Part doi - L'elastissità

An costa part as arpija an manera pì teòrica lòn ch'i l'oma già vist ant la prima session. Fòrse e potensial an geugh ant le deformassion elàstiche. Relassion fra deformassion e sfòrs e la lej d'Hooke. Teorema generaj e vibrassion. L'echilìbri e teorema dla mìnima energìa.

TÀULA DLA SCONDA PART

Ij còrp elàstich 27
Ël potensial elàstich 27
La lèj ëd Hooke 30
Relassion fra sfòrs intern e deformassion. 30
Mòdul d'elastissità e coeficent ëd contrassion 32
Relassion fra omografìe 33
Energìa elàstica ëd deformassion 34
Equassion dl'elastissità 37
Equassion dël moviment con ël prinsìpi 'd Hamilton 39
Vibrassion lìbere 41
L'echilibri 42
Teorema dla mìnima energìa 42
Stabilità dl'echilibri 43

TÀULA DLE FIGURE DLA SCONDA PART

Figura 1 - Arferiment për ël mòdul d'elastissità 32
Figura 2 - Prinsipi variassional 39

IJ CÒRP ELÀSTICH

Ant la prima session i l'oma parlà d'elastissità, e i l'oma vist motobin ampressa la dipendensa dë sto fenòmeno da le struture molecolar e atòmiche dla matéria. Sì i consideroma anvece la strutura dij sòlid coma contìnua, ant la manera vista ant la prima part.

Sota l'assion ëd fòrse esterne un còrp sòlid a peul, oltra che spostésse an manera rèida, arsèive 'dcò ëd deformassion, che a dipendo da la grandëssa dle fòrse e da la natura dël còrp. Ëd sòlit ste deformassion a pròvoco 'dcò na variassion ëd temperatura.

L'elastissità a l'é la proprietà dij còrp ëd deformésse sota l'assion ëd na fòrsa, che a venta ch'a sia mantnùa për manten-e la deformassion, mentre che gavand la fòrsa, 'l còrp a arpija soa forma inissial. Se, gavand la fòrsa, la deformassion a spariss d'autut antlora 'l còrp a l'é ciamà "*elastich perfét* ". Për un qualonque còrp elàstich real la deformassion a peul sparì al complét mach se a l'é nen stàita pì gròssa d'un dàit lìmit, che a ven ciamà "*lìmit d'elastissità* ".

Se le proprietà elàstiche a dipendo nen da la diression considerà ant ël material, antlora 'l còrp a ven dit "*isòtropo da na mira elàstica* ", mentre dësnò a l'é dit "*anisòtropo* ". Materiaj coma ij metaj, se a son elastich, a son ëd sòlit isòtropo, mentre pr'esempi 'l bòsch a l'é un clàssich esempi 'd material anisòtropo,

La teorìa dl'elastissità a studia ij rapòrt fra deformassion e fòrse, jë sfòrs intern an fonsion dj'element caraterìstich dla deformassion e a stabiliss le equassion dl'echilibri ò dël movinent.

Ëd sòlit as lìmita lë studi a cite deformassion anfinitiésime (ant ël camp dl'elastissità përféta), ma dle vire a venta 'dcò ten-e cont ëd deformassion finìe.

Ël potensial elàstich

Na prima forma d'energìa che un còrp a peul avèj a l'é cola cinética, se 'l còrp midem as bogia. Sì i consideroma mach cit ëspostament e i podoma esprime st'energìa Ec_1,[1] arferìa a l'unità 'd volum an corispondensa a un dàit pont P coma: $Ec_1 = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial t}\right)^2$ andova ρ a l'é la densità 'd massa ant ël pont considerà e $\boldsymbol{s}$ a l'é lë spostament. Se i disoma S ël volum dël còrp, soa energìa cinética a sarà dàita da:

$$Ec = \frac{1}{2}\int_S \rho\left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial t}\right)^2 dS$$

andova S a l'é 'l còrp ò la porsion dël còrp considerà.

An gionta a costa energìa, 'l còrp a l'ha n'energìa che a dipend da sò stat (configurassion e temperatura dij sò pont), che a ven dita "***energìa antrinseca*** ", che a l'é arferìa a lë stat "*natural* " dël còrp (temperatura costanta 'd partensa e gnun-e deformassion).

