Part 6: Stàtica

La composission dle fòrse e dij moment, soa risultant e le condission d'echilibri a ven-o viste prima an manera astrata e peui për ij còrp reaj. Vìncoj e reassion vincolar e quaicòs dij Travaj Virtuaj. Ël prinsipi 'd d'Alembert. Arpijoma an part lòn che i l'oma già vist ant la part antrodutiva.

TAULA DLA PART CH'A FA SES

TAULA DLE FIGURE DLA PART CH'A FA SET

ËL BUT DLA STÀTICA

La Stàtica a studia le condission për l'echilibri dij còrp che a son sogét a fòrse. I l'oma vist che un còrp a l'é ferm mach cand tute le fòrse che a agisso a l'han n'arzultant zero e che l'istessa còsa a càpita ai moment dë ste fòrse.

Antlora a l'é but ëd la Stàtica verifiché se un sistema ëd fòrse a l'é an echilibri e, cand sòn a l'é nen verificà, trové fòrse e moment echilibrant për ël sistema dàit.

Dal moment che a ven-o sercà le condission che a fan an manera che 'l sistema rèid a staga fërm, a l'ha nen amportansa se ël sistema cartesian ëd riferiment a produv fòrse complementar, tipo le fòrse ëd Coriolis, përchè coste as manifesto mach con na velocità. Un sistema d'arferiment terestr a va donca bin sensa che a sia aprossimà.

Në studi semplificà dla Stàtica a ten mach cont dle geometrie, dle fòrse aplicà e dle reassion vincolar. Në studi pì complét e pì pràtich a venta ëdcò che a ten-a cont dle deformassion elàstiche e dle reassion corispondente, e dla resistensa dij materiaj.

Le fòrse d'atrito al prim dëstach a son ëdcò na component amportanta dle fòrse che a garantisso l'echilibri. Se un sistema a l'ha nen da manca ed coste fòrse për esse stabil, antlora l'echilibri che a l'ha as peul dì ***stàbil***. Se anvece un sistema a stà ferm mersì a coste fòrse, antlora l'echilibri a ven ciamà ***làbil***. Na qualonque ramassa pogià a 'n mur a stà sù mersì a l'atrito e donca al'é an echilibri làbil.

Për l'echilibri, l'atrito a l'è na fòrsa bin amportanta. A basta pensé che un ciò ò na vis a fan so mesté mersì a l'atrito.

I vëddroma peui che 'l concét d'echilibri a peul esse estèis a còrp e sistema an moviment, con n'estension dël concét ëd fòrsa. Cost a l'é 'l prinsìpi ëd d'Alembert, che oltra a esse amportant për la stàtica, i vëddroma che a buta 'dcò le base për na formulassion analìtica dla dinàmica che a l'é motobin pì potenta 'd cola vetorial ch'i l'oma vist fin-a sì.

Sòn però a vnirà dòp. Adéss i comensoma a vëdde la Stàtica clàssica.

Pàgina lassà bianca ëd propòsit

ECHILIBRI D'UN PONT MATERIAL

Ancaminoma a vëdde le condission d'echilibri, an general, për un pont material. Ste considerassion a servo coma base për l'ëstudi ëd sistema reaj.

Pont material lìber

Un pont lìber, për esse an echilibri, a ciama che a sia zero l'arzultant ëd tute le fòrse che a agisso an sël pont. Se ël pont a l'ha na massa e as treuva ant un camp gravitassional che a l'ha un potensial *U*, antlora, ant un sistema ëd riferiment cartesian, a venta che a sio sodisfàite le condission:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

Sòn a corispond a ciamé che le component dle fòrse arlong ij tre ass coordinà a sio zero. Ma le stesse condission a son ëdcò cole che a diso che ant ël pont considerà la fonsion *U(x, y, z)* a l'ha un minim ò un massim.

Se pijoma com arferiment ël camp gravitassional terestr[1], ant lë spassi ëd nòstra esperiensa, i podoma dì che se l'ùnica fòrsa che a agiss a l'é cola dël camp, l'echilibri a-i é nen. Se anvece an sël pont a agisso ëdcò d'àutre fòrse a venta che coste a compenso con precision la fòrsa pèis che a riva dal camp gravitassional.

Pont material vincolà

Se anvece ël pont a l'é vincolà, antlora i podoma vëdde se ste condission a peulo esse verificà. An efét, an tuti ij pont andova as peul trové nòstr pont material a-i é na fòrsa ëd reassion vincolar, che as adission-a a le fòrse dël camp.

I consideroma un pont vincolà a nen traversé na surfassa qualonque e un pont vincolà a sté an s'na lìnia qualonque[2]. I tnima present la definission d'atrito e d'atrito al prim dëstach che i l'oma dàit ant la part antrodutiva.

Arcordoma che ël coeficent d'atrito *f* a l'é ël rapòrt fra ël pèis ***P*** dël còrp e la fòrsa orisontal ëd trassion ***T*** che a-i và për bogelo su un pian orisontal. Sto coeficent a stabiliss la duvertura α dël "*còno d'atrito*" e a dipénd mach dal tipo dle surfasse afacià. An efét la trassion lìmit $\boldsymbol{T_{lim}}$ a l'é proporsional al pèis dël còrp, e donca 'l rapòrt fra trassion e reassion normal dla surfassa a dipend nen dla pèis.

Pont vincolà a nen passé na surfassa (con atrito)

Consideroma un pont P pogià an s'na surfassa. Se an sël pont a agiss na fòrsa total **F**, che a comprend ëdcò sò pèis, për nen che ël pont as bogia a venta prima ëd tut che la fòrsa a sia direta vers la surfassa e nen da l'àutra part. A sta mira la fòrsa a peul esse scomponùa ant la component normal a la surfassa an col pont e la component tangent a la surfassa. A l'é natural che parlé d'atrito për un pont teòrich a l'è n'astrassion, che però a resta bastansa intuitiva.

---

[1] Sensa da manca ëd precisélo sempe, i consideroma un camp vertical vers ël bass, che i consideroma ël vers negativ dl'ass z ëd nòstr riferiment cartesian.

[2] As dovrìa ëdcò consideré un pont vincolà a sté an s'na surfassa, ma coma cas pràtich a l'ha nen vàire amportansa. Ëd sòlit, peui, a peul esse arportà al cas ëd pont vincolà a sté an s'na linea.

An figura 1 i l'oma rapresentà la trassa $\sigma\sigma$ ëd na surfassa pian-a anclinà, la fòrsa ativa ***F*** total che a agiss an sël pont e soa scomposission an component. La fòrsa total, an figura, a l'é nen vertical përchè i suponoma che a-i sio ëdcò d'àutre fòrse esterne aplicà, an manera ëd traté sto cas un pòch pì an general.

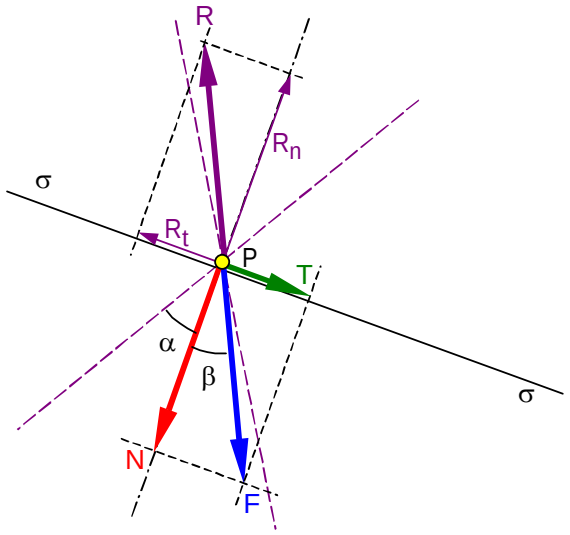

Figura 1 – Echilibri d'un pont an s'na surfassa con atrito

An figura l'àngol α (che a l'ha sò simetrich rispét a la normal) a l'ha coma tangent ël rapòrt limit *f*, mentre l'àngol β a l'ha coma tangent ël rapòrt tra la component dla fòrsa normal a la surfassa ***N*** e la component ***T*** che a tira a fé sghijé ël pont.

Se $\beta \leq \alpha$, la component ***T*** a l'é pì cita dla fòrsa limit ëd trassion che a-i và për fé ancaminé ël moviment e ël pont a l'é an echilibri. Ma i l'oma dit che l'adission total dle fòrse che a agisso an sël pont a venta che a sia zero për podèj avèj l'echilibri. Son a veul dì che la reassion dël vincol ***R*** a venta che a sia ugual e contraria a la fòrsa total ativa ***F***.

An efét la reassion a peul esse modelà coma an figura. Na component R_n as opon a la component *N* dla fòrsa ***F*** e costa a l'é la reassion dël vincol sensa atrito. Na component R_t a l'é anvece originà da l'atrito e as opon a la trassion *T*. Donca le còse a van coma se l'atrito a anclinèissa la reassion për compensé la trassion. Sòn a val fin-a a cand fòrsa e reassion a stan andrinta al còno d'atrito, ëd duvertura α.

Reassion dël vincol sensa atrito

Se la surfassa a l'ha nen atrito, antlora soa reassion a l'ha nen component tangensiaj e as ësvilupa mach an diression normal a la surfassa. Për l'echilibri a venta che a sia $\boldsymbol{F = -R}$ e donca ëdcò la forsa total a venta che a sia normal a la surfassa.

Suponoma che la surfassa a l'abia equassion *f(x, y, z) = 0.* As dimostra (e sì i lo foma nen), che la normal a la surfassa ant un pont *P(x, y, z)* a l'ha ij cossen diretor rispetivament proporsionaj a le derivà parsiaj $\partial f/\partial x$; $\partial f/\partial y$; $\partial f/\partial z$.

Sensa gionté d'àutr disoma che ël ***gradient*** dla fonsion *f(x, y, z)* a l'é ël vetor che a l'ha l'espression, adission dle derivà parsiaj (vëdde la part an sij vetor):

$$grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{k}$$

Se antlora i consideroma na costant ëd proporsionalità λ, i podoma scrive che la reassion, che sensa atrito i l'oma vist che a l'é sempe normal a la surfassa, a val:

$$\vec{R} = \lambda \cdot grad\ f \qquad \text{e per l'echilibri} \qquad \vec{F} + \lambda \cdot grad\ f = 0$$

Se F_x, F_y, F_z a son le component dla fòrsa total as peulo scrive le corispondente tre eqassion scalar (equassion relative a le tre component):

$$F_x + \lambda \cdot \frac{\partial f}{dx} = 0 \quad ; \quad F_y + \lambda \cdot \frac{\partial f}{dy} = 0 \quad ; \quad F_z + \lambda \cdot \frac{\partial f}{dz} = 0$$

Se a son conossùe la fòrse an fonsion dla posission, coste equassion e cola ëd la surfassa a përmetto ëd trové ël ò ij pont d'echilibri e la reassion ***R*** an costi pont.

Pont vincolà a sté an sla surfassa (sensa atrito)

Se 'l pont *P* a l'é vincolà a sté an sla surfassa (e donca a peul nen lassé la surfassa da gnun-a dle doe part), i podoma semplifiché le còse. An efét, i podoma pensé a doi parameter q_1 e q_2 definì coma coordinà curvilìnie an sla surfassa che a përmëtto 'd definì la posission dël pont *P* an sla surfassa, e donca a sarà $P = P(q_1, q_2)$. Për avèj l'echilibri a basta che la fòrsa arzultanta ***F*** a sia normal a la surfassa, e donca normal ai doi vetor $\frac{\partial P}{\partial q_1}$ e $\frac{\partial P}{\partial q_2}$, che a son tangent a la surfassa. Se donca i ciamoma Q_1 e Q_2 le component dla fòrsa ***F*** second le lìnie coordinà che a passo da *P* an sla surfassa, a venta che coste a sio zero. Vis-a-dì:

$$Q_1 = F \times \frac{\partial P}{\partial q_1} = F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} = 0$$

$$Q_2 = F \times \frac{\partial P}{\partial q_2} = F_x \frac{\partial x}{\partial q_2} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_2} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_2} = 0$$

Da coste as peulo trové le coordinà q_1 e q_2 dle posission d'echilibri. Se peui l'esptression difernsial $Q_1\, dq_1 + Q_2\, dq_2 = \vec{F} \times dP$ a l'é difernsial precis ëd na fonsion $U(q_1, q_2)$, antlora i l'avroma che $Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}$ e $Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}$ e parèj ij pont d'echilìbri a arzulto esse ij pont ëd màssim ò mìnim dla fonsion potensial *U*.

Echilibri d'un pont vincolà a sté an s'na lìnia

Suponoma che ël pont *P*, andova a peulo agì 'd fòrse, a sia vincolà a sté an s'na lìnia qualonque. Is arferima a figura 2.

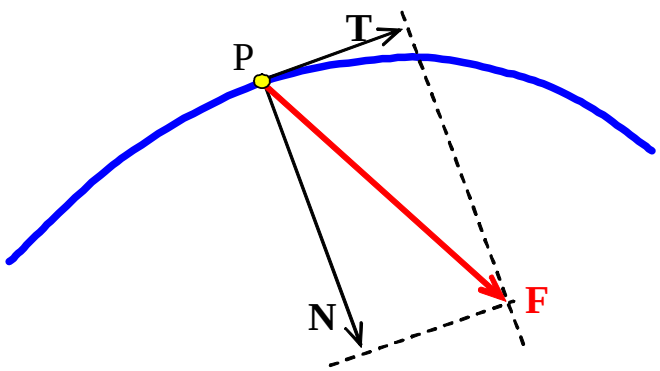

Figura 2 – Pont vincolà a na lìnia

Se i podoma pensé che la linea e ël pont a l'abio un dàit coeficent *f* d'atrito ressiproch, i podoma fé ëd considerassion dël tipo ëd prima.

Ant l'ëspassi la fòrsa arzultant aplicà al pont (comprèis ël pèis), a peul avèj na diression qualonque. Noi i la scomponoma ant la component tangent a la lìnia (diression che ël pont a peul bogesje), e l'àutra component a arzulta ant ël pian dla fòrsa e dla component tangent, normal a la lìnia an col pont.

Se tra le anfinìe surfasse che a passo për la linea i sernoma cola che a l'ha ant ël pont *P* la normal ant la stessa diression dla normal ***N*** dla fòrsa, për costa surfassa ël problema a l'é col che i l'oma già vist. Rispét a sta surfassa, la lìnia a podrìa gionté ma nen gavé ëd vincoj.

Sto dëscors a peul esse fàit për òngni diression dla fòrsa. Se lòn che i podoma consideré ël coeficent d'atrito a l'é l'istess për tute le diression, tnisend cont che për òngni diression dla fòrsa a-i sarà na surfassa ant le condission che i l'oma vist, as peul conclude che a-i é l'echilibri se la fòrsa total ***F*** a stà fòra da un còno con l'ass tangent a la lìnia an col pont e con na duvertura α tala che soa tangent a sia *1/f*. Atension che cost a l'è nen ël còno d'atrito vist prima.

La figura 3 a mostra lòn che i l'oma dit. A venta notè che sto còno a ven definì an manera contraria al còno d'atrito che i l'avio definì prima.

