima as arduv fin-a a zero.

A l'é fàcil, da na mira intuitiva, rend-se cont ëd col che a l'é 'l mecanism dël trasferiment dl'energia. Suponoma che 'l prim ossilator a sia slansà vers snistra mentre lë scond a l'é fërm. Cand ël prim a riva al massim dl'elongassion (lë scond a l'é ancora praticament fërm), l'elastich a l'é a la tension pì àuta e donca a aplica la fòrsa pì àuta a l'ëscond ossilator. Mentre 'l prim pendol as fërma për torné andarera, l'àutr a l'ha la pì àuta acelerssion (ò quasi, vist che a l'é dësgià bogiasse). Mentre la tension dl'elàstich a fren-a 'l prim, a acelera lë scond.

PROPAGASSION PËR ONDE

I parloma d'onde mecàniche che as propago ant na sostansa elàstica. Suponoma che la sostansa a sia sòlida, mentre vëddroma àutri tipo d'onde ant àutri travaj, che fòrse i faroma.

Propagassion ëd n'impuls longitudinal

I suponoma d'avèj na sbara elàstica coma cola ëd figura , omogénia (densità costanta ρ) e con session costanta S.

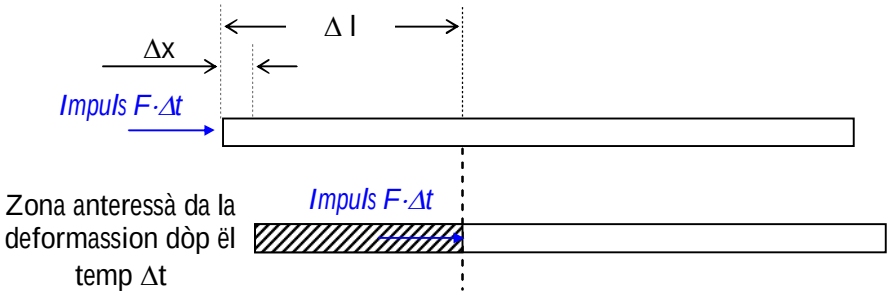

Figura 7 – Propagassion longitudinal ëd n'impuls

Se i procuroma n'urt longitudinal a na ponta dla sbara, aplicand na fòrsa F (valor medi) për un temp Δt (motobin cit),sota l'assion dla fòrsa na cita porsion dla sbara a ven comprimùa. La pression provocà an sla surfassa da l'urt, a viagia ant la sbara a na dàita velocità, e, ant ël temp Δt andova a agiss la fòrsa, a riva a anteressé na part Δl dla sbara. Ciamoma c la velocità ëd propagassion, për adéss nen conossùa. I voroma mach fé noté che sì i stoma ipotisand un comportament bin diferent da col ëd na sbara an teorìa rèida.

Donca i l'oma n'impuls $i = F \cdot \Delta t$ che ant ël temp Δt a anteressa la longhëssa $\Delta l = c \cdot \Delta t$. Sta part dla sbara a l'ha na massa $\Delta m = c \cdot \Delta t \cdot S \cdot \rho$

Sto tràit dë sbara, sota l'assion dla fòrsa F a patiss na deformassion (as ëscursa) ëd Δx. Second lòn che i l'oma vist a propòsit ëd deformassion elàstiche, Δx a val

$$\Delta x = \frac{1}{E} \cdot \Delta l \cdot \frac{F}{S} \quad \text{andova} \quad E = \text{mòdul d'elastissità}$$

Dòp ël temp Δt la porsion comprimùa a aplica l'istess impuls a la part dla sbara che a ven dòp. Sta part a patiss l'istess process. Donca l'impuls as propaga ant la sbara con na velocità c.

Da na mira dinàmica a suced che la massa $\Delta m = c \cdot \Delta t \cdot S \cdot \rho$ as ëspòsta ëd Δx sota l'assion dla fòrsa F, con na velocità dàita da $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ e donca la variassion ëd quantità ëd moviment a venta che a sia ugual a l'impuls arsevù, vis-a-dì:

$$\Delta m \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = F \cdot \Delta t$$

e i consideroma ëdcò che la velocità ëd propagassion a l'é $c = \frac{\Delta l}{\Delta t}$

Se i foma tute le sostitussion i rivoma a la fin a scrive:

$$c \cdot \Delta t \cdot S \cdot \rho \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta l} \cdot E \cdot S \cdot \Delta t \quad ; \quad c \cdot \rho = \frac{\Delta t}{\Delta l} \cdot E \quad ; \quad c \cdot \rho = \frac{E}{c}$$

$$\text{e donca } c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

La velocità ëd propagassion a dipend parèj mach da le carateristiche dël material, an particolar da soa densità e sò mòdul d'elasticità.