Second ël prim prinsìpi dla Termodinàmica[2], cand un còrp a passa da në stat a n'àutr soa energìa total, an general, a càmbia e soa variassion a l'é ugual al travàj fàit da le fòrse esterne e da la variassion ëd calor che as pròvoca (misurà an echivalent mecànich).

---

[1] A venta fé atension a coste notassion. Ant ij lìber italian l'energìa cinética a ven ëd sòlit indicà con T, ma noi i dovroma la litra T për indiché 'l travaj (che anvéce an italian as ìndica con L e an inglèis con W).

[2] La Termodinàmica a sarà matéria për la tersa session ëd coste nòte e a sarà pì che tut arferìa a sistema flùid. Sì i disoma mach lòn ch'a serv, an manera sempia.

I podoma antlora consideré un cambiament dë stat ant un temp δt, andova un pont genérich P a l'ha në spostament $\delta \boldsymbol{s}$, e indicoma con δEc_1 la variassion d'energìa cinética për unità 'd volum e 'ncora con δU la variassion dl'energìa antrìnseca, sempe për unità 'd volum e sempe ant ël temp δt. Sempe an sto temp i consideroma 'l travaj δT fàit da tute le fòrse esterne aplicà e δQ, variassion dla quantità 'd calor misurà ant unità mecàniche. Për ël prim prinsìpi dla Termodinàmica che i l'oma dit i l'avroma:

$$\int_S (\delta Ec_1 + \delta U)\, dS = \delta T + \delta Q$$

Le fòrse esterne che a agisso su nòstr sistema a son le fòrse 'd massa $\rho \boldsymbol{F} dS$ che a agisso su ògni element ëd volum dS, e le fòrse 'd surfassa $-\boldsymbol{\Phi_n} d\sigma$ aplicà a la fàcia positiva (esterna) dj'element ëd surfassa $d\sigma$ dla surfassa σ che a lìmita 'l còrp ò soa porsion considerà. Ël travaj δT ëd coste fòrse a sarà dàit da :

$$\delta T = \int_S \left(\rho \vec{F} \times \delta \vec{s}\right) dS - \int_\sigma \left(\vec{\Phi}_n \times \delta \vec{s}\right) d\sigma$$

Aplicand la fòrmula 'd Cauchy ch'i l'oma vist a arzulta che lë sfòrs spessìfich $\boldsymbol{\Phi}_n$ relativ a l'element ëd surfassa $d\sigma$ dont la normal $\boldsymbol{n}$ a l'àbia α, β, γ coma cossen diretor, a l'é dàit da :

$$\vec{\Phi}_n = \alpha \vec{\Phi}_x + \beta \vec{\Phi}_y + \gamma \vec{\Phi}_z$$

Aplicand le fòrmule 'd Gauss për passé da n'integral ëd surfassa a n'integral ëd volum as treuva 'dcò:

$$\int_\sigma \vec{\Phi}_n \times \delta \vec{s} \cdot d\sigma = \int_\sigma \left(\alpha \vec{\Phi}_x + \beta \vec{\Phi}_y + \gamma \vec{\Phi}_z\right) \times \delta \vec{s} \cdot d\sigma =$$

$$= \int_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{\Phi}_x \times \delta \vec{s}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{\Phi}_y \times \delta \vec{s}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{\Phi}_z \times \delta \vec{s}\right) \right] dS =$$

$$= \int_S \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) \times \delta \vec{s} \cdot dS + \int_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{\Phi}_x \times \delta \vec{s}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{\Phi}_y \times \delta \vec{s}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{\Phi}_z \times \delta \vec{s}\right) \right] dS$$

e da sòn nòstr travaj δT a sarà:

$$\delta T = \int_S \left(\rho \vec{F} \times \delta \vec{s}\right) dS - \int_S \left[\left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) \times \delta \vec{s} \right] dS - \int_S \left[\Phi_x \times \delta\left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial x}\right) + \Phi_x \times \delta\left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial x}\right) + \Phi_x \times \delta\left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial x}\right) \right] dS$$