Se anvece i suponoma che la linea a l'àbia nen atrito, për l'echilibri a l'é necessari che la component tangensial ***T*** dla fòrsa a sia zero, përchè gnun-a reassion d'atrito a podrìa compenséla.

La fòrsa total aplicà ***F*** a venta donca che a sia normal a la linea, vist che la reassion vincolar a peul mach esse normal.

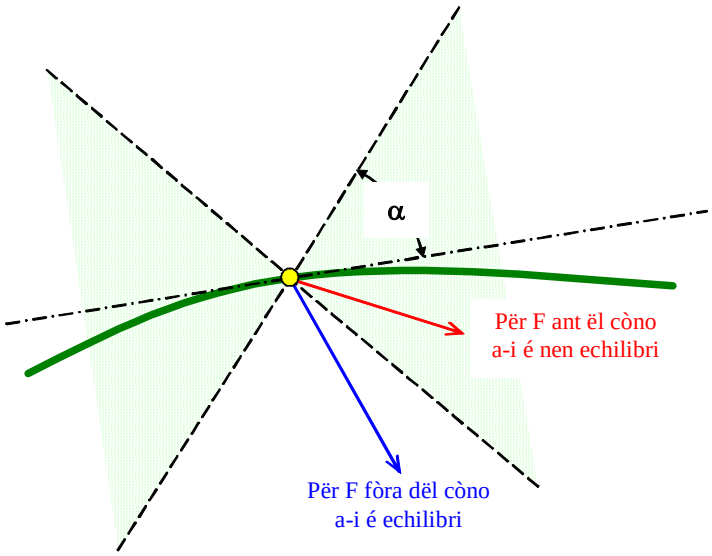

Figura 3 – Echilibri d'un pont an s'na linea

Na lìnia ant l'ëspassi a peul esse arpresentà an manera analìtica da l'intersession ëd doe surfasse $f(x, y, z) = 0$ e $g(x, y, z) = 0$. An figura 4 arportoma an manera sempia doi pian π e σ che a definisso na riga drita ***r***. An sla riga a-i é un pont *P* vincolà a sté an sla midema, con na fòrsa total ***F*** aplicà.

Arpijand lòn che i l'oma vist për na surfassa, i indicoma con λ e μ doi coeficent ëd proporsionalità e i suponoma dë scompon-e la reassion ***R*** ant le diression normaj ai doi pian. I podoma scrive:

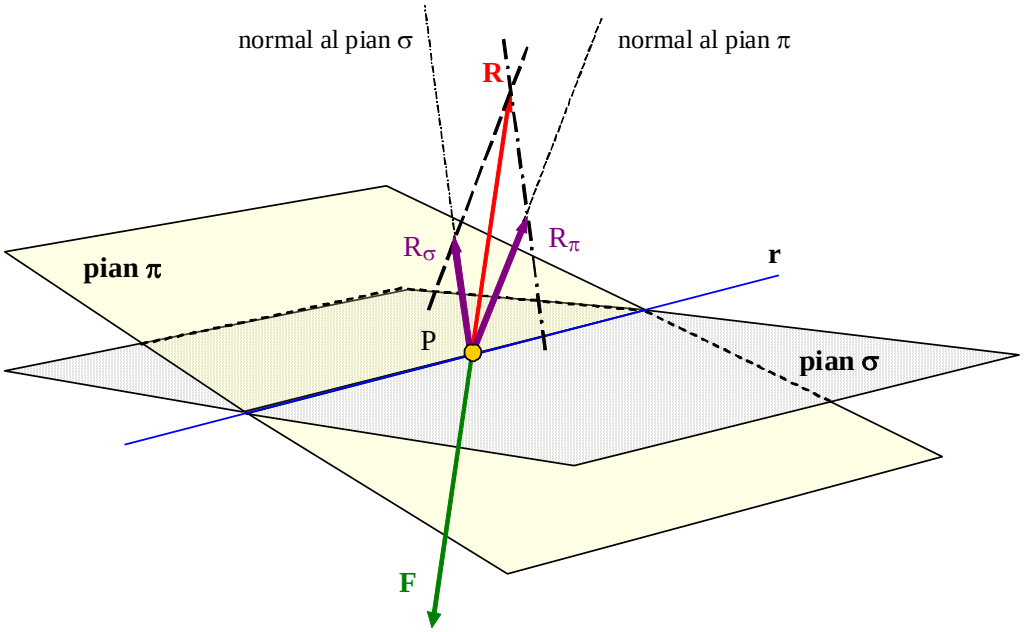

Figura 4 – Echilibri an s'na linea sensa atrito

$$\vec{R} = \lambda \cdot grad\ f + \mu \cdot grad\ g$$

e per l'echilibri :

$$\vec{F} + \lambda \cdot grad\ f + \mu \cdot grad\ g = 0$$

vis - a - dì :

$$F_x + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \quad ; \quad F_y + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad ; \quad F_z + \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial z} + \mu \cdot \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

Coste equassion, pì le doe equassion dle surfasse a përmëtto ëd trové x, y, z, λ, μ andova a esisto le condission d'echilibri.

Echilibri stabil, instabil, indiferent

An general a ven ciamà ***stabil*** un pont d'echilibri tal che se ël pont ò ël sistema ëd pont a ven spostà a na distansa infinitésima, che a sia compatibil con ij vincoj, la fòrsa total che a agiss a tira a arporté ël pont ò ël sistema ant la posission ëd partensa.

A ven anvece ciamà ***instabil*** un pont d'echilibri tal che se ël pont ò ël sistema ëd pont a ven spostà a na distansa infinitésima, che a sia compatibil con ij vincoj, la fòrsa total che a agiss a tira a slontané ëd pì ël pont ò ël sistema da la posission ëd partensa.

An fin a l'é ***indiferent*** un pont d'echilibri tal che n'ëspostament infinitésim, che a sia compatibil con ij vincoj, a pòrta ël pont ò sistema ant na posission che a l'é ancora d'echilibri. Is arferima a figura 5, andova i suponoma che la fòrsa total a sia dàita mach dal pèis del pont, che a agiss an diression vertical vers ël bass.

Ël prim cas a mostra l'echilibri stabil dël pont P vincolà a sté an sla linea **r**. Se ël pont a ven portà an P', la fòrsa aplicà **F** a tira a arporté ël pont an posission P fasend un travaj positiv dàit dal prodòt scalar $T = \vec{F} \times (P - P')$. Se ël pont a fussa an s'na surfassa, a sario possibij un nùmer anfinì d'ëspostament divers. L'echilibri a sarìa stabil se për tuti j'ëspostament possibij la condission ëd prima a fussa verificà (situassion ëd minim dël potensial). Se ëdcò mach për n'ëspostament la condission a l'é nen verificà, l'echilibri a l'é nen stabil.

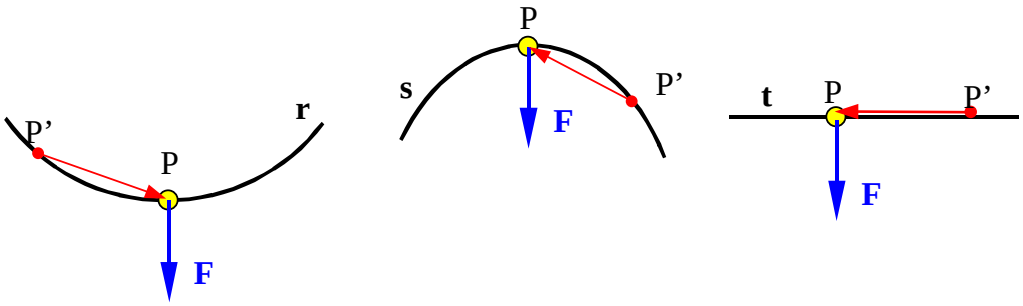

Figura 5 – Echilibri stabil, instabil, indiferent

Ant l'ëscond cas la posission P a l'é ancora na posission d'ëchilibri, ma se ël pont a ven spostà an P', ël travaj dla fòrsa, portand ël pont an P a dventa negativ, përchè la fòrsa a tirerìa a slontané ël pont ëd pì (situassion ëd massim dël potensial).

Ant ël ters cas l'espostament a l'é normal a la fòrsa e donca ël travaj a l'é zero (ël pont a l'è an s'na surfassa echipotensial).

An general i podoma dì che, ant un sistema 'd pont *P* solecità da fòrse ***F*** a-i é echilibri stàbil se për qualonque spostament infinitésim dij pont, che a sia compatibil con ij vìncoj, fin-a a posission *P'*, ël travaj total *T* che a ven fàit da le fòrse : $T = \sum \vec{F} \times (P - P')$ a l'é positiv.

LA COMPOSISSION DLE FÒRSE E DIJ MOMENT

Prima ëd continué con le condission d'echilibri dij sistema ëd fòrse e dij còrp materiaj, vëddoma coma as compon-o le fòrse d'un sistema rèid e ij moment dë ste fòrse rispét a un pont qualonque. Sì për sistema rèid i pensoma a un sistema ëd fòrse dont ij pont d'aplicassion a son an posission fisse tra 'd lor, mòdul, diression e vers a cambio nen. I l'oma già vist che le fòrse interne che ij pont as aplico l'un con l'àutr a l'han arzultant zero, e donca a son nen considerà.

Forse aplicà a un pont

Ël cas ëd doe ò pì fòrse aplicà a l'istess pont a l'é arpresentà an figura 6. Ant ësto cas la fòrsa arzultant a l'é nen d'àutr che l'adission vetorial dle fòrse, che a l'é aplicà sempe a l'istess pont.

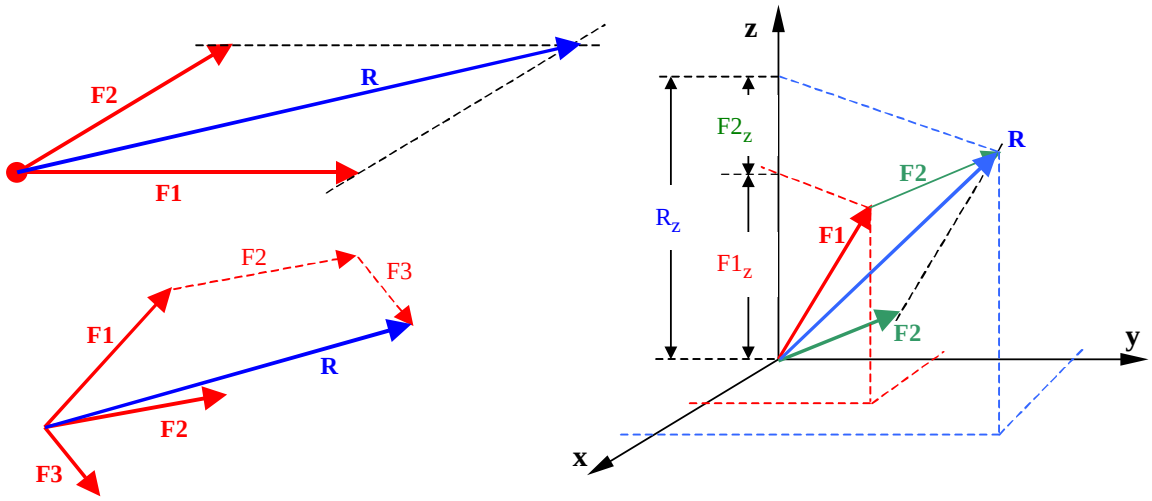

Figura 6 – Fòrse aplicà a l'istess pont relatv e moment

An figura a ven ëdcò mostrà coma l'adission dle fòrse a peussa esse fàita për component cand i soma ant un sistema cartesian d'arferiment (la figura a evidensia mach la component **z,** për motiv grafich).

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \left(F_{1x} + F_{2x}\right)\cdot \vec{i} + \left(F_{1y} + F_{2y}\right)\cdot \vec{j} + \left(F_{1z} + F_{2z}\right)\cdot \vec{k}$$

An figura 7 a ven mostrà che ël moment dl'arzultant **R** ëd doe ò pì fòrse rispét a un pont a l'é l'adission dij moment dle fòrse rispét a l'istess pont. Sòn i l'oma già vistlo parland ëd vetor (Moment arzultant d'un sistema ëd vetor).

Sòn a veul ëdcò dì che 'l moment ëd na fòrsa a l'é ugual a l'adission dij moment ëd soe component. Beleché a-i na sarìa nen da manca, sì i doma na cita dëmostrassion ëd sòn. Vardand la sconda part ëd figura 7, i l'oma na fòrsa ***F*** con soe component F_x e F_y. La fòrsa a fà n'àngol α con l'ass *x*.Vardoma ij moment rispét al pont *P*.

Rispét a sto pont, an figura a son arportà ij brass dla fòrsa e ëd soe component. Dal pont *A*, intersession dël brass dla component F_x con l'ass *x*, i trassoma la paralela al brass *b* dla fòrsa, che a ancontra la riga d'assion dal fòrsa ant ël pont *B*. Dal pont *A* i foma ëcò passé la paralela ***t*** a la forsa ***F***. Ij pont *H* e *K* a son, ant l'órdin, l'intersession dël brass dla fòrsa con l'ass *x* e l'intersession dël brass dla fòrsa con la riga ***t***.

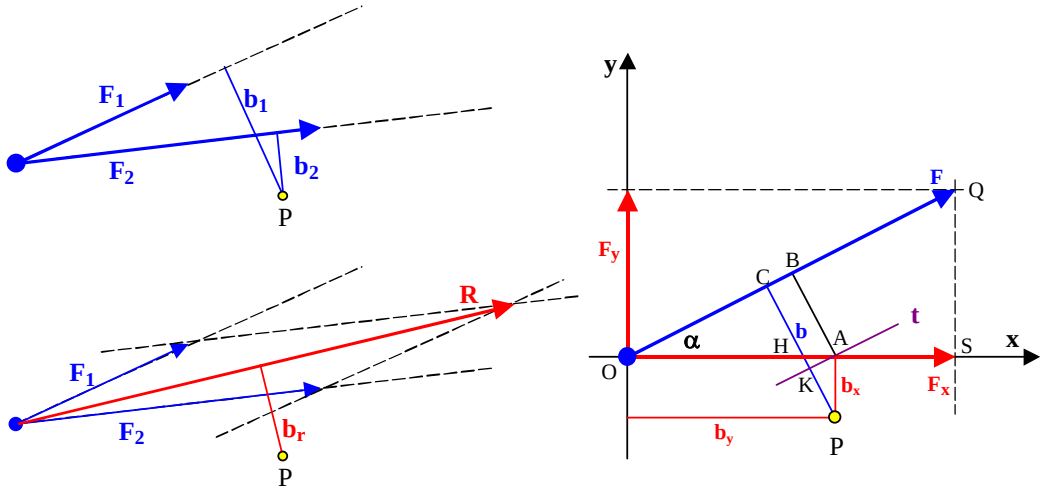

Figura 7 – Composission dij moment

I podoma scrive:

$$\vec{M}_x = \vec{F}_x \cdot b_x \quad ; \quad \vec{M}_y = \vec{F}_y \cdot b_y \quad ; \quad \vec{F}_x = \vec{F} \cdot \cos(\alpha) \quad ; \quad \vec{F}_y = \vec{F} \cdot \sin(\alpha)$$

$$\vec{M}_{tot} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{F} \cdot \left[b_x \cdot \cos(\alpha) + b_y \cdot sen(\alpha) \right]$$

Notoma che ij triangoj *OQS*, *OHC*, *PHA*, *PAK* a son tuti simij. I l'oma:

$$b = CP \quad ; \quad BA = CK \quad ; \quad b_y = OA \quad ; \quad b = CK + KP$$

$$\text{ma} \quad CK = BA = b_y \cdot sen(\alpha) \quad \text{e} \quad KP = b_x \cdot \cos(\alpha) \quad \text{antlora:}$$

$$b = b_x \cdot \cos(\alpha) + b_y \cdot sen(\alpha) \quad \text{e donca} \quad \vec{M}_{tot} = \vec{F} \cdot b$$

Fòrse complanar con pont d'aplicassion diferent

I comensoma a consideré doe fòrse complanar aplicà a doi pont diferent. A-i son doi cas për coste fòrse: ò soe righe d'assion a son concorente ant un pont opura a son paralele. Al contrari, se le righe d'assion ëd doe fòrse a son concorente ant un pont dl'ëspassi opura a son paralele, antlora a-i é un pian che a conten le fòrse che donca a son complanar.