Propagassion trasversal longh na còrda

I suponoma adéss che nòstr sistema elàstich a sia na còrda tèisa orisontal. I stabilima antlora un sistema d'ass cartesian, con l'ass *x* ant la diression dla còrda e l'ass *y* ant la diression (normal) dla deformassion. I doma peui na cita deformassion a la còrda, magara con un curt colp trasversal. Is arferima a figura 8.

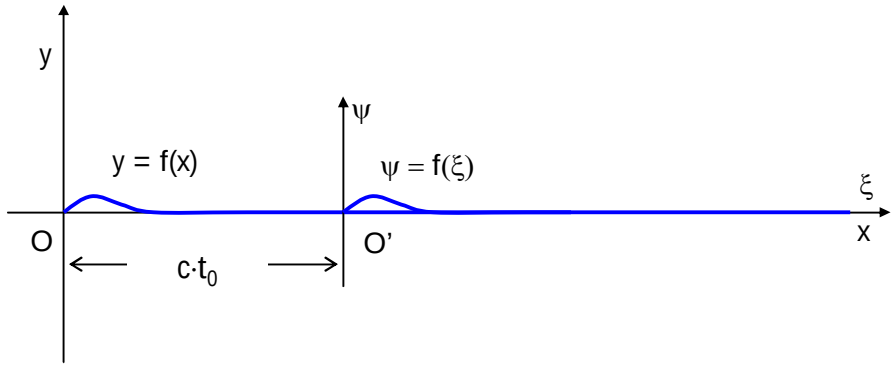

Figura 8 – Propagassion ëd na përturbassion trasversal

As vëdd da na mira sperimental che na përturbassion prodòta ant l'origin as propaga an sla còrda con na velocità che i ciamoma ancora *c*. Sòn a veul dì che dòp un temp *t*, la përturbassion a l'é spostasse d'un tràit $c \cdot t$. Se, ant ël sistema d'ass che i l'oma suponù, i podoma dëscrive la përturbassion al temp $t = 0$ coma na fonsion $y = f(x)$. Al temp $t = t_0$ tuti ij pont a saran spostasse an manera orisontal dla quantità $c \cdot t_0$ Se antlora i foma na conversion d'ass cartesian e i butoma che $\psi = y$ e $\xi = x - c \cdot t_0$, la përturbassion a resta, an ògni temp $\psi = f(\xi)$, mentre l'equassion dla propagassion dla përturbassion as peul scrive:

$$y = f(x - c \cdot t)$$

Imaginoma adess ëd butesse a metà 'd na còrda tèisa e d'arferì nòstr sistema ëd coordinà a sto pont. La situassion a l'é cola arpresentà an figura 9.

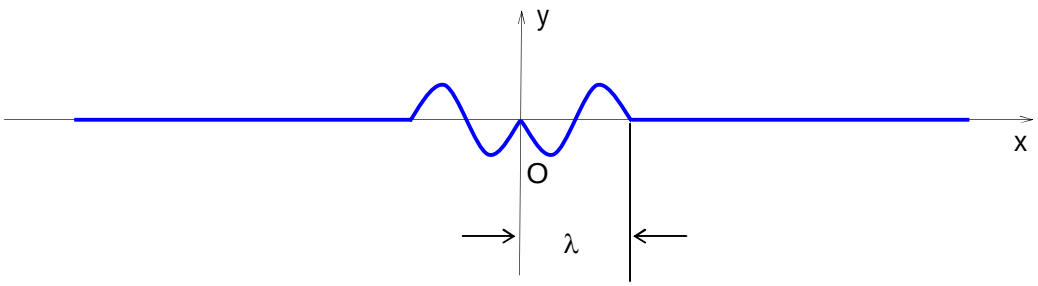

Figura 9 – Longhëssa d'onda

Se al temp $t = 0$ i pijoma ël pont *O* e i-j provocoma n'ëspostament ant la diression dl'ass *y*, sta përturbassion as propagherà ant ij doi vers dl'ass *x*, con velocità, ant l'órdin, *c* e –*c*.