Da l'espression ch'i l'oma scrivù d' Ec_1 i arcavoma che $\delta Ec_1 = \rho \dfrac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} \times \dfrac{\partial \vec{s}}{\partial t} \delta t = \rho \dfrac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} \times \delta \vec{s}$

e, integrand su tut ël volum, l'increment d'energìa cinética a l'é dàit da:

$$\int_S \delta Ec_1\, dS = \int_S \left(\rho \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} \times \delta \vec{s} \right) dS$$

I podoma sotrae member a member costa relassion da l'espression dël travaj δT ch'i l'oma scrivù sì dzora e i otnoma:

$$\delta T - \int_S \delta Ec_1 \, dS = A - B \quad \text{andova:}$$

$$A = \int_S \left[\rho \left(\vec{F} - \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} \right) - \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right) \right] \times \delta \vec{s} \cdot dS$$

$$B = \int_S \left[\Phi_x \times \delta \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial x} \right) + \Phi_x \times \delta \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial x} \right) + \Phi_x \times \delta \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial x} \right) \right] dS$$

A sta mira i notoma che se i consideroma la prima equassion andefinìa che i l'oma vist ant la prima part, i concludoma che la part indicà con *A* a l'é zero an manera identica. Confrontand con l'equassion che a esprim ël prim prinsipi dla Termodinàmica i podoma scrive:

$$\int_S \delta U \cdot dS = \delta Q - \int_S \left[\vec{\Phi}_x \times \delta \left(\frac{\delta \vec{s}}{\delta x} \right) + \vec{\Phi}_y \times \delta \left(\frac{\delta \vec{s}}{\delta y} \right) + \vec{\Phi}_z \times \delta \left(\frac{\delta \vec{s}}{\delta z} \right) \right] dS$$

An costa espression δU a l'é ël diferensial ëd na fonsion uniform ëd la temperatura e 'd cole quantità che a suabilisso la configurassion dël còrp. La fonsion a misura l'energìa antrinseca ël còrp ant ògni stat. Ant lë stat natural, ant ël sens ch'i l'oma vist prima, sò valor a ven pijà coma zero.

Se i consideroma trasformassion adiabàtiche, vis-a-dì sensa scambi ëd calor, antlora i l'oma che $\delta Q = 0$. La relassion sì dzora a venta che a vala qualonque a sia la porsion ëd còrp che i consideroma, e donca a venta ch'a sio uguaj j'integrand, e an sto cas as arduv a l'espression:

$$-\delta U = \vec{\Phi}_x \times \delta \frac{\partial \vec{s}}{\partial x} + \vec{\Phi}_y \times \delta \frac{\partial \vec{s}}{\partial y} + \vec{\Phi}_z \times \delta \frac{\partial \vec{s}}{\partial z}$$

e donca an sto cas l'espression a lë scond member a sarà un diferensial precis.

Ant la prima part i l'oma parlà dle notassion ëd Lamé e dle component dle deformassion, che i arportoma 'dcò ambelessì (i arcordoma che *u, v, w* a son le component dlë spostament ***s***):

$$N_1 = \Phi_{xx} \quad ; \quad N_2 = \Phi_{yy} \quad ; \quad N_3 = \Phi_{zz} \quad ; \quad T_1 = \Phi_{yz} = \Phi_{zy} \quad ; \quad T_2 = \Phi_{xz} = \Phi_{zx} \quad ; \quad T_1 = \Phi_{yx} = \Phi_{xy}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad ; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad ; \quad \varepsilon_{23} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad ; \quad \varepsilon_{31} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Donca, dovrand coste notassion, nòstra espression ëd prima a dventa:

$$-\delta U = N_1 \, \delta\varepsilon_{11} + N_2 \, \delta\varepsilon_{22} + N_3 \, \delta\varepsilon_{33} + T_1 \, \delta\varepsilon_{23} + T_2 \, \delta\varepsilon_{31} + T_3 \, \delta\varepsilon_{12}$$

Sòn a veul dì che a esist na fonsion $W(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31})$ tala ch'a sia:

$$N_1 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{11}} \qquad N_2 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{22}} \qquad N_3 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{33}}$$

$$T_1 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{23}} \qquad T_2 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{31}} \qquad T_3 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{12}}$$

Sta fonsion *W* a dà donca, con soe derivà parsiaj rispét a le component dla deformassion, le component djë sfòrs intern e a ven ciamà "***potensial dle fòrse elàstiche*** " arferì a l'unità 'd volum (opura "***potensial spessìfich*** ") ant un dàit pont *P* dël còrp.