I pijoma coma un prinsìpi che se a un sistema ëd fòrse i giontoma ò gavoma n'àutr sistema ëd fòrse che a l'abia n'arzultant zero e moment zero rispét a qualonque pont, ël sistema final a resta echivalent a col ëd partensa. Sta còsa a l'è bastansa intuitiva.

Disoma peui che l'efét ëd na fòrsa an s'un sistema as manten echuivalent se la fòrsa a ven fàita score longh soa riga d'assion. Sòn a l'é sens'àutr vèra për ël moment ëd la fòrsa rispét a un pont, përchè lòn che a conta a l'é, oltra che ël mòdul dla fòrsa, la distansa dël pont da la riga d'assion, e né l'un né l'àutr a cambio. Për esse pì precis disoma che fé score na fòrsa longh soa riga d'assion a cambia nen la riga d'assion dl'arzultant dël sistema, mentre ël pont d'aplicassion dl'arzultant a dipend ëdcò dal pont d'aplicassion dle fòrse ëd partensa. Sovens ant la stàtica lòn che a conta a l'è conosse intensità e riga d'assion dl'arzultant, pì che so pont d'aplicassion.

Fòrse concorente

Vardoma figura 8, andova doe fòrse $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$ a son aplicà, ant l'òrdin, ai pont P_1 e P_2. Soe righe d'assion a sio, ant l'òrdin, $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_2}$, che as ancontro ant ël pont O.

Fasend score le fòrse an soe righe d'assion e portandje con ël pont d'aplicassion ant *O*, i tornoma al cas ëd prima e i podoma trové l'arzultant $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ e soa riga d'assion $\boldsymbol{r_r}$. An figura l'arzultant trovà a l'é stàita disegnà spostà da soa riga d'assion për butéla an evidensa (donca mach motiv gràfich). Për trové ël pont d'aplicassion dl'arzultant, i podoma pensé che cost a staga an sla riga drita che a uniss P_1 e P_2. As treuva donca a la crosiera dë sta riga con la riga d'assion $\boldsymbol{r_r}$.

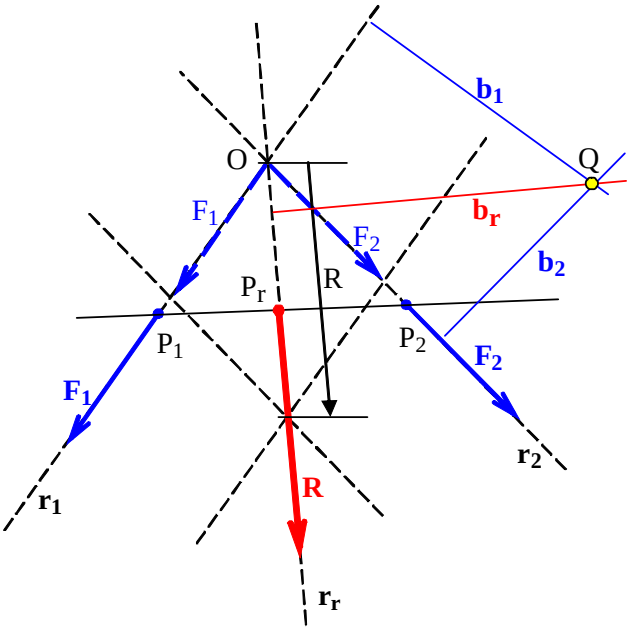

Figura 8 – Composission ëd fòrse concorente

Rispét a un pont qualonque *Q* ël moment total dël sistema a sarà l'adission dij moment dle doe fòrse $\vec{M}_{tot} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{F}_1 \cdot b_1 + \vec{F}_2 \cdot b_2$ che, coma i l'oma vist, a echival al moment dl'arzultant ***R*** rispét a l'istess pont. $\vec{M}_{tot} = \vec{M}_R = \vec{R} \cdot b_r$.

An efét né ël moment dle fòrse né ël moment dl'arzultant a cambio se fòrse ò arzultant a scoro long la riga d'assion. I arcordoma che ël moment, scrit coma i l'oma scrivùlo, a l'é positiv se fòrsa e brass a indico na rotassion an sens orari.

A l'é evident che ël moment total dël sistema a val zero rispét a tuti ij pont che as treuvo an sla riga d'assion dl'arzultant.

Për adess i consideroma ancora duverta la question dël pont d'aplicassion dla risultant, che i l'oma definì mach second bon sens.

Fòrse paralele concòrde

L'àutr cas ëd fòrse complanar a l'é col ëd fòrse paralele. Comensoma a vëdde ël cas ëd fòrse che a l'han nen mach l'istessa diression ma ëdcò l'istess vers.

I separoma ij cas për semplifiché la tratassion, e përchè ël cas ëd fòrse dëscòrde a pòrta a na sitoassion anteressanta che a ven evidensià a part. L'arferiment a l'é figura 9.

Dàite doe fòrse paralele concòrde $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$ aplicà ant ij pont P_1 e P_2, për trové-ne l'arzultant as peul arporté ël problema a col dël cas ëd prima, giusta adissionand doe fòrse ëd còmod arbitrarie, ma uguaj e contrarie ***K*** e ***–K*** e con l'istessa riga d'assion, coma a l'é mostrà an figura.

An costa manera né l'arzultant né ël moment arzultant a cambio, e as oten-o doe fòrse $\boldsymbol{\Phi_1}$ e $\boldsymbol{\Phi_2}$ concorente ant un pont *O*. As vëdd fàcil che l'arzultant a l'é paralela a le doe fòrse, dal moment che a l'é l'adission vetorial ëd doi vetor paralej.

Për vëdde quale che a son le distanse fra la riga d'assion dl'arzultant e cola dle fòrse i preferima vardë la part a drita dla figura. Da tut lòn che i l'oma vist fin-a sì i savoma che ël moment total $\vec{M}_{tot} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ rispét a un dàit pont *P* a l'é ugual al moment $\boldsymbol{M_R}$ dl'arzultant ***R*** rispét a l'istess pont: $\vec{M}_{tot} = \vec{M}_R$.

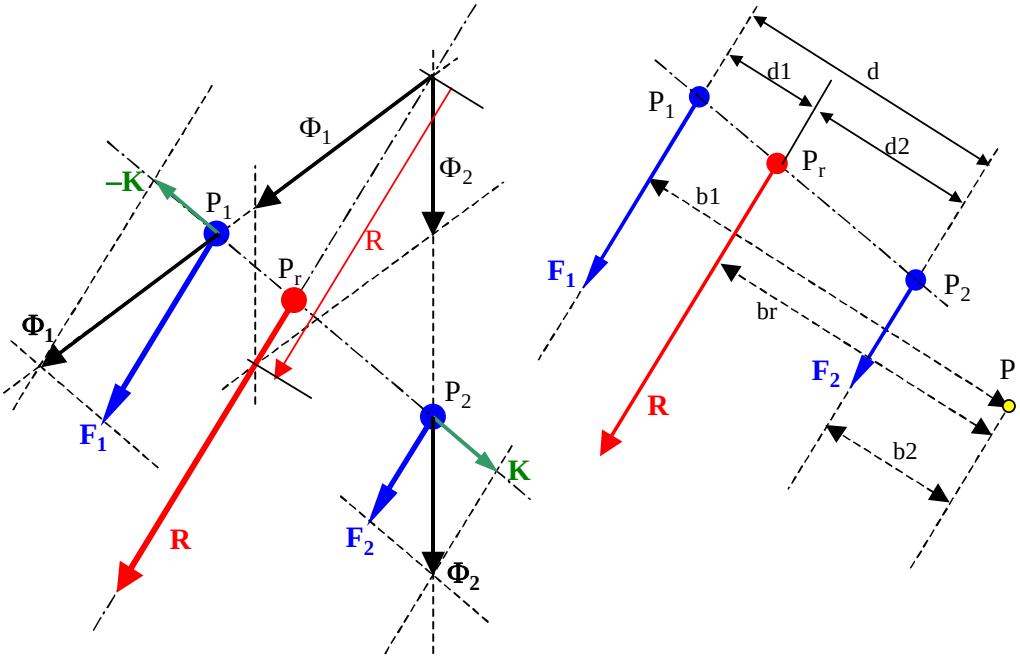

Figura 9 – Composission ëd fòrse paralele concòrde

I consideroma antlora ël pont *P*, e rispét a sto pont ij brass b_1, b_2, br ant l'órdin dle fòrse $\boldsymbol{F_1}$, $\boldsymbol{F_2}$ e arzultant ***R***. I consideroma peui la distansa *d* dle doe righe d'assion dle fòrse e le distanse d_1 e d_2 tra coste righe d'assion e la riga d'assion dl'arzultant.

$$\vec{M}_{tot} = \vec{F}_1 \cdot b_1 + \vec{F}_2 \cdot b_2 \quad ; \quad \vec{M}_R = \vec{R} \cdot b_r$$

$$\vec{F}_1 \cdot b_1 + \vec{F}_2 \cdot b_2 = \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) \cdot b_r$$

$$\text{ma i l'oma che: } b_r = b_2 + d_2 \quad ; \quad b_1 = b_2 + d \quad \text{e donca:}$$

$$\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) \cdot \left(b_2 + d_2\right) = \vec{F}_1 \cdot \left(b_2 + d\right) + \vec{F}_2 \cdot b_2 \quad \text{che as riduv a:}$$

$$\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) \cdot d_2 = \vec{F}_1 \cdot d \quad \text{da costa:} \quad d_2 = d \cdot \frac{\vec{F}_1}{\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)} = \left(d_1 + d_2\right) \cdot \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)$$

$$\text{che a veul dì:} \quad F_1 : F_2 = d_2 : d_1$$

A-i é na proporsionalità inversa fra le fòrse e soe distanse da l'arzultant. Sta proporsionalità as manten për le distanse dij pont d'aplicassion. An figura 10 vardoma d'arzolve la question che i l'oma lassà duverta an sël pont d'aplicassion dl'arzultant. I l'oma suponù, sensa dimostrelo, che sto pont a sia an sël segment che a anlìa ij pont d'aplicassion dle fòrse. Is arferima a figura 10.

I scomponoma le doe fòrse paralele an soe component rispét a un sistema d'ass cartesian ant ël pian che a jë conten tute e doe. I otnoma doi sistema ëd fòrse paralele, dont un orisontal e l'àutr vertical. Suponend che le fòrse a faso n'àngol α con la vertical, i l'avroma che:

$$Fx_1 = F_1 \cdot sen(\alpha) \;,\; Fx_2 = F_2 \cdot sen(\alpha) \;,\; Fy_1 = F_1 \cdot cos(\alpha) \;,\; Fy_2 = F_2 \cdot cos(\alpha)$$

e donca a valo le proporsion: $Fx_1 : F_1 = Fx_2 : F_2$ *e* $Fy_1 : F_1 = Fy_2 : F_2$

Le doe arzultant ***Rx*** e ***Ry*** a l'avran righe d'assion con distanse da le component che a saran proporsionaj inverse al valor dle component coma i l'oma vist. Ël pont ëd crosiera dle righe d'assion dle doe arzultant a sarà ël pont d'aplicassion dl'arzultant total dël sistema. Sto pont as treuva an sla riga drita che a passa për ij doi pont d'aplicassion dle fòrse. An efét le distanse dij pont d'aplicassion a venta che a rëspéto le stesse proporsionalità :

$$a_1 : d_1 = a_2 : d_2 \quad ; \quad b_1 : d_1 = b_2 : d_2$$

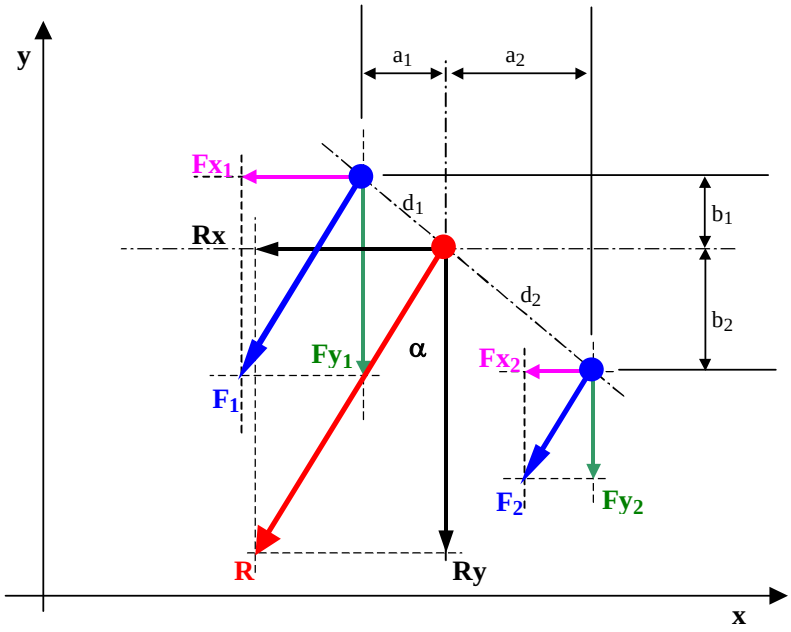

Figura 10 – Pont d'aplicassion d'R (fòrse paralele concorde)

Fòrse paralele dëscorde

Adess consideroma ël cas andova le doe fòrse paralele a l'han vers contrari, e për sòn is arferima a figura 11. Vëddoma d'apliché j'istessi critéri ëd prima e vardoma a lòn che a pòrto.

Prima ëd tut i provoma a gionté e gavé l'istessa fòrsa (i giontoma, vis-a-dì, coma prima un sistema con arzultant zero e moment zero).

I vëddoma sùbit, an costa manera, che le fòrse che as oten-o a ven-o concorente mach se a son diferente fra ëd lor le doe fòrse ëd partensa. Se a son uguaj, le fòrse che as oten-o a resto paralele (e sto cas i lo vëddroma dòp). Suponoma antlora che le fòrse a sio bastansa diferente da podèj fé un disegn nen tròp gròss.

As vëdd fàcil che la riga d'assion dl'arzultant a l'é sempe esterna a le doe fòrse e a stà da la part ëd la fòrsa pì gròssa. L'arzultant a l'ha mòdul ugual a la diferensa dij mòduj, a l'é paralela a le fòrse e a l'ha ël vers ëd la pì grossa. Vardand adess figura 12, calcoloma la posission ëd sò pont d'aplicassion.