Se al pont i foma dëscrive në spostament sinusoidal che a l'abia un period *T*, a la fin dë sto temp *T* la situassion dla còrda a l'é cola dla figura 9 : ël prinsipi dla përturbassion a l'é spostasse ëd $\lambda = c \cdot T$.

Parèj la përturbassion generà ant ël temp as trasforma an doe përturbassion ant l'ëspassi, che a viagio, ant l'órdin, a velocità *c* e –*c*.

An efét l'equassion dla propagassion $y = f(x - c \cdot t)$ a peul esse trasformà an n'equassion echivalenta . $y = \varphi\left(t - \frac{x}{c}\right)$ che a l'é sempe n'equassion ëd la propagassion.

Se ël moviment *y* ant l'origin a l'é sinusoidal i l'avroma che

$$y = A \cdot \cos\left[\omega \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right) + \vartheta\right] = A \cdot \cos\left[\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \left(t - \frac{x}{c}\right) + \vartheta\right] = A \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\nu \cdot t - \frac{x}{c \cdot T}\right) + \vartheta\right]$$

Adess i ciamoma la costant $\lambda = c \cdot T$ coma ***longhëssa d'onda***, che a l'é la distansa che la përturbassion a fa ant un perìod *T*. I podoma scrive

$$y = A \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x + \vartheta\right)$$

La grandëssa $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ a ven ciamà ***nùmer d'onda*** e a l'é ël numer ëd perìod che a-i stan ant l'unità ëd longhëssa dla còrda.

Dinàmica dl'onda trasversal

Is arferima adéss a figura 10, con la sòlita còrda, sede ëd na përturbassion.

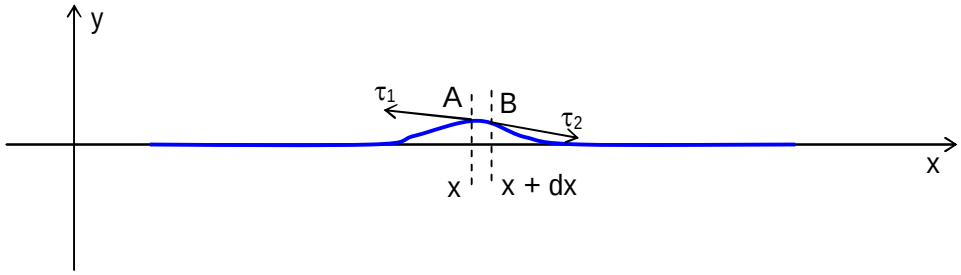

Figura 10 – Dinàmica dl'onda trasversal

Coma sempe i consideroma na còrda tèisa fra doi pont, omogénia e ëd session costanta, con na densità linear *ρ*. I consideroma na deformassion vers la metà dla còrda e un tràit infinitésim AB, ant l'órdin, d'assisse *x* e *x* + *dx*. A le doe ponte dë sto tràit a son aplicà le doe tension τ_1 e τ_2 coma disegnà an figura. I suponoma che le doe tension a sio istesse an mòdul e tangent a la curva. I suponoma peui che l'anclinassion α dël tràit a sia cita, an manera che *cos α = 1*, *sin α = tg α*. Sòn a veul dì che ant ël pont *x* i l'oma $\sin(\alpha) = \tan(\alpha) = \frac{\partial y}{\partial x}$ e ant ël pont *x* + *dx* i l'oma $\sin(\alpha) = \tan(\alpha) = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot dx$ con tute le derivà calcolà ant ël pont *x*.