I l'oma vist che na soa variassion a l'è ugual a la variassion, con segn cambià, dl'energìa antrìnseca arferìa a l'unità 'd volum, e i arcordoma che i l'oma fàit l'ipòtesi che la deformassion a fussa adiabàtica.

La lèj ëd Hooke

Cost a l'é un prinsìpi che a ven da la sperimentassion an sij còrp elàstich e a val, ëd sòlit, për cite deformassion coma cole ch'i tratoma ambelessì. La lèj a dis che *: La deformassion provocà ant un còrp elàstich a l'é proporsional al càrich che a la pròvoca.* Sòn a veul dì che le component djë sfòrs intern a son fonsion linear e omogénie dle component dla deformassion.

Sòn i l'oma già vistlo parland d'elastissità ant la prima session ëd coste nòte, andova i l'oma scrivù costa proporsionalità për vàire tipo ëd deformassion. Coma esempi i disoma che se un fil omogeni a ven tirà con un pèis ***p***, a tira a slonghésse e 'l coeficent ëd dilatassion linear ε a l'é proporsional al pèis ***p***. Se 'l pèis ***p*** a l'é arferì a l'unità 'd surfassa dla session dël fil i podoma scrive che $\boldsymbol{p} = E \cdot \varepsilon$, andova E, fator ëd proporsionalità, a dipend mach dal material e a ven ciamà "***mòdul d'elastissità*** " opura "***modul ëd Young*** ".

Sempe l'esperiensa a dis che 'l fil tirà, oltra che slonghésse, as ëstrens 'dcò e la contrassion lateral η a l'é 'ncora sempe proporsional a ***p*** e donca a ε. I l'oma che $\eta = k \cdot \varepsilon$, andova k a ven ciamà "***rapòrt ëd Poisson*** ".

Lòn ch'a suced për un fil a càpita 'dcò për n'asta che a peussa esse comprimùa anvece che tirà, e antlora le deformassion a l'avran segn contrari, e l'asta as ëscursa e as ëslarga.

Se i vardoma 'l significà dël mòdul ëd Young i trovoma che a l'é 'l càrich teòrich për session unitària che a servrìa a randobié la longhëssa dël fil.

Për l'assél normal i l'oma che $E = 210000\ [N / mm^2]$ vis-a-vì 21 tonelà për milim quadrà. Ël fil d'assél a së s-cianca motobin prima d'avèj randobià soa longhëssa.

Relassion fra sfòrs intern e deformassion.

I l'oma vist sì dzora che ant na deformassion anfinitésima a interven-o doe costant (mòdul d'elastissità e coeficent ëd contrassion) ant le relassion fra deformassion e sfòrs.

Ant ògni pont P ëd nòstr mojen contìnuo le ses component djë sfòrs N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, a saran fonsion dle ses component dla deformassion ε_{11}, ε_{22}, ε_{33}, ε_{12}, ε_{23}, ε_{31} :

$$N_i = f_i(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}) \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

$$T_i = g_i(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}) \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

Jë sfòrs a valo zero ant lë stat natural (për ipòtesi) e donca cand la deformassion a-i é nen. An sto stat a saran donca 'dcò zero tute le ε_i.

Dal moment che i consideroma che le variassion a sio anfinitésime, i podoma svilupé le ses fonsion f_i e g_i an série 'd MacLaurin e pijé mach ël termo dël prim órdin. I otnoma parèj ses fonsion linear e omogénie dël tipo :

$$N_i = A_i\,\varepsilon_{11} + B_i\,\varepsilon_{22} + C_i\,\varepsilon_{33} + D_i\,\varepsilon_{12} + E_i\,\varepsilon_{23} + F_i\,\varepsilon_{31} \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

$$T_i = a_i\,\varepsilon_{11} + b_i\,\varepsilon_{22} + c_i\,\varepsilon_{33} + d_i\,\varepsilon_{12} + e_i\,\varepsilon_{23} + f_i\,\varepsilon_{31} \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

An coste equassion a-i son an tut 36 coeficent che a dipendo da com a l'é fàit ël mojen ant l'anviron dël pont P. Se 'l còrp a l'é omogéni, antlora costi coeficent a son costant, dësnò a son fonsion dël pont e donca dle coordinà x, y, z.