Consideroma torna ël fàit che ël moment total $\vec{M}_{tot} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ rispét a un dàit pont P a l'é ugual al moment $\boldsymbol{M_R}$ dl'arzultant ***R*** rispét a l'istess pont: $\vec{M}_{tot} = \vec{M}_R$, fasend atension al segn dij moment.

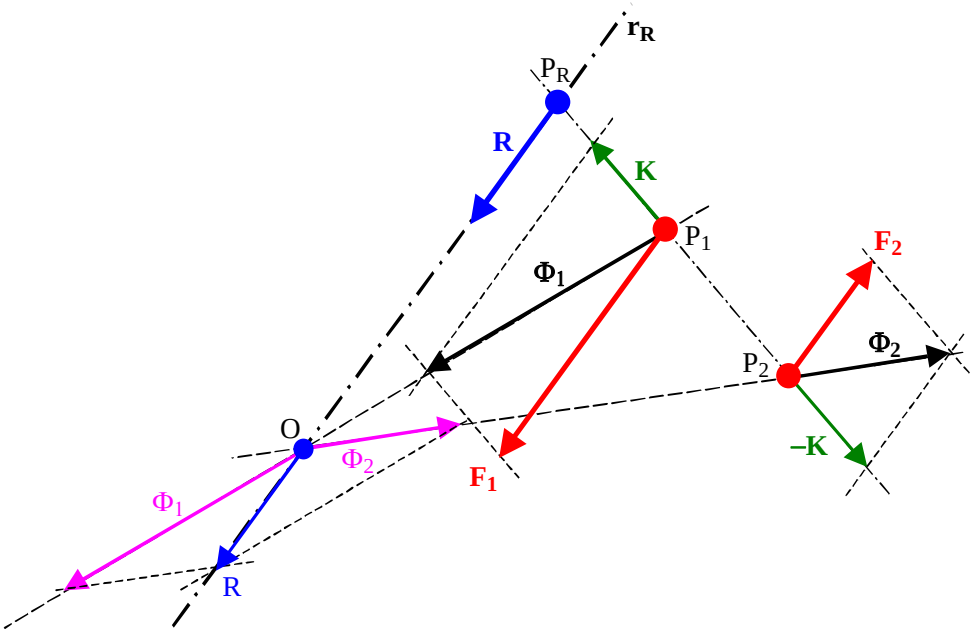

Figura 11 – Composission ëd fòrse paralele discòrde

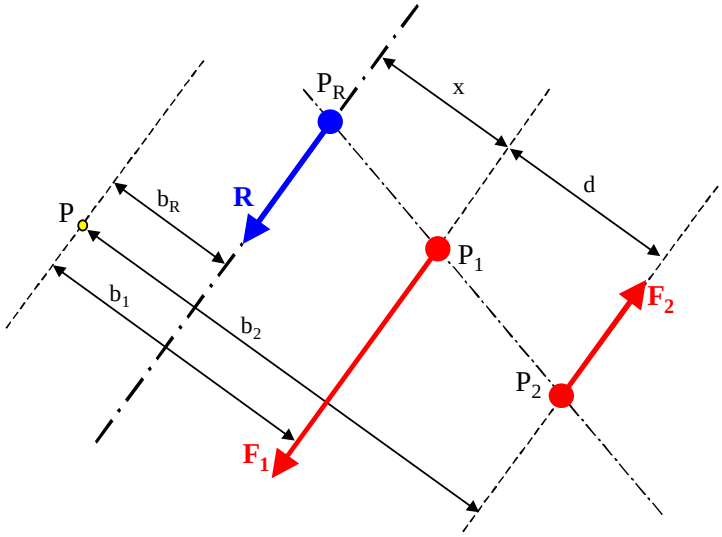

Figura 12 – Pont d'aplicassion d'R (forse paralele dëscòrde)

$\vec{R} = \vec{F}_2 + \vec{F}_1$; $|\vec{R}| = |\vec{F}_1| - |\vec{F}_2|$ $\vec{R}$ e $\vec{F}_1$ a son concòrd përchè $|\vec{F}_1| > |\vec{F}_2|$

$\vec{M}_1 = \vec{F}_1 \cdot b_1$ e a l'é positiv an nòstr esempi (rotassion oraria)

$\vec{M}_2 = \vec{F}_2 \cdot b_2$ e a l'é negativ an nòstr esempi (rotassion antioraria)

$\vec{M}_R = \vec{R} \cdot b_R = \vec{F}_1 \cdot b_1 + \vec{F}_2 \cdot b_2$ ma $b_2 = d + b_1$; $b_R = b_1 - x$

$$(F_1 - F_2) \cdot b_R = F_1 \cdot (b_R + x) - F_2 \cdot (d + x + b_R)$$

Svilupand e semplificand as oten $|x| = \dfrac{|F_2|}{(|F_1| - |F_2|)} \cdot d$

A valo sempe le considerassion an sle component che i l'oma fàit prima, e che a pòrto a conclude che ël pont d'aplicassion dla risultant a l'é alineà ai pont d'aplicassion dle fòrse.

La cobia ëd fòrse

Se, a parte da la situassion ëd prima, i foma chërse la fòrsa pì cita, man man che costa as avzin-a a l'àutra coma mòdul, l'arzultant a dventa sempe pì cita e sempe pì lontan da la fòrsa pì gròssa. Cand le doe fòrse a son istesse, as podrìa conclude che la risultant a l'é zero e a l'é aplicà a na distansa anfinìa. Sòn, però, a l'ha nen vaire sens da la mira fìsica. As peul pitòst conclude che n'arzultant vera a esist pì nen.

Se i vardoma lòn ch'a fà ël moment rispét a un pont qualonque ant le condission ëd prima (fòrse diverse che a tiro a vnì uguaj) e arferendse 'ncora a la figura 12, i l'oma:

$$\vec{M}_{tot}\ \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \left|\vec{F}_1\right| \cdot b_1 - \left|\vec{F}_2\right| \cdot (b_1 + d) = \left|\vec{F}_1\right| \cdot b_1 - \left|\vec{F}_2\right| \cdot b_1 - \left|\vec{F}_2\right| \cdot d = \left(\left|\vec{F}_1\right| - \left|\vec{F}_2\right|\right) \cdot b_1 - \left|\vec{F}_2\right| \cdot d$$

Se le doe fòrse a son istesse, ël valor dël moment a dipend pì nen da la posission dël pont d'arferiment, coma i l'oma già vist ant l'introdussion a la Stàtica.

Se le fòrse a son pì che doe

Un procediment che a l'é sempe possibil a l'é col ëd procede a pass, componend doe fòrse e peui l'arzultant con la tersa, e la neuva arzultant con la quarta, e via fòrt.

I notoma che ël procediment dë scompon-e le fòrse an soe component e serché la riga d'assion dl'arzultant dij doi sistema ëd component a peul esse aplicà an manera direta a pì che doe fòrse. An efét, dàit ël moment total e la fòrsa arzultant për ij doi sistema fàit, ant l'órdin, da le component *x* e *y*, as peul trové subit ij doi brass e donca le doe righe d'assion ortogonaj dle doe component dl'arzultant total.

A-i é ëdcò un procediment grafich, che i mostroma sì sota an figura 13, che as ës-ciama "metod dël ***polìgon funicolar***" che a përmëtt ëd trové ël valor e la riga d'assion dl'arzultant, ma nen sò pont d'aplicassion.

Dàit un sistema rèid ëd fòrse, disegnà an soe posission e ant na dàita scala, coste a ven-o traslà paralele da fianch, coma a ven indicà a drita dla figura, a formé na riga rota (adission dle fòrse coma i l'oma vist), che a produv la fòrsa arzultant **R** (ò méj, un vetor echipolent a la fòrsa arzultant), coma ël lat che a sara la riga rota, da l'origin dël prim vetor a la ponta ëd l'ultim. La fòrsa otnùa a l'ha donca ël valor (ant la scala sernùa) e la diression dl'arzultant. Componend le fòrse a venta ten-e cont ëd l'ordin che a ven-o butà an sucession (ëd sòlit a l'é col da snistra a drita rispét a coma a son disegnà).

Për trové la riga d'assion, adess, as deuvra ël procediment che indicoma sì sota:

As pija un pont arbitrari *P*, davsin a l'adisson che i l'oma costruì, che a sia nen alineà con l'arzultant. Da sto pont as tiro le righe drite ai pont: origin dël prim vetor, ponta dël prim e origin dl'ëscond, ponta dl'ëscond e origin dël ters, e via fòrt fin-a a la ponta ëd l'ultim.

An nòstr esempi costi a son ij segment *a, b, c, d, e*. Ël prim segment a l'é relativ mach a la prima fòrsa, l'ëscond a prima e sconda, ël ters a sconda e tersa, e via fòrt fin-a a l'ùltim che a l'é relativ mach a l'ultima fòrsa.

Adess, an sël grafich dle fòrse ëd partensa, as arpòrta na paralela al segment *a* relativ a la prima fòrsa *F1* a ancrosié la riga d'assion dla fòrsa *F1* ant un pont qualonque *Q*. Da sto pont as fà passé un segment paralél a *b*, che a l'é relativ a le fòrse *F1* e *F2*, e as manda a ancrosié la riga d'assion dla fòrsa *F2*, ant ël pont *R*. As contìnua parèj fin-a a l'ultim segment, relativ mach a l'ultima fòrsa, che ant ël cas dl'esempi a l'é paralél a *e* e a 'ncrosia la riga d'assion dla forsa *F4* ant ël pont *T*.

Slongand la prima e l'ùltima d'ëste righe (***a*** e ***e*** ant ël cas ëd nòstr esempi) as oten ël pont *U*, e da sì a passa la riga d'assion dl'arzultant, che a l'é paralela, natural, a l'arzultant trovà.

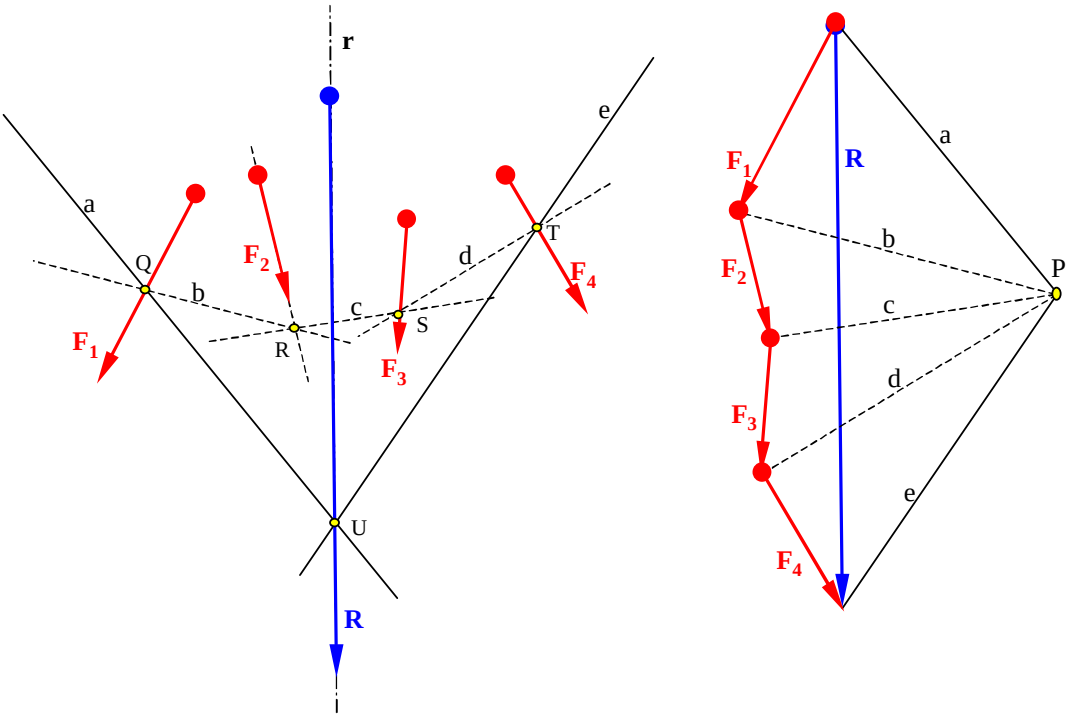

Figura 13 – Poligon funicolar

Fòrse con righe d'assion nen complanar

Ël cas pì general a l'é col d'un sistema ëd fòrse ant l'ëspassi, con righe d'assion che as ancrosio nen. Vist che a l'é sempe possibil compon-e le fòrse a doe a doe e che passé da doe a pì fòrse a l'é peui mach na question ëd matematica, sì is limitoma a consideré ël problema ëd doe fòrse.

I l'oma notà prima che mòdul, riga d'assion e moment dl'arzultant a cambio nen se le fòrse a ven-o fàite score longh soa riga d'assion. Adess i vëddoma cos a suced se na fòrsa a ven idealment ëspostà paralela a chila midema.

Traslassion paralela ëd na fòrsa

Se i vardoma figura 14 i vëddoma bin fàcil che sposté na fòrsa an manera paralela a veul dì gionté ò gavé un moment, mentre a l'é natural che l'arzultant a cambia nen sò valor. La riga d'assion dl'arzultant as ëspòsta ma as manten paralela, e sòn përchè le component dle fòrse second j'ass d'arferiment a manten-o sò valor e donca ëdcò le component dl'arzultant a manten-o so valor.

$$\vec{M}_{prima} = \vec{F} \cdot a \quad \textit{(negativ)}$$

$$c = a - b$$

$$\vec{M}_{dòp} = \vec{F} \cdot (a - b) = \vec{M}_{prima} - \vec{F} \cdot b$$

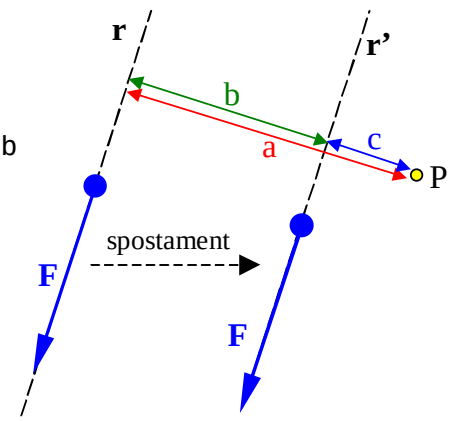

Figura 14 – Efet dla traslassion paralela ëd na fòrsa

Ant ël cas ëd figura i l'oma un moment negativ ëd mòdul gròss, che con l'ëspostament a dventa un moment ancora negativ ma con mòdul cit. Donca i l'oma giontà un moment positiv, dàit da la distansa *b* fra la neuva e la veja riga d'assion, moltiplicà për la fòrsa spostà. Ël moment che a ven giontà al sistema ëd partensa a l'é donca col dla fòrsa spostà e arferì a un pont dla veja riga d'assion. Se anvece is arferima a un pont an sla neuva riga d'assion, ël moment giontà a cambia segn.

Se, për fé ij calcoj, i l'oma spostà "*an manera virual*" na fòrsa, për manten-e ël sistema echivalent a col ëd partensa dovoma ëdcò peui giontè un moment contrari a col che i l'oma vist.