Antlora i podoma supon-e che le component dle tension second j'ass a sio:

$$\text{An } x: \quad \tau_{1x} = -\tau \cdot \cos(\alpha) = -\tau \quad ; \quad \tau_{1y} = \tau \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\text{An } x + dx: \quad \tau_{2x} = \tau \cdot \cos(\alpha) = \tau \quad ; \quad \tau_{1y} = \tau \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot dx \right)$$

L'arzultant dle doe tension a l'ha donca component longh l'ass x ugual a zero, mentre la component longh l'ass y a l'é:

$$\tau \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot dx$$

e costa a l'é la fòrsa che a agiss an sël tràit *AB* infinitésim dla còrda. La massa dë sto tràit a l'é $\rho \cdot dx$. Donca i podoma scrive la relassion dla dinàmica che a dis che la fòrsa a l'é ugual a la massa për l'acelerassion. Vis-a-dì:

$$\rho \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \tau \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot dx$$

e donch

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\tau} \cdot \ddot{y}$$

Se adess i butoma che $\frac{\rho}{\tau} = \frac{1}{c^2}$ i trovomal'equassion.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \ddot{y} = 0$$

che a l'é l'equassion diferensial dle còrde che a vibro, dita ëdcò ***equassion ëd d'Alembert***. La costant *c* as arconoss esse la velocità ëd propagassion. L'integral general a l'é, an efét,

$$y = f_1(x - c \cdot t) + f_2(x + c \cdot t) \quad \text{andova} \quad c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$$

Le doe fonsion f_1 e f_2 a son fonsion qualonque, derivabij almanch doi vire, che a son stabilìe da le condission dël problema.

Ël cas che i l'oma vist as arferiss a la vibrassion ant ël pian *xy*. Se as supon che costa a sia l'ùnica vibrassion dla còrda, as dis che la vibrassion a l'ha sto pian coma ***pian ëd polarisassion***.

Trasferiment d'energia për onde

Arpijoma un moment lòn che i l'oma dit a propòsit dla dinamica dle ossilassion. An particolar, ël prinsipi dla conservassion dl'energia a dis che un pont material ëd massa ***m***, che a ossila an manera nen smortà, a l'ha an ògni moment n'energia potensial elastica e n'energia cinética, dont l'adission a l'é costanta.

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{y}^2 = \text{cost}$$

Se i suponoma che lë spostament y a sia sinusoidal $y = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$ i l'oma:

$$\frac{k}{2}\cdot A^2\cdot\cos^2(\omega\cdot t)+\frac{m\cdot\omega^2}{2}\cdot A^2\cdot\sin^2(\omega\cdot t)=\text{cost}$$

Costa equassion a l'é sodisfàita për tuti ij t mach se $k=m\cdot\omega^2$. Arcordoma peui che a val sempe la proprietà che $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Antlora i podoma scrive:

$$\frac{m\cdot\omega^2}{2}\cdot A^2\cdot\cos^2(\omega\cdot t)+\frac{m\cdot\omega^2}{2}\cdot A^2\cdot\sin^2(\omega\cdot t)=\text{cost}$$

$$\text{che a veul dì}:\frac{1}{2}\cdot A^2\cdot m\cdot\omega^2=\text{cost}$$

Costa a l'é l'energia, costanta, d'un pont ëd massa *m* che a ossila con pulsassion $\boldsymbol{\omega}$ e ampiëssa massima *A*.

Tornand a nòstra còrda, e suponend che la përturbassion a sia sinusoidal, soa energia ***dE*** a sarà:

$$dE=\frac{1}{2}\cdot A^2\cdot\rho\cdot dx\cdot\omega^2$$

I l'oma vist che ël moviment as ëspòsta sla còrda con velocità *c*. Costa a l'é ëdcò la velocità che as ëspòsta l'energia. L'energia che ant l'unità ëd temp (vis-a-dì la potensa) a traversa na session dla còrda a sarà donch:

$$W=\frac{1}{2}\cdot c\cdot\rho\cdot\omega^2\cdot A^2$$

Assurbiment

Ant ij cas reaj, part dl'energia a ven perdùa durant ël trasferiment an sël mojen che a vibra. A-i é donch un coeficent d'assurbiment α tal che, ant ël cas dla còrda che i l'oma vist, a val l'espression

$$\Delta W=-\alpha\cdot W\cdot\Delta x$$

An efét as vëdd che ant la pì part dij cas reaj, la potensa perdùa a l'é proporsional a la potensa midema. Për në spostament anfinitésim i l'oma donch: $\frac{dW}{dx}=-\alpha\cdot W$