Ël nùmer ëd coeficent as arduv, an realità, a 21 për le considerassion ch'i l'oma fàit an sël potensial elàstich. An efét i l'oma vist che le component djë sfòrs intern a son fonsion linear omogénie dle component dle deformassion, e 'l potensial elàstich W a sarà na fonsion quadràtica omogénia ant le ses component dla deformassion. Ma na forma quadràtica omogénia an ses variàbij a l'ha 21 coeficent. An efét i l'oma vist che la matriss dij coeficent dj'equassion sì dzora a l'é simétrica rispét a la diagonal prinsipal.

Se peui ël sistema a l'é omogéni e isòtropo antlora, com i vëddroma, ij coeficent as arduvo a doi. An costa situassion as dimostra che la quàdrica diretriss djë sfòrs intern (che a definiss la distribussion djë sfòrs antorna a *P*) e la quàdrica dle dilatassion (che a definiss le deformassion antprna a *P*) a l'han j'istéss ass e j'istéss pian prinsipaj.

Se is arferima a na trien-a d'ass ortogonaj *x'*, *y'*, *z'* con l'orìgin an *P* , j'equassion dë ste doe quàdriche a saran:

$$Q = \varphi(x', y', z') = N_1 x'^2 + N_2 y'^2 + N_3 z'^2 + 2T_3 x'y' + 2T_1 y'z' + 2T_2 z'x = \pm 1$$

$$Q^* = \psi(x', y', z') = \varepsilon_{11} x'^2 + \varepsilon_{22} y'^2 + \varepsilon_{33} z'^2 + \varepsilon_{12} x'y' + \varepsilon_{23} y'z' + \varepsilon_{31} z'x = \pm 1$$

Ij coeficent dla prima 'd coste relassion a son fonsion linear omogénie dij coeficent dla sconda. Dal moment che 'l sistema a l'é omogéni e isòtropo, qualonque a sia la trien-a d'ass sernùa, le relassion fra ij coeficent dë ste doe equassion a son sempe istésse. As peul donca serne na trien-a d'ass che a passo për *P* e a son paraléj a le diression prinsipaj relative al pont *P*.

I ciamoma *P(X, Y, Z)* sta trien-a d'ass, con Φ_1, Φ_2, Φ_3 i ciamoma jë "*sfòrs prinsipaj* " e con $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ij "*coeficent ëd dilatassion prinsipaj* ". J'equassion sì dzora a dvento :

$$\Phi(X, Y, Z) = \Phi_1 X^2 + \Phi_2 Y^2 + \Phi_3 Z^2 = \pm 1$$

$$\Psi(X, Y, Z) = \varepsilon_1 X^2 + \varepsilon_2 Y^2 + \varepsilon_3 Z^2 = \pm 1$$

Ij coeficent Φ_1, Φ_2, Φ_3 a saran sempe fonsion dij coeficent $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ e a ven-o sempe da le fòrmule 'd prima. Dal moment che adéss T1 = T2 = T3 = 0 an particolar i l'avroma che:

$$\Phi_1 = A_1 \varepsilon_1 + B_1 \varepsilon_2 + C_1 \varepsilon_3$$

Se adéss i foma na përmutassion dj'ass PY e PZ, ël coeficent Φ_1 dl'equassion $\Phi(X, Y, Z)$ a càmbia nen, mentre ij doi coeficent $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ dl'equassion $\Psi(X, Y, Z)$ as ëscambio fra 'd lor. Donca Φ_1 a venta nen ch'a càmbia cand as ëscambio $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ e donca a venta ch'a sia $B_1 = C_1$. A-i na ven fòra che i podoma scrive:

$$\Phi_1 = A_1 \varepsilon_1 + B_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) = (A_1 - B_1)\varepsilon_1 + B_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

ma i l'oma vist che $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \theta$ a l'é 'l coeficent ëd dilatassion cùbica ant ël pont *P*, che a l'é invariant, e donca i podoma scrive:

$$\Phi_1 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_1$$

andova i l'oma butà $\lambda = B_1$ e $2\mu = A_1 - B_1$.