Composission ëd doe fòrse qualonque

Mòdul, diression e vers dl'arzultant $\boldsymbol{R}$ ëd fòrse qualonque a l'é ancora sempe l'adission vetorial dle fòrse ëd partensa, che a peul esse fàita për composission geometrica ò për component, coma i l'oma vist. Is arferima al problema general mostrà ant la figura 15, che a ilustra tuti ij passagi dël procediment.

I suponoma d'avèj doe fòrse $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$ ant lë spassi, su righe d'assion $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ che as crosio nen, aplicà a doi pont ëd coste righe.

I portoma la fòrsa $\boldsymbol{F_2}$ a avèj l'istess pont d'aplicassion ëd $\boldsymbol{F_1}$. Fasend sòn i foma n'ëspostament *d* e donca i giontoma un moment $\vec{M} = d \wedge \vec{F}_2$.

Për manten-e ël sistema echivalent a col ëd partensa a venta antlora considerè un moment contrari ëd valor $\vec{M} = \vec{F}_2 \wedge d$. I trovoma l'arzultant $\boldsymbol{R = F_1 + F_2}$. St'arzultant a l'ha na posission provisòria (a l'é nen cola vera) a rason dlë spostament che i l'oma fàit. I scomponoma antlora ël moment $\boldsymbol{M}$ ant la diression paralela a $\boldsymbol{R}$ e an cola normal.

La component $\boldsymbol{M_p}$, paralela a $\boldsymbol{R}$, che a cambia nen spostand $\boldsymbol{R}$, a l'é ël moment arzultant ver dël sistema, mentre la component normal $\boldsymbol{M_n}$, a riva dal fàit che la risultant $\boldsymbol{R}$ a l'é nen an soa posission vera, ma a l'é stàita spostà. Se antlora i dividoma sto moment për $\boldsymbol{R}$ i trovoma l'espostament *s* e donca la posission vera ëd $\boldsymbol{R}$, che a ven antlora spostà, elimenand la component $\boldsymbol{M_n}$.

La riga d'assion dl'arzultant $\boldsymbol{R}$ a ven ciamà ***ass sentral dël sistema***. Ël moment arzultant a l'é paralél a st'ass.

I l'oma donca che 'l sistema a echival a na fòrsa pì un moment che a tira a dé na rotassion an s'un pian normal a l'arzultant

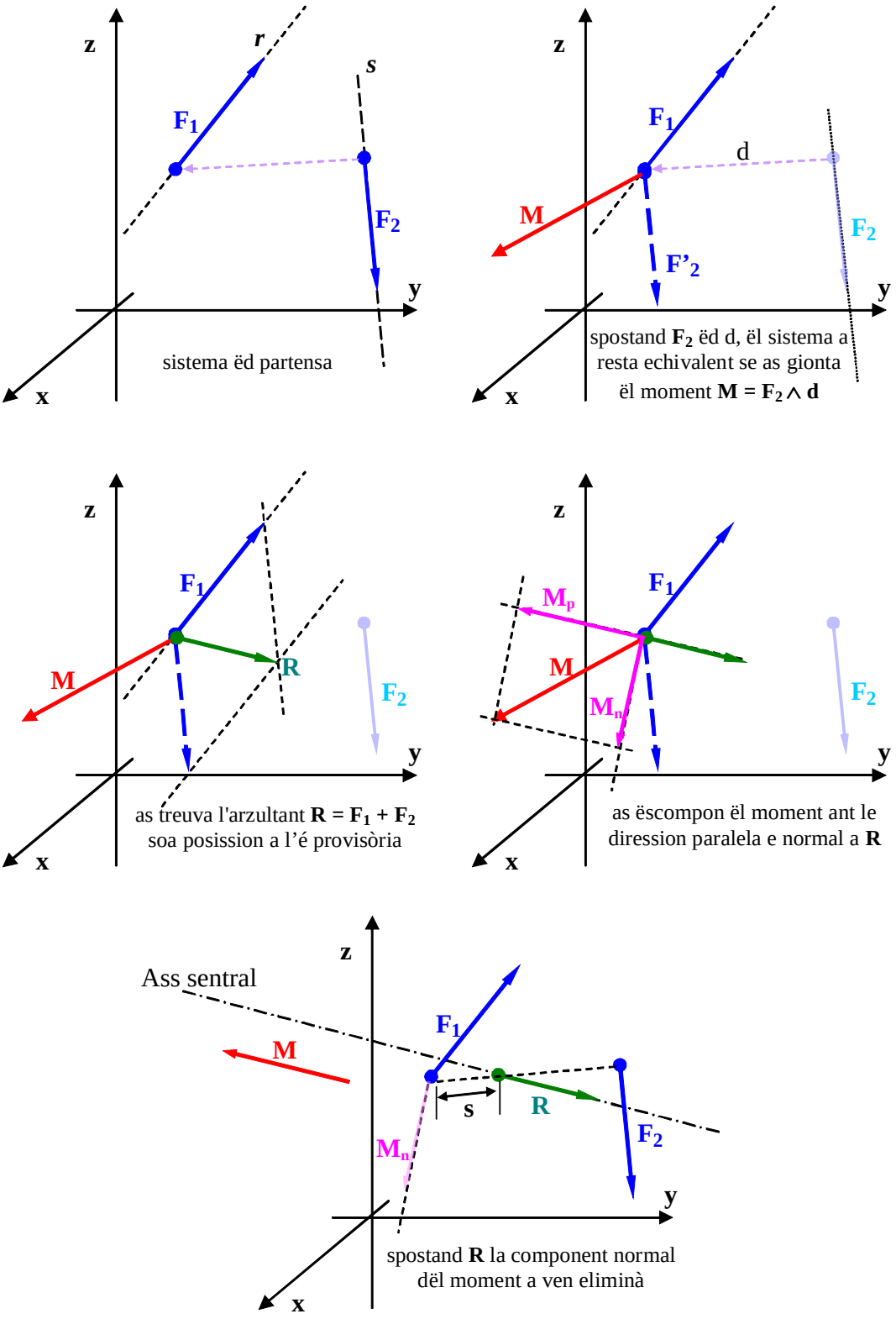

Figura 15 – Composission ëd doe fòrse qualonque

L'ECHILIBRI DIJ SISTEMA RÈID E DIJ CÒRP

I l'oma vist che un sistema rèid ëd fòrse a peul esse echivalent a mach na fòrsa arzultanta, a mach un moment arzultant, che a dipend nen dal pont d'arferiment (com aant ël cas ëd la cobia), opura a na fòrsa pì un moment (cas general). Se as ten cont ëd tute le fòrse che a interven-o, vincoj comprèis, un sistema a l'é an echilibri se a son zero tant la fòrsa arzultanta quant ël moment arzultant (ò moment ëd la cobia arzultanta).

As podrìa pensé che se a-i é na fòrsa arzultanta, rispet a un pont qualonque a-i é ëdcò un moment. A venta nen confonde ij doi concét. Ël moment dont as parla sì a l'é coma col ëd na cobia, che a peul nen esse compensà giontand na fòrsa al sistema, e a l'é indipendent da qualonque pont d'arferiment.

Se un sistema a l'ha mach na fòrsa arzultanta, as peul sempe trové na fòrsa echilibranta che a anula l'arzultant e a garantiss l'echilibri.

Se un sistema a l'ha mach ël moment ëd na cobia arzultant, a peul esse echilibrà mach da n'àutra cobia ugual e contrària.

Se un sistema a l'ha na fòrsa e na cobia coma arzultant, për echilibrelo a-i và na fòrsa e na cobia.

Ant la pràtica, ël pì dle vire, l'echilibri a ven garantì da le reassion vincolar, che andrinta a dàit limit, as adato a le fòrse da echilibré. St'adatament a ven ëd sòlit da fòrse elàstiche che a son provocà da cite deformassion proporsionaj a la fòrsa che a-i provoca. As riva al limit cand l'ogét che a buta ël vincol as ës-ciapa ò as ësnerva.

Equassion cardinaj dl'echilibri

Considerand un sistema rèid ëd pont materiaj, i l'oma già vist che le fòrse interne as anulo l'un-a con l'àutra. Donca i pensoma coma amportante për un sistema parèj mach le fòrse esterne (aplicà e vincolar, tnisend cont che ël pèis a l'é na fòrsa aplicà).

Foma sùbit doe posission bastansa elementar:

- 1) Aplicand a un pont doe fòrse uguaj e contrarie lë stat d'echilibri dël sistema a cambia nen.
- 2) Aplicand ai pont d'un sistema n'àutr sistema ëd fòrse an echilibri lë stat d'echilibri dël sistema a cambia nen.

Për un sistema rèid, la condission necessaria e suficenta përchè ël sistema a sia an echilibri a l'é che l'adission ëd tute le fòrse aplicà ai sò pont a sia zero e che l'adission ëd tuti ij moment rispét a qualonque senter ëd ridussion O a sia zero. Con le sòlite notassion:

$$\vec{R} = \sum_1^n \vec{F}_i = 0 \quad ; \quad \vec{M} = \sum_1^n (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0$$

Ant un sistema d'arferiment catresian ste equassion vetoriaj as trasformo ant le ses equassion scalar:

$$\sum_1^n Fx_i = 0 \quad ; \quad \sum_1^n Fy_i = 0 \quad ; \quad \sum_1^n Fz_i = 0$$

$$M_x = \sum_1^n (y_i \cdot Fz_i - z_i \cdot Fy_i) \quad ; \quad M_y = \sum_1^n (z_i \cdot Fx_i - x_i \cdot Fz_i) \quad ; \quad M_z = \sum_1^n (x_i \cdot Fy_i - y_i \cdot Fx_i)$$

che a son le ***equassion cardinaj dl'echilibri***.

Echilibri dij còrp vincolà

Ël problema a ven ampostà an fonsion dël tipo ëd vincol. An definitiva a venta che a sio sodisfàite le equassion dl'echilibri, che an vaire cas a peulo semplifichésse, che a ten-o cont ëdcò dle reassion vincolar.

Còrp vincolà a un pont

I suponoma che un còrp a sia lìber ëd viré an tute le manere antorna a un pont fiss. Ëd sòlit sta possibilità a l'é pì teòrica che pràtica dal moment che ël pont ëd vincol a venta che a sia tnù da quaicòs, che a lìmita pì ò manch ël moviment. Noi is contentoma dla situassion teòrica.

A le fòrse totaj ***R*** aplicà al còrp (a-i podrìa essje mach sò pèis) as gionta la reassion vincolar ***V*** e për l'echilibri a venta che a sia:

$$\vec{R} + \vec{V} = 0 \quad ; \quad M = 0 \quad \text{rispét a qualonque senter ëd ridussion}$$

Për ch'as verifico coste condission a l'é necessari che le doe fòrse ***R*** e ***V*** a sio uguaj e contrarie e che a l'abio l'istess brass rispét a qualonque pont. Sòn a veul dì che a deuvo esse alineà an sla stessa riga d'assion.

Se la fòrsa aplicà a l'é mach la fòrsa pèis, i l'avroma l'echilibri, com a l'é antuitiv, se 'l barissenter dël còrp a l'é alineà con ël pont fiss an sla vertical. Se 'l barissenter a stà dzora al pont fiss l'echilibri a sarà instàbil, se a sta sota l'echilibri a sarà stàbil.

Còrp vincola a viré antorna a n'ass

Podoma serne doi pont ëd l'ass coma vincoj dël tipo ëd prima. Adess a-i son doe reassion vincolar $\boldsymbol{V_1}$ e $\boldsymbol{V_2}$ che a saran aplicà dai vincoj che as treuvo ant ij pont O_1 e O_2.

I suponoma na situassion coma cola ilustrà an figura 16, d'un còrp grev che a peul viré antorna a n'ass anclinà ma che a peul nen score, e i suponoma ëdcò che mach un dij doi pont a buta un vincol a lë scoriment.

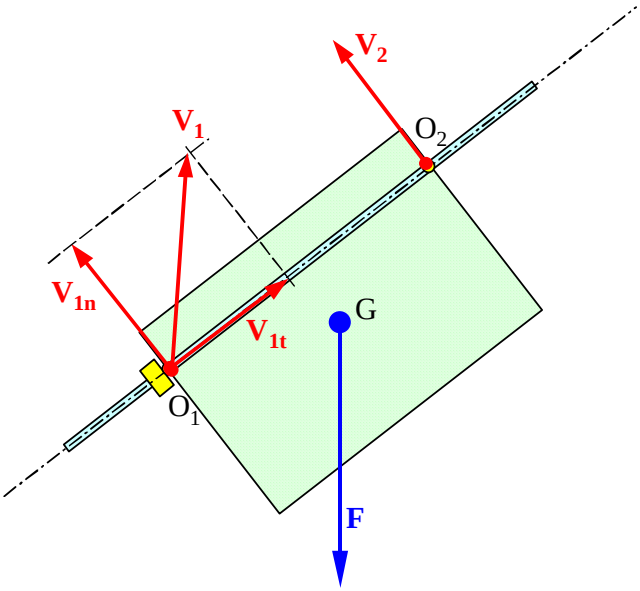

Figura 16 – Echilibri d'un còrp vincolà a n'ass

I scrivoma le condission për avèj l'echilibri, pijand coma senter ëd ridussion, an prinsipi, ël pont fiss O_1 (el moment ëd $\boldsymbol{V_1}$ a l'é donca zero rispét a sto pont) :

$$\vec{F} + \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = 0 \quad ; \quad (O_2 - O_1) \wedge \vec{V}_2 + (G - O_1) \wedge \vec{F} = 0$$

I l'oma vist che ël moment ëd na fòrsa rispét a n'ass a l'é dàit da la proiession an sl'ass dël moment rispet a un ëd sò pont. Ël moment ëd $\boldsymbol{V_2}$ rispét a l'ass, essend sta reassion aplicà a l'ass midem, a l'é zero. Donca për l'echilibri a venta che a sia zero la proiession an sl'ass dël moment $(G - O_1) \wedge \vec{F}$ dla fòrsa pèis. Sòn a càpita cand ël vetor dla fòrsa e l'ass a stan an sl'istess pian, përchè ant ësto cas ël vetor moment rispét al pont O_1 a l'é normal a l'ass. Ël barissenter dël còrp as pòrta ant ël pian vertical che a passa për l'ass.

Còrp scorèivol arlongh n'ass

Se 'l còrp a peul score sensa atrito arlongh l'ass, antlora a venta ten-e cont che le reassion vincolar a saran sempe normaj a l'ass e donca a saran zero tant l'arzultant ëd coste reassion coma 'l moment arzultant. Se donca 'l còrp a l'é an echilibri, a venta che l'arzultant dle fòrse ative a l'àbia component second l'ass che a val zero e la component second l'ass dël moment che a val zero.

Për un sòlid grév sòn a càpita cand l'ass a l'é orisontal, opura se a-i é n'àutra fòrsa esterna che as opon a la component dël pèis ant la diression dl'ass.

Còrp pogià

Un còrp a peul esse pogià su n'àutr còrp che a fà da vincol travers ëd pont opura travers na surfassa. An pràtica almanch un pòch d'artito a-i é sempe, ma sovens as ëstudia l'echilibri nen tnisend cont ëd l'atrito.