La solussion ëd costa equassion a l'é dël tipo esponensial: $W_x=W_0\cdot e^{-\alpha\cdot x}$. Adess tnima present che la potensa al'è proporsional a A^2 e donca, l'ampiëssa dla vibrassion, a la distansa *x* a sarà:

$$A_x=A_0\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot x}$$

Dal moment che i suponoma na përturbassion sinusoidal, l'equassion dl'onda a dventa

$$y=A_0\cdot e^{-\frac{\alpha\cdot x}{2}}\cdot\cos\left[\omega\cdot\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]$$

Anterferensa d'onde

Avend sempe com arferiment nòstra còrda, i suponoma adess che costa a propaga doe diferente onde. A-i son vaire cas diferent d'onde che a anterferisso, vist che coste a peulo avèj

frequensa ugual ò diferenta con vaire diferense ëd fase e d' ampiëssa e a peulo propaghesse ant l'istessa diression ò an diression contrarie. Le doe onde a peulo peui avèj doi diferent pian ëd polarisassion. Sì i foma mach un pàira d'esempi.

Onde con l'istessa frequensa ant l'istess vers

Vardoma figura 11, andova un sistema che a vibra a produv doe onde istesse ant ij ponr A e B. Le doe onde as propago vers ësnistra e i suponoma che an sij doi ram dla còrda la tension e la densità a sio l'istesse, an manera che la velocità ëd propagassion a sia istessa. Le onde a son polarisà an sl'istess pian.

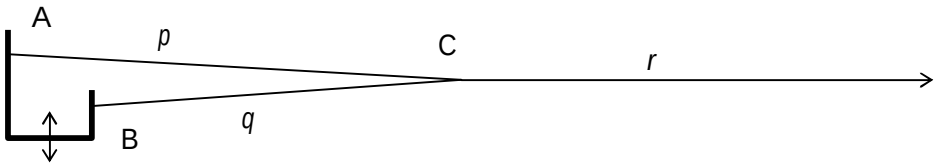

Figura 11 – Anterferensa d'onde concorde

Ël tràit ëd còrda *p* a l'ha na diferenta longhëssa rispét al tràit *q*, an manera che le onde an sij doi ram a rivo al pont comun C con fase diferente. Suponoma ëd buté l'origin dël sistema d'arferiment giusta ant ël pont C e vardoma lòn che a càpita an sël tràit *r* dla còrda. Ciamoma Δd la diferensa ëd longhëssa dij doi tràit *p* e *q* , T ël perìod dl'ossilassion e *A* l'ampiëssa che i consideroma ugual (coma a l'é organisà ël sistema a garantiss che le doe ampiësse a sio uguaj).

Un pont *x* qualonque dël tràit *r* a arsèiv ij moviment:

$$y_1 = A \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

$$y_2 = A \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x - \Delta x}{\lambda}\right)\right]$$

e ël moviment arsultant a sarà dàit da l'adission dij doi. I arcordoma le fòrmule d'adission për ël cossen, che a diso $\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}$

$$y = y_1 + y_2 = 2 \cdot A \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{\Delta d}{\lambda}\right) \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \frac{\pi \cdot \Delta d}{\lambda}\right]$$

Costa a l'é ancora sempe l'equassion ëd na propagassion con l'istessa velocità $c = \frac{\lambda}{T}$. L'ampiëssa a dipend da le fase dle doe onde, massima se la diferensa dle longhësse Δd a l'é multipl antregh dla longhëssa d'onda λ (onde an fase), minima (zero) con Δd multipl dispari ëd mesa longhëssa d'onda (onde an contra-fase).

Onde con l'istessa frequensa an vers contrari

Consideroma adess che dai doi cavion dla còrda a ven-o generà ossilassion, che a viagio për sòn a vers contrari an sla còrda. Is arferoma a figura 12.

La situassion a sia ancora cola ëd prima con onde dla stessa ampiëssa e frequensa. Un pont qualonque x a sarà sogét a doi moviment dàit da le doe propagassion ant ij doi sens. Suponoma che la fase dle doe onde a sia l'istessa an partensa.