Sensa atrito la reassion dl'apògg a l'é sempe normal a la surfassa ant ël pont d'apògg. Con l'atrito la reassion, coma i l'oma vist, a peul esse direta ant un-a dle diression drinta al còno d'atrito.

As definiss perìmeter d'apògg ël perimeter dël pì cit poligon convess ch'a comprenda tuti ij pont ò le surfasse d'apògg, coma a mostra figura 17.

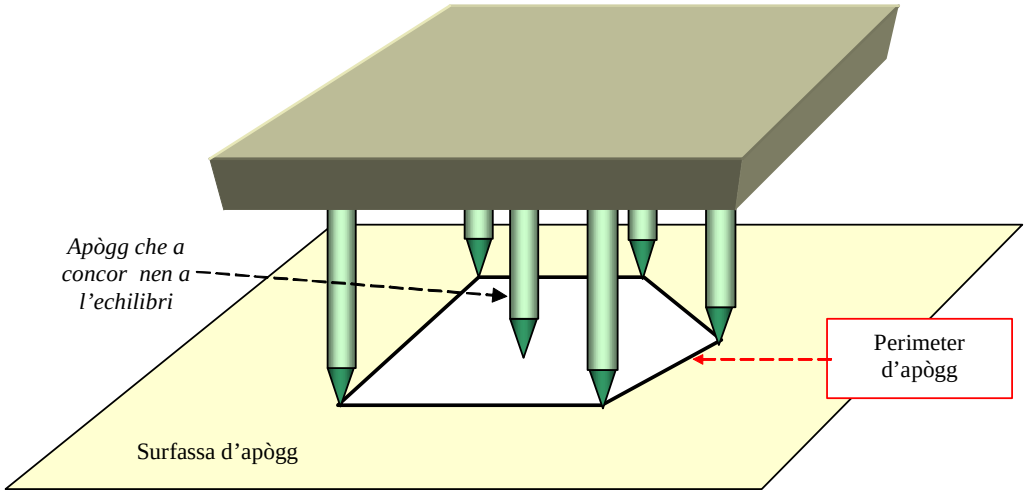

Figura 17 – Perìmeter d'apògg

Për l'echilibri a son sempe le equassion cardinaj che i l'oma vist a stabilì le condission. As deriva motobin fàcil che se un còrp a l'é pogià an s'un pian e a-i é nen atrito, për che a peussa essie echilibri a venta che l'arzultant $\boldsymbol{R}$ dle fòrse ative aplicà a sia normal al pian, dal moment che ël pian a l'é mach bon a reagì con fòrse normaj.

Ij pont d'apògg a produvo fòrse paralele e tute direte vers ël còrp. Sòn a veul dì che l'arzultant dle reassion vincolar a sarà normal al pian e a l'avrà coma riga d'assion na riga che as treuva ant la porsion d'ëspassi comprèisa fra le reassion e che a crosia, an sël pian d'apògg, un poligon dont ël perimeter a l'é ël perimeter d'apògg.

La condission për l'echilibri, antlora, a l'é cola che l'arzultant $\boldsymbol{R}$ dle fòrse aplicà a sia nen mach normal a l'apògg, ma ëdcò che soa riga d'assion a passa andrinta al perimeter d'apògg.

Se le fòrse aplicà a son mach dàite dai pèis, soa arzultant a l'é aplicà al barissenter. Donch a venta che la vertical calà dal barisenter a casca ant ël perimeter d'apògg.

An figura 17 a son disegnà ses apògg e ëd costi mach sinch a disegno ël perimeter d'apògg. An pràtica, se j'apògg a son pì che tre, coma pr'esempi un taulin con quatr gambe, e bin rèid, an su n'apògg rèid, a l'é bin dificil che l'echilibri a sia stabilì da tuti e quatr j'apògg. Tre gambe a reso ël pèis e la quarta a l'é nen carià. Variand la posission dël barisenter a peulo cambié le tre gambe solecità.

An efét, da na mira analìtica, as treuva che se j'apògg a son tre as peul calcolé le tre reassion, mentre se j'apògg a son pì che tre a-i son nen basta equassion për calcolé le variabij an geugh, a meno ëd fé d'ipòtesi an sl'elastissità dl'apògg.

Vardoma adess un còrp su n'apògg con atrito, andova l'atrito a l'é necessari për l'echilibri. Consideroma na scala pogià al mur e vardoma lòn che a càpita arferendse a figura 18.

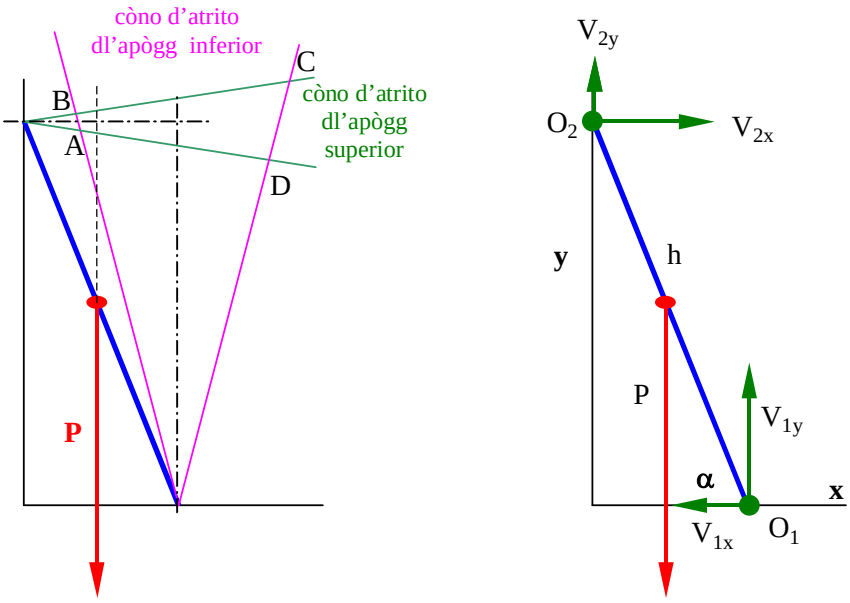

Figura 18 – Echilibri con atrito

Për anulé fòrse e moment totaj a venta che l'arzultant dle reassion a l'abia la stessa riga d'assion dl'arzultant dle reassion. Le doe reassion a venta che a l'abio righe d'assion che as ancontro sla riga d'assion dl'arzultant dle fòrse aplicà. A venta peui che le doe reassion a sio ant ël rispetiv còno d'atrito.

La prima part ëd figura a mostra ij doi còno d'atrito dij doi apògg e la part *ABCD* che a l'han an comun. Le condission sì dzora a son verificà se e mach se la riga d'assion dl'arzultant ***P*** a l'ha ëd pont an comun con la part an comun dij doi còni d'atrito. As vëdd ëdcò che se la scala a stà nen chila midema andrinta a un dij doi còno d'atrito, a-i son ëd posission për ël pèis an sla scala andova l'echilibri a-i é nen. An figura, se ël pèis a l'é an ponta, pì davzin al mur dël pont B, la scala a sghija.

Ant la sconda part ëd figura a-i é na scala, longa *h* e con pèis ***P***, che i suponoma a metà dla scala. Consideroma che ij doi pont d'apògg O_1 e O_2 a l'abio l'istess coeficent d'atrito *f*, e che l'àngol α fra scala e paviment a sia col minim prima che la scala a sghia.

Provoma a scrive le equassion dl'echilibri dë sto sistema, tnisend cont che la reassion al pont O_1 a l'é $\boldsymbol{V_1}$ con component V_{1x} e V_{1y}, e che la reassion al pont O_2 a l'é $\boldsymbol{V_2}$ con component V_{2x} e V_{2y}. La condission che l'àngol a sia ël minim a përmëtt ëd savèj coma as ëscompon-o le reassion, dal moment che i podoma scrive: $V_{1x} = -f \cdot V_{1y}$; $V_{2x} = f \cdot V_{2y}$. Donca:

$$\sum_i F_x = V_{1x} + V_{2x} = 0$$
$$\sum_i F_y = V_{1y} + V_{2y} - P = 0$$

La component dël moment che a anteressa a l'é cola normal al disegn:

$$M_z = \sum_i \left(x_i \cdot \Phi_{iy} - y_i \cdot \Phi_{ix}\right) = 0$$

andova con Φ i l'oma indicà tant le fòrse aplicà coma le reassion arcordand le relassion tra component dle reassion:

$$\sum_i F_x = -f \cdot V_{1y} + V_{2x} = 0$$
$$\sum_i F_y = V_{1y} + f \cdot V_{2x} - P = 0$$
$$M_z = V_{1y} \cdot h \cdot \cos(\alpha) - V_{2x} \cdot h \cdot sen(\alpha) = 0 - P \cdot \frac{h}{2} \cdot \cos(\alpha) = 0$$

An costa manera as peulo stabilì quale ch'a son le reassion cand α a l'é al limit e l'àngol α midem. As treuva:

$$V_{1x} = -\frac{f \cdot P}{1+f^2} \quad ; \quad V_{1y} = \frac{P}{1+f^2} \quad ; \quad V_{2y} = \frac{f \cdot P}{1+f^2} \quad ; \quad V_{2y} = \frac{f^2 \cdot P}{1+f^2} \quad ; \quad \tan(\alpha) = \frac{1-f^2}{2 \cdot f}$$

Echilibri ant un sistema nen rèid

I foma giusta n'esempi ëd problema andova la posission dle masse anteressà a l'echilibri a l'é nen ressiprocament costanta.

La figura 19 a mostra un bilansié che a peul bautié an sl'apògg. Un brass a l'ha na massa fissa an ponta con pèis F_2, l'àutr a l'ha na massa ëd pèis F_1 che a peul score sensa atrito e a l'é tnùa da na mòla con carteristiche conossùe.

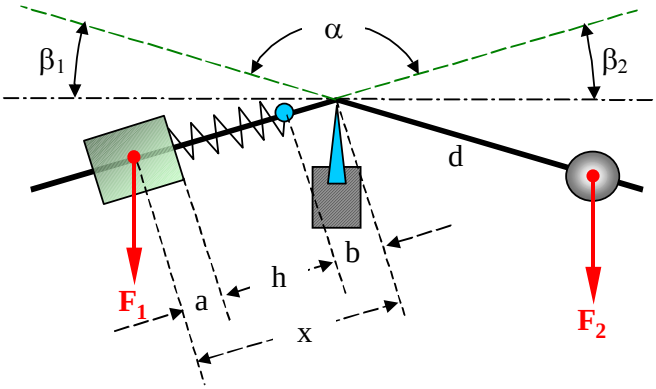

Figura 19 – Echilibri d'un sistema nen rèid

I dàit dël problema a son che: Le aste dël bilansié a l'han massa che a peul esse trascurà. La massa a snistra a peul score sensa atrito, la mòla, an posission ëd partensa, a l'é dëscarià (a aplica gnun-e fòrse). Për dëscrive lë slongament ëd la mòla dovroma la manera $\Delta h = k \cdot F$ che i suponoma a vada bin. L'àngol fàit da le aste a val α e ij doi àngoj $\beta 1$ e $\beta 2$, an partensa, a son istess (bilansiè "orisontal"). Lassand lìber ël bilansiè an coste condission, i sercoma ël pont d'echilibri. Sempe arferendse a la figura, i dàit numérich a son:

$F_1 = 20$ [N] ; $F_2 = 8$ [N] ; $k = 0{,}5$ [cm/N]

$d = 30$ [cm] ; $a = b = 5$ [cm] ; $h = 10 \div 30$ [cm] (da min a max).

$\alpha = 3\pi/4$; $\beta_1 = \beta_2 = \pi/8$ *(an partensa).*

Lòn che an anteressa a l'é se a esist, e an che posission, n'ugualiansa tra ij mòduj dij moment dij doi brass, che a ven-o calcolà rispét al pont d'apògg. Ant ògni posission la mòla a ven carià da na dàita fòrsa, che a pròvoca në slongament e donca na variassion ëd posission dla fòrsa $\boldsymbol{F_1}$ an sl'asta. Ël moment dë sta fòrsa as opon al moment dàit da l'àutra asta, ël brass dla fòrsa $\boldsymbol{F_2}$ a l'é fonsion dla posission dël bilansié. I calcoloma ij moment coma *(Fòrsa x brass)* e donca positiv an sens orari.

An partensa :

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{\pi}{8} = 22{,}5° \quad ; \quad M_2 = F_2 \cdot d \cdot sen\left(\frac{\pi}{2} + \beta_1\right) = 221{,}731 \quad [N \cdot cm]$$

La fòrsa che a tira la mòla a l'é : $F_{1T} = F_1 \cdot sen(\beta_2) = 7{,}653 \quad [N]$

$$x = h + a + b = 10 + 5 + 5 + \Delta h = 20 + k \cdot F_{1T} = 23.872 \quad [cm]$$

$$M_1 = -F_1 \cdot x \cdot sen\left(\frac{\pi}{2} + \beta_2\right) = -440{,}266 \quad [N \cdot cm] \quad ; \quad M_{tot} = M_1 + M_2 = -218{,}535 \quad [N \cdot cm]$$

An coste condission ël bilansié a vira an sens antiorari. Sòn a fà chërse la fòrsa che a tira la mòla e a slontan-a ël pèis, ma la rotassion a fà scursé ël brass dla fòrsa $\boldsymbol{F_1}$.

Për l'echilibri a venta che a sia :

$$M_1 + M_2 = 0 \quad ; \quad M_1 = -M_2$$

notoma che $\beta_1 = \frac{\pi}{4} - \beta_2$ e che $x = 20 + k \cdot F_{1T} = 20 + \frac{20 \cdot sen(\beta_2)}{2}$

$$240 \cdot sen\left(\frac{3 \cdot \pi}{4} - \beta_2\right) = 20 \cdot \left(20 + \frac{20 \cdot sen(\beta_2)}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{\pi}{2} + \beta_2\right) \quad \rightarrow \quad \text{condission d'echilibri}$$

L'equassion sì dzora a përmëtt ëd trové β_2. Anvece ëd fé calcoj e passagi i l'oma fài arzolve l'equassion dal calcolator. An fonsion ëd β_2 i l'oma calcolà *–M1* e *M2* e i l'oma fàit ij grafich, sercand ël pont andova a son uguaj. I l'oma trovà $\boldsymbol{\beta_2} = 68°$. coma a mostra figura 20.

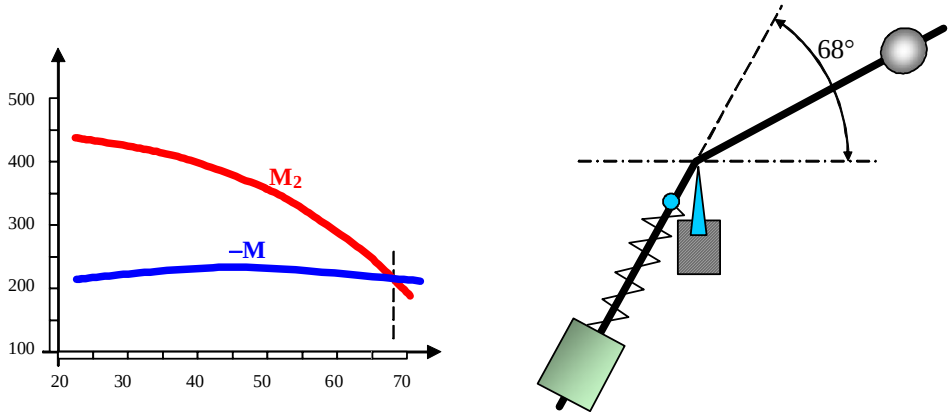

Figura 20 – Echilibri d'un sistema nen rèid

Fil solecità da na fòrsa contìnua

Is arferima a figura 21, andova a l'é arpresentà un fil nen estendìbil ma d'autut flessìbil, che a sia solecità ai sò estrem da doe fòrse $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$, e ant ij pond arlong soa longhëssa da na fòrsa che a càmbia con continuità con la posission. Cand ël fil a l'é an echilibri a dëscriv na "***curva funicolar***".

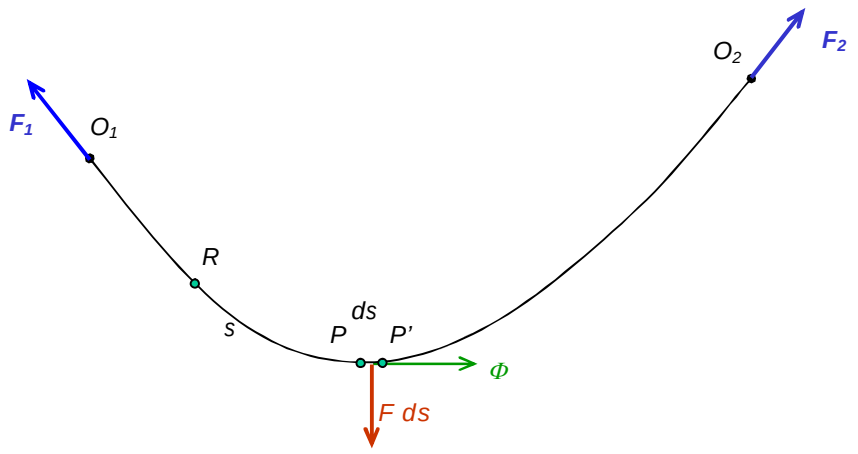

Figura 21 - Curva funicolar

Ël fil a l'é solecità a l'estrem O_1 da la fòrsa $\boldsymbol{F_1}$ e a l'estrem O_2 da la fòrsa $\boldsymbol{F_2}$. I consideroma un pont P qualonque dël fil e i ciamoma con s la longhëssa dl'arch ëd curva da O_1 che i pijoma com orìgin, fin-a a P. I podoma donca consideré $P = P(s)$. I consideroma peui n'increment infinitésim ds ëd nòstr arch s che an pòrta da $P(s)$ a $P'(s + ds)$.

Se $\boldsymbol{F}$ a l'é la fòrsa për unità 'd longhëssa che a agiss an sël fil (a pordìa esse sò pèis) antlora an sl'element ds a-i sarà na fòrsa $\boldsymbol{F} \cdot ds$. Sta fòrsa, rispét a un senter ëd ridussion O qualonque a l'avrà un moment $(P - O) \wedge \vec{F} \cdot ds$.

Integrand an sla curva da O_1 fin-a a P, i l'avroma l'arzultant $\boldsymbol{A_P}$ e 'l moment arzultant $\boldsymbol{M_P}$ an sël tràit O_1P, vis-a-dì $\vec{A}_P = \int_0^s \vec{F}\, ds$; $\vec{M}_P = \int_0^s (R - O) \wedge \vec{F}\, ds$ andova R a l'é 'l pont variàbil (che a corispond a l'arch s) d'integrassion. An sël pont P a agiss ëdcò l'assion dël tràit da P a O_2 e costa assion, che a l'é nen conossùa adéss, i la ciamoma $\boldsymbol{\Phi}$.

Antlora l'adission vetorial ëd tute le fòrse che a agisso an sël tràit O_1P a l'é: $\vec{F}_1 + \int_0^s \vec{F}\, ds + \vec{\Phi}$

e 'l moment rispét a O ëd coste a l'é: $(O_1 - O) \wedge \vec{F}_1 + \int_0^s (R - O) \wedge \vec{F}\, ds + (P - O) \wedge \vec{\Phi}$, e a venta noté che la fòrsa $\boldsymbol{\Phi}$ a dipend da la posission s.

Se sta part ëd fil a l'é an echilibri, antlora a venta ch'a sio verificà le condission sì sota :

$$\vec{F}_1 + \int_0^s \vec{F}\, ds + \vec{\Phi} = 0 \quad ; \quad (O_1 - O) \wedge \vec{F}_1 + \int_0^s (R - O) \wedge \vec{F}\, ds + (P - O) \wedge \vec{\Phi} = 0$$

Ste relassion a son vere për qualonque arch s, a parte da zero fin-a a la longhëssa l dël fil. Se i derivoma rispét a s coste doe condission i otnoma, ant l'órdin:

$$\vec{F} + \frac{d\vec{\Phi}}{ds} = 0 \quad ; \quad (P - O) \wedge \vec{F} + (P - O) \wedge \frac{d\vec{\Phi}}{ds} + \frac{dP}{ds} \wedge \vec{\Phi} = 0$$

Ma l'adission dij prim doi termo dla sconda equassion a fà zero, com as deduv da la prima equassion, e donca la condission as arduv a $\frac{dP}{ds} \wedge \vec{\Phi} = 0$.

Ma i notoma che $\frac{dP}{ds}$ a l'é 'l versor $\boldsymbol{\tau}$ tangent a curva ant ël pont *P*, e donca l'ultima relassion an dis che l'assion $\boldsymbol{\Phi}$ che 'l tràit PO_2 a esèrcita an sël tràit O_1P, a l'é tangent a la curva funicolar, e a l'é na tension.

L'equassion $\vec{F} + \frac{d\vec{\Phi}}{ds} = 0$ a ven ciamà "***equassion andefinìa dl'echilibri*** ". Le equassion ai lìmit ant ij pont O_1 e O_2 (vis-a-dì con $s = 0$ e $s = l$) a son : $\vec{F}_1 + \vec{\Phi}(0) = 0$; $\vec{F}_2 - \vec{\Phi}(l) = 0$.

Se adéss i consideroma na trien-a d'ass cartesian ortogonaj *Oxyz*, i notoma che ij cossen diretor dla tangent a la curva ant un pont *P* a son, ant l'órdin : *dx/ds*, *dy/ds*, *dz/ds* e che donca le component dla tension $\boldsymbol{\Phi}$ a saran dàite da :

$$\Phi\frac{dx}{ds} \quad ; \quad \Phi\frac{dy}{ds} \quad ; \quad \Phi\frac{dz}{ds}$$

Se i proietoma l'equassion andefinìa dl'echilìbri an sj'ass i l'avroma (notand con F_x, F_y, F_z le component ëd $\boldsymbol{F}$) :

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\left(\Phi\frac{dx}{ds}\right) + F_x = 0 \\ \frac{d}{ds}\left(\Phi\frac{dy}{ds}\right) + F_y = 0 \\ \frac{d}{ds}\left(\Phi\frac{dz}{ds}\right) + F_z = 0 \\ \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

L'ùltima equassion a l'é relativa ai cossen diretor dla tangent. Coste equassion diferensiaj, ansema a lòn ch'i loma vist prima, a përmëtto 'd trové le incògnite ëd nòstr problema, mentre che le costant arbitràrie d'integrassion a përmëtto 'd fissé le condission al contorn.

I andoma nen pì ant l'ancreus, ma i vardoma jë svilup ant n'aplicassion ëd costi arzultà ant ël capìtol sì sota.

Caden-aria omogénia

A l'é la configurassion ch'a pija un fil grév sostnù a-i doi estrem e soget mach a la fòrsa 'd gravità. A podrìa esse, pr'esempi, un fil dl'àuta tension fra doi traliss, suponend che l'atach a j'isolator a sio fiss. La curva, an sto cas, as ës-ciama "*caden-aria omogénia* " e (i lo dimostroma nen, ma a l'é pitòst antuitiv) a stà an sël pian vertical che a passa për ij doi pont d'atach ai doi estrem.

La figura 22 a mostra ij dàit ëd partensa, andova i consideroma 'l problema an sël pian dla curva, con l'ass *x* orisontal e l'ass *y* orientà vers l'àut. I l'oma ij doi pont estrem O_1 e O_2 con l'assissa ëd O_1 pì cita che cola ëd O_2 . I sernoma nen për adéss l'orìgin, ma già che i-i soma i disegnoma l'ass *y* ant la posission che i sernroma peui. Ël fil a l'é omogéni e donca sò pèis për unità 'd longhëssa a l'é costant e i lo disoma ***p***. An costa manera la fòrsa për unità 'd longhëssa a l'avrà component $F_x = 0$ e $F_y = -p$.

La diferensa, rispét a prima, a l'é che adéss la fòrsa che a agiss an sël fil a l'é mach cola 'd gravità, dovùa al pèis dël fil midem. J'equassion për l'echilibri a dvento :

$$\frac{d}{ds}\left(\Phi\frac{dx}{ds}\right) = 0 \quad ; \quad \frac{d}{ds}\left(\Phi\frac{dy}{ds}\right) = p$$

Integrand na vira la prima equassion i otnoma che $\Phi \frac{dx}{ds} = \text{cost} = \Phi_0$. I l'oma ciamà parèj la costant përchè $\Phi \frac{dx}{ds}$ a l'é nen d'àutr che la component dla trassion normal a la diression dla fòrsa pèis, e sta component Φ_0 a l'é costanta arlong ël fil (la curva).

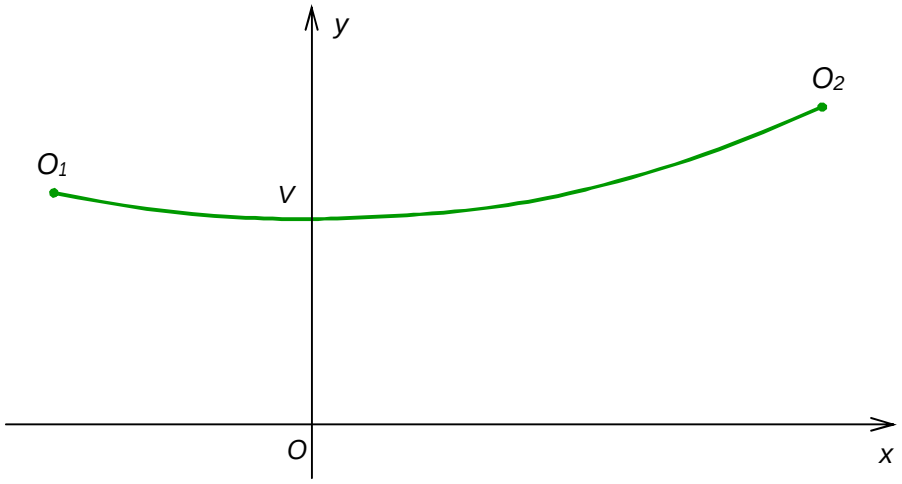

Figura 22 - Caden-aria omogénia

Peui i podoma consideré che $\Phi \frac{dy}{ds}$ a peul esse scrivù coma $\Phi \frac{dx}{ds} \cdot \frac{dy}{dx} = \Phi_0 \cdot \frac{dy}{dx}$ e antlora i podoma scrive la sconda dle equassion dl'echilibri sì dzora coma:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{p}{\Phi_0}$$

Për arzòlve st'equassion as part da consideré che i podoma scrive $y' = dy / dx$ e che i l'oma $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx$ e che donca a arzulta $\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}$.

Con quàich passagi che sì i sautoma, e moltiplicand ij doi member për *dx*, nòstra equassion dl'echilìbri a dventa :

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{p}{\Phi_0} dx$$

che as ìntegra fàcil rispét a *y'*, considerà coma na variàbil, e as treuva:

$$ln(\sqrt{1 + (y')^2} + y') = \frac{p}{\Phi_0} x + \text{cost}$$

Adéss i podoma serne la posission dl'ass *y* (fin-a adéss i l'oma mach considerà soa diression) an manera d'eliminé la costant d'integrassion. A basta sposté paralél st'ass e félo passé dal pont *V* ëd mìnim dla curva andova $y' = 0$, an manera che an sto pont i l'oma $x = 0$. L'equassion a dventa:

$$ln(\sqrt{1 + (y')^2} + y') = \frac{p}{\Phi_0} x$$

A sta mira i passoma da logaritm a nùmer e i otnoma che :

$$\sqrt{1+(y')^2} + y' = \exp\left[\frac{p}{\Phi_0}x\right].$$

I podoma 'ncora noté che se i ciamoma $\sqrt{1+(y')^2} = a$ e $y' = b$, e is arcordoma che $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, travajand su sòn i trovoma che a val ëdcò :

$$\sqrt{1+(y')^2} - y' = \exp\left[-\frac{p}{\Phi_0}x\right]$$

Combinand le doe e integrand as treuva, coma equassion dla curva :

$$y = \frac{\Phi_0}{2p}\left(\exp\left[\frac{p}{\Phi_0}x\right] + \exp\left[-\frac{p}{\Phi_0}x\right]\right) + \text{cost}$$

Ancora na vira i podoma fé la costant ugual a zero sernend na posission adata dl'ass x, an manera che 'l pont ëd mìnim V (për $x = 0$) a l'àbia valor $y_0 = \frac{\Phi_0}{p}$.

Për la tension $\boldsymbol{\Phi}$ dël fil as treuva (i foma nen ij càlcoj) che a val $\boldsymbol{\Phi} = p\,y$, e a l'ha sò mìnim ant ël pont pì bass ëd la curva, andova a val $\boldsymbol{\Phi_0} = p\,y_0$. A l'é natural che sòn a l'é vèra con le sernìe ch'i l'oma fàit për j'ass (a basta nen aussé la curva për aumenté la tension!).

IJ TRAVAJ VIRTUAJ E ‘L PRINSIPI ‘D D’ALEMBERT

Costa a l’è na pàrt amportanta che a anteressa nen mach la Stàtica, coma vëddroma con l’estension che a ven fàita dal prinsipi ëd d’Alembert. A l’è ‘dcò un dij pont ëd partensa për la formulassion analìtica dla mecanica, ma sòn i lo vëddroma dòp.

Gré ‘d libertà e vincoj.

I suponoma un sistema qualonque fàit da N pont materiaj. Ël sistema a ven andividoà ant ògni moment, ant un sistema d’arferiment cartesian ant l’ëspassi, da tre coordinà për pont, e donca ‘l sistema antregh a l’è dëscrivù da $3 \cdot N$ variàbij (ò coordinà). Coste a peulo esse tute andipendente, e antlora i disoma che ël sistema a l’ha $3 \cdot N$ gré ‘d libertà.

Un sistema qualonque dont soe posission a peulo esse dëscrivùe da N variabij andipendente a l’ha N gré ‘d libertà.

Se ‘l sistema a l’ha ‘d vincoj, costi a arduvo ij gré ‘d libertà, ma a l’è mal fé a traté con ògni tipo ed vincoj. I l’oma an ògni meud vist che a-i son vincoj che a peulo esse arpresentà con n’equassion algébrica fra quàich ò tute le variabij e che a dipendo nen dal temp, e an sto cas ël problema as semplifica. An efét coste relassion a arduvo ‘l nùmer dle variabij andipendente, e donca a arduvo ij gré ‘d libertà. Ël problema a podrà peui esse col ëd trové quale che a son le variabij andipendente, ò quale variabij a venta serne com andipendente.