Ël prim moviment a part da l'origin e a viagia vers drita, l'ëscond a part da la distansa l e a viagia vers snistra. Ant ël pont x l'onda dal pont l a l'ha fàit na distansa (negativa) $x - l$. Donca ij doi moviment a son:

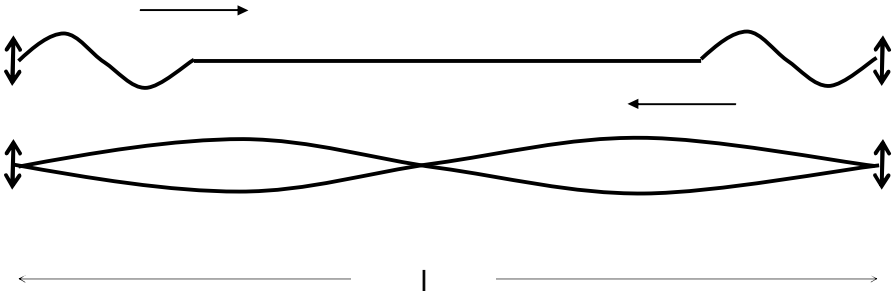

Figura 12 – Anterferensa d'onde dëscòrde

$$y_1 = A \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

$$y_2 = A \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} + \frac{x - l}{\lambda}\right)\right]$$

L'adission dij doi moviment a dventa:

$$y = y_1 + y_2 = 2 \cdot A \cdot \cos\left[-2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{l}{2 \cdot \lambda}\right)\right] \cdot \cos\left[-2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{2 \cdot \lambda}\right)\right]$$

Costa a l'é pì nen l'equassion ëd na propagassion, ma a dis che un pont qualonque dla còrda a ossila con un period T e con n'ampiëssa, che a dipend da la posission, ugual a $2 \cdot A \cdot \cos\left[-2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{l}{2 \cdot \lambda}\right)\right]$. An coste condission as dis che la còrda a supòrta n'onda stassionaria. I vëddroma che costa situassion a l'é pì che d'àutr teòrica, përchè ai cavion dla còrda le onde as rifleto e a gionto na neuva anterferensa ògni vira. Sòn i lo vëddoma.

Riflession dj'onde

An fin i suponoma na còrda con un cavion fiss e da l'àutr a-i sia la sors ëd na vibrassion che as propaga arlongh la còrda. I consideroma l'origin al cavion ecità, con ël cavion fiss a distansa l.

A l'é un fàit sperimental che na përturbassion che a parta dal pont zero, rivà al cavion a distansa l, as arflét andarera. An efét, l'energia propagà da la còrda a spariss nen, e a produv n'impuls ugual a l'andarera. Se, però, ël cavion a l'é fiss, so spostament a l'é zero, e sòn a peul mach capité se l'onda che a riva y_1 e l'onda che a part y_2 a son uguaj e an oposission ëd fase. Vis-a-dì $y = y_1 + y_2 = 0$

A la distansa l da l'origin, l'onda direta a l'avrà espression:

$$y_1 = A \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right)\right]$$

e l'onda riflessa a dovrà avèj na fase, an pì ò an meno, ëd π:

$$y_2 = A \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{2}\right)\right]$$

An sto pont l'adission dle doe onde a l'é zero. Se i pijoma un pont qualonque *x* dla còrda, cost a vëddrà n'onda direta

$$y_1 = A \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

e n'onda inversa:

$$y_2 = A \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{2} + \frac{x-l}{\lambda}\right)\right]$$

L'adission ëd coste doe onde a l'é:

$$y = y_1 + y_2 = 2 \cdot A \cdot \cos\frac{2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{2} + \frac{x-l}{\lambda}\right)}{2} \cdot \cos\frac{2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} + \frac{l}{\lambda} - \frac{1}{2} - \frac{x-l}{\lambda}\right)}{2}$$

$$y = 2 \cdot A \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{4}\right)\right] \cdot \cos\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{l}{\lambda} - \frac{1}{4}\right)\right]$$

Costa a l'é torna n'onda stassionaria, che però a ven dësturbà da la neuva riflession ëd l'onda che a torna ant l'origin e a part torna vers l'àutr cavion. As capiss che se la còrda a l'ha na longhëssa *l* tala che l'onda as rifleta con l'istessa fase dl'onda originaria, antlora as ëstabiliss na vera arsonansa.