Pr’esempi, un còrp rèid che a peussa esse pensà coma n’ansema ‘d pont a l’ha ij vincoj che ògni cobia ‘d pont a deuv manten-e costanta la distansa fra ij doi pont. An sto cas i l’oma vist che, për tanti che a sio ij pont, le variabij andipendente a son mach le tre coordinà dl’origin dla terna solidal e tre cossen diretor dj’ass ëd costa terna. Ël pendol compòst che i l’oma vist a l’è stàit ëstudià ant l’ipòtesi che a podèisa mach viré antorna a n’ass che a passava për ël pont ëd sospension, e donca con un sol gré ‘d libertà, dàit da l’àngol d’ossilassion.

Un vìncol a peul esse arpresentà da n'equassion algébrica, coma pr'esempi un pont vincolà a n'àutr pont fiss da n'asta rèida a venta che a manten-a la distansa d dal pont fiss e l'equassion dël vìncol a dventa cola dla sfera con senter ant ël pont fiss e ragg d. Un vincol dë sto tipo a l'é ciamà "***bilateral*** ".

Se ant l'esempi sì dzora i butoma un fil nen estendìbil ma flessìbil, antlora nòstr pont a peul nen avèj distansa pì gròssa che d, ma a peul avèjla pì cita. Ël segn d'ugualiansa dla condission ëd vincol a dventa un segn ëd dësugualiansa, che a peul esse $\geq$ opura $\leq$, e 'l vìncol, che a l'é pì nen arpresentà da n'equassion ma da na dësequassion a ven ciamà "***unilateral*** ".

An general peui, an cost capìtol e almanch për adéss, i consideroma vìncoj che a l'àbio nen d'atrito.

Se 'l vìncol a l'é unilateral, as peul nen disse se e coma a arduv ij gré 'd libertà dël sistema, përchè sòn a dipend da la spessìfica condission dël moment (andova a peul valèj ël segn d'ugualiansa ò col ëd dësugualiansa).

Spostament anfinitésim

Se un sistema ëd N pont a l'é an moviment, antlora ant ògni interval ëd temp infinitésim dt, un pont qualonque dël sistema P_i a l'avrà në spostament $dP_i = \boldsymbol{v_i}\, dt$, con $\boldsymbol{v_i}$ che a l'é la velocità (fonsion dël temp) dël pont midem. Cost a l'é në ***spostament real***, che a ciama un temp dt për capité.

I suponoma adéss che un sistema ëd N particole a sia andividoà, ant un sistema d'arferiment, dai vetor ëd posission $\boldsymbol{r_i}$ d’ognidun-a dle particole (che a van da l'orìgin al pont).

Ant lòn ch'a ven, anvece 'd consideré në spostament real, i an-maginoma ëd podèj dé a tute le partìcole në spostament anfinitésim, imaginari e istantani che i ciamoma $\delta \boldsymbol{r_i}$ e che a ciama nen un temp

dt, ma a l'é arferì a un spessìfich istant. Se ij gré ‘d libertà a son *N*, costi spostament a peulo esse tuti andipendent l’un con l’àutr. Sti spostament a son ciamà "***spostament virtuaj*** ".

Ij travaj vrtuaj

I suponoma d'avèj ël sòlit sistema fàit da *N* pont materiaj e i suponoma che, sensa che a-i sio 'd vìncoj, a sia ant na posission d'echilìbri. Antlora a veul dì che tute le arzultant dle fòrse che a agisso an sij pont a son a zero, vis-a-dì : $\vec{F}_i = 0$.

Donca a sarà ‘dcò, se coste fòrse a son na fonsion continua dla posission:

$$\sum_i \vec{F}_i \times \delta \vec{r}_i = 0$$

I podoma dì che ‘l travaj δT fàit da le fòrse an cost ëspostament virtual a val zero. Cost a l’è ‘l prinsipi dij travaj virtuaj che a dis:

Ël travaj che a ven fàit da un sistema an echilibri për n’ëspostament virtual arbitrari e anfinitésim a val zero.

Spostament “virtual” a veul dì che l’ëspostament a l’è mach imaginà e nen dàit an manera fìsica. A l’è na spece ‘d “sonda matemàtica”.

Se adess i suponoma che ant ël sistema a-i sio ‘d vincoj, antlora i podoma consideré le fòrse coma dividùe an fòrse aplicà $\vec{F}_i^{(a)}$ e fòrse vincolar $\vec{F}_i^{(v)}$ che a son dàite da le reassion dij vincoj. E donca i l’oma:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(v)}$$

Nòstra espression ëd prima a dventa antlora:

$$[1] \qquad \sum_i \vec{F}_i^{(v)} \times \delta \vec{r}_i + \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \times \delta \vec{r}_i = 0$$

A propòsit ëd reassion vincolar, as peul nen parlé ‘d travaj, dal moment che le fòrse vincolar a son nen, ëd sòlit, contìnue, ò méj, a son nen na fonsion contìnua dla posission ant l’ëspassi.

A sta mira a venta antroduve un neuv postulà:

$$[2] \qquad \sum_i \vec{F}_i^{(v)} \times \delta \vec{r}_i \geq 0$$

che a sia vèra për tuti j’ëspostament $\boldsymbol{\delta r_i}$ che a sio compatibij con ij vincoj. Sòn a l’è intuitiv, se pr’esempi as considera un pont grév pogià an s’na surfassa: n’ëspostament vers ël bass a l’è nen compatibil con ij vincoj mentre ant n’ëspostament vers l’àut ël travaj a sarìa positiv, ma la fòrsa butà dal vincol, an quàich manera, a spariss. A l'é natural che costa espression a val mach për le reassion vincolar.

Se le espression [1] e [2] a son giuste, antlora a venta ëdcò che a vala l’espression, relativa a le fòrse aplicà:

$$[3] \qquad \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \times \delta \vec{r}_i \leq 0$$

Sòn a portrìa a conclude che, për le fòrse aplicà:

$$[4] \qquad \delta T = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \times \delta \vec{r}_i \leq 0$$

Adess però i consideroma d'ëspostament che a sio reversìbij, vis-a-dì che a peusso esse fàit tant ant un vers coma ant l'àutr. Spostament che se a esist (a l'é compatìbil) $\boldsymbol{\delta r_i}$, antlora a esist (a l'é compatìbil) ëdcò $\boldsymbol{-\delta r_i}$. Ciamoma costi spostament $\boldsymbol{\delta' r_i}$.

I l'oma dit che costi spostament a son arbitrari, e donca lòn che a val për $\boldsymbol{\delta r_i}$, a val ëdcò për $\boldsymbol{-\delta r_i}$. Donca a venta che a sia vèra che:

$$[5] \qquad \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \times \left(-\delta \vec{r}_i\right) \leq 0$$

Costa espression a l'è compatibil con la [3] mach se

$$[6] \qquad \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \times \delta' \vec{r}_i = 0$$

Sòn an lassa buté 'l prinsipi dij travaj virtuaj ant la forma :
Ël travaj che a ven fàit da le fòrse ative un sistema, a parte da na posission d'echilibri, për në spostament virtual anfinitésim, reversibil e compatibil con ij vincoj, a l'è zero.

Se a-i son ëd vincoj, nen tuti jë spostament a son andipendent, e donca as peul nen conclude che tute le component $\vec{F}_i^{(a)}$ dle fòrse a sio a zero.

N'àutra manera

As peul ëdcò vardé la costion parèj:

La formulassion dël prinsipi dij travaj virtuaj, ant ël cas ëd vincoj sensa atrito, a peul esse, an forma general, daita parèj :
Le reassion che a ven-o dai vìncoj sensa atrito a son tale che 'l travaj $\delta\Lambda$ che ste reassion a fan a val zero për ògni spostament virtual anvertìbil, e a l'é positiv opura zero për ògni spostament virtual nen anvertìbil.

Donca i l'avroma che $\delta\Lambda = \sum_i \vec{F}_i^{(v)} \times \delta P_i \geq 0$

Se $\vec{F}_i^{(a)}$ a l'é la fòrsa ativa aplicà al pont P_i , e $\vec{F}_i^{(v)}$ la rispetiva reassion vincolar, dal moment che 'l sistema as supon an echilibri, a venta ch'a sia $\vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(v)} = 0$, e donca $\vec{F}_i^{(a)} = -\vec{F}_i^{(v)}$.

Ël travaj virtual fàit da le fòrse ative dël sistema për dë spostament virtuaj δP_i a sarà dàit da

$$\delta T = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \times \delta P_i = -\sum_i \vec{F}_i^{(v)} \times \delta P_i = -\delta\Lambda$$

ma dal moment che $\delta\Lambda \geq 0$, antlora a arzulta che a venta ch'a sia $\delta T \leq 0$. As dimostra che costa a l'é condission necessaria e suficenta për l'echilibri. An conclusion as peul disse:
Për che un sistema quualonque, con vìncoj sensa atrito, a sia an echilibri a l'é necessati e suficent che l'adission dij travaj virtuaj dle fòrse aplicà al sistema a sia zero për spostament anvertìbij e che a sia ò negativa ò zero për spostament nen anvertìbij.

Stàtica dij sistema grev.

I consideroma sempe un sistema coma coj ëd prima, con la diferensa che adéss le fòrse aplicà a son dàite mach dla pèis dij pont. Për sta tratassion i pijoma un sistema d'arferiment con l'ass *z* orientà vers angiù (vis-a-dì ant ël sens dl'acelerassion ëd gravità). I ciamoma peui con m_i la massa dël pont ch'a fà *i*, e con $\boldsymbol{g}$ l'acelerassion ëd gravità. J'àutre notassion a son cole 'd prima.

Se i pijoma un generich pont P_i dël sistema la fòrsa F_i aplicà a P_i a l'avrà coma component $Fx_i = 0$, $Fy_i = 0$, $Fz_i = m_i \cdot g$.

I suponoma peui un genérich spostament virtual dël sistema e i l'oma che për lë spostament δP_i le component a saran δx_i , δy_i , δz_i.

Ël travaj virtual dle fòrse aplicà an sto cas a resta :

$$\delta T = \sum_i \vec{F}_i \times \delta P_i = g \cdot \sum_i m_i \cdot \delta z_i$$

Adéss i consideroma 'l barissènter dël sistema, che i ciamoma G, dont a l'é d'anteresse, an cost problema, la coordinà z_G. Com i savoma da la geometrìa dle masse, costa a val: $z_G = \frac{\sum_i m_i \cdot z_i}{m}$, andova m a l'é la massa total dël sistema.

Lë spostament virtual che a pròvoca l'increment δz_i dle z_i a pròvoca, an sël barissènter, na variassion δz_G che a val : $\delta z_G = \frac{\sum_i m_i \cdot \delta z_i}{m}$.

Ël travaj virtual dle fòrse ative a dventa, antlora, $\delta T = g\, m\, \delta z_G$. Për che 'l sistema a sia an echilibri a venta che a sia $\delta T \leq 0$ e donca a venta ch'a sia $\delta z_G \leq 0$.

A sta mira a l'é méj ch'i arcordo che i l'oma orientà nòstr ass z vers l'angiù. Sòn a l'é 'l prinsipi 'd Torricelli che a dis:

La condission necessaria e suficenta pérchè un sistema grév a sia an echilibri a l'é che për òngi spostament virtual dël sistema sò barissènter a l'àbia spostament negativ o nuj. (Për com i l'oma orientà l'ass z "che 'l barissénter a cala nen ").

Ël prinsipi ‘d d’Alembert.

Fin-a adess i l’oma tratà d’echilibri stàtich, suponend che un sistema an echilbri a sia ferm, ant ël sistema d’arferiment dovrà. Ma 'l concét d’echilibri a peul esse estèis.

I pijoma adess le equassion dël moviment për nòstr sistema ëd N pont, parèj com a ven-o da lë scond prinsipi ‘d Newton. Për òngi partìcola ***i*** i l’oma:

$$\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{a}_i = \frac{d}{dt}\left(m_i \cdot \vec{v}_i\right)$$

Vis-a-dì che i l’oma:

$$\vec{F}_i - \frac{d}{dt}\left(m_i \cdot \vec{v}_i\right) = 0$$

Ël termo $\frac{d}{dt}\left(m_i \cdot \vec{v}_i\right)$ a l’ha le dimension ëd na fòrsa, che as peul imaginé coma se a echilibrèisa la fòrsa $\vec{F}_i$, che a l’è la fòrsa che a agiss an sël pont ***i***. I suponoma antlora 'l sistema antrégh ëd N pont, e i suponoma ëd dé në spostament virtual anfinitésim a tut ël sistema:

$$\sum_i \left[\vec{F}_i - \frac{d}{dt}\left(m_i \cdot \vec{v}_i\right)\right] \times \delta r_i = 0$$

Adess i dividoma torna le fòrse an *aplicà* e *vincolar* :

$$\sum_i \vec{F}_i^{(v)} \times \delta r_i + \sum_i \left[\vec{F}_i^{(a)} - \frac{d}{dt}\left(m_i \cdot \vec{v}_i\right)\right] \times \delta r_i = 0$$

Për në spostament compatibil con ij vncoj i l’avroma ancora che:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(v)} \times \delta r_i \geq 0$$

E donca a venta ancora che a sia:

$$\sum_i \left[\vec{F}_i^{(a)} - \frac{d}{dt}\left(m_i \cdot \vec{v}_i\right) \right] \times \delta r_i \leq 0$$

Coma i l'oma vist prima, se jë spostament a son ëdcò anvertibij, antlora l'ùnica possibilità a l'è che a sia:

$$\sum_i \left[\vec{F}_i^{(a)} - \frac{d}{dt}\left(m_i \cdot \vec{v}_i\right) \right] \times \delta' r_i = 0$$

i podoma sempe parlé 'd travaj për lòn che as arferiss a le fòrse $\vec{F}_i^{(a)}$, ma nen, an manera imedià, për ij termo $\frac{d}{dt}\left(m_i \cdot \vec{v}_i\right)$. I podoma ciamé costi termo coma "***fòrse d'inersia***" che indicoma con $\vec{I}_i$, e i podoma scrive, antlora:

$$\sum_i [\, \vec{F}_i^{(a)} + \vec{I}_i \,] \times \delta' r_i = 0$$

e i ciamoma "***fòrsa efetiva***" ël termo $\vec{F}_i^{(a)} + \vec{I}_i$.

A l'è un pòch coma se i disèiso che për un còrp che as bogia sota l'assion ëd na fòrsa, la fòrsa midema e la soa conseguensa a son an echilibri. Costa a l'è na manera pì general, e manch natural, ëd pensé a l'echilibri, ma an ògni manera a l'è na forma lògica e giusta da na mira matemàtica. As peul donca enonsié ël ***prinsipi 'd d'Alembert*** coma:
Ant l'ëspostament virtual anfinitesim anvertibil e compatibil con ij vincoj d'ògni sistema dinamich, ël travaj dle fòrse efetive a l'è zero.

I parleroma 'ncora ëd cost prinsìpi, parèj com i arpijroma quaicòs dla Stàtica, parland dël passagi da la Mecànica vetorial a la Mecànica analìtica.

Pàgina lassà bianca ëd propòsit