Con përmutassion sircolar ëd j'ass, a l'istéssa manera as oten-o le relassion:

$$\Phi_2 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_2 \quad ; \quad \Phi_3 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_3$$

Sòn a veul dì che fra j'equassion $\Phi(X, Y, Z)$ e $\Psi(X, Y, Z)$ a-i é la relassion:

$$\Phi(X, Y, Z) = 2\mu\Psi(X, Y, Z) + \lambda\theta(X^2 + Y^2 + Z^2)$$

A sta mira i podoma torné al sistema d'arferiment *P(x', y', z')* e l'identità ch'i l'oma scrivù sì dzora a dventa :

$$\varphi(x', y', z') = 2\mu\psi(x', y', z') + \lambda\theta(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

vis-a-dì, svilupand:

$$N_1 x'^2 + N_2 y'^2 + N_3 z'^2 + 2T_3 x'y' + 2T_1 y'z' + 2T_2 z'x =$$

$$= 2\mu(\varepsilon_{11} x'^2 + \varepsilon_{22} y'^2 + \varepsilon_{33} z'^2 + \varepsilon_{12} x'y' + \varepsilon_{23} y'z' + \varepsilon_{31} z'x) + \lambda\theta(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

Da costa identità as arcavo le relassion che, i lo arcordoma 'ncora, a valo giusta për un sistema omogéni isòtropo:

$$\begin{cases} N_1 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{11} \\ N_2 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{22} \\ N_3 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{33} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} T_1 = \mu\varepsilon_{23} \\ T_2 = \mu\varepsilon_{31} \\ T_3 = \mu\varepsilon_{12} \end{cases}$$

Coste a son j'equassion djë sfòrs an fonsion dle deformassion e le doe costant λ e μ a son ciamà "***costant ëd Lamé*** ".

Mòdul d'elastissità e coeficent ëd contrassion

Is arferima a figura 1. I voroma stabilì na relassion fra ël mòdul d'elastissità *E*, ël coeficent ëd contrassion *k* (che i l'oma già definì prima) e sfòrs e coeficent ëd dilatassion.

I consideroma ant un còrp omogéni e isòtropo ël sòlit pont *P* e i costruima un paralelepìped retangol elementar, che a l'ha un cò ant ël pont *P* e da sto pont a seurto sò tre spìgoj PA_1, PA_2, PA_3, che a l'han le diression dle tre diression prinsipaj. Coma sempe i pijoma ij tre sfòrs prinsipaj an *P* coma Φ_1, Φ_2, Φ_3 e ij tre coeficent ëd dilatassion prinsipaj an *P* coma $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.

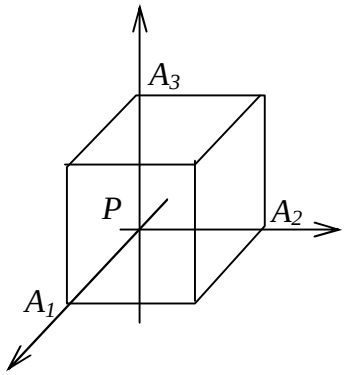

Figura 1 - Arferiment për ël mòdul d'elastissità

Për semplifiché i suponoma che jë sfòrs a sio tuti tre ëd tension. Sota l'efét ëd costi sfòrs, che as esèrcito an diression opòste an sle fàce opòste dël paralelepìped, se i consideroma le doe fàce perpendicolar a lë spìgol PA_1, i disoma che sto spìgol as ëslonga (e sòn a ven da la lèj ëd Hooke) ëd na quantità $\frac{\Phi_1}{E}$. Jë sfòrs an sj'àutre face, anvece, a tiro a scursélo dle doe quantità $k\frac{\Phi_2}{E}$ e $k\frac{\Phi_3}{E}$.

I suponoma che j'efét as adission-o, e antlora lë slongament unitàri (slongament për unità 'd longhëssa) dlë spigol PA_1 a sarà:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\Phi_1 - k\left(\Phi_2 + \Phi_3\right)\right]$$

L'istessa còsa a peul esse fàita për j'àutri doi spìgoj, e donca i podoma trové 'l sistema d'equassion :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{1}{E}\left[\Phi_1 - k\left(\Phi_2 + \Phi_3\right)\right] \\ \varepsilon_2 = \dfrac{1}{E}\left[\Phi_2 - k\left(\Phi_3 + \Phi_1\right)\right] \\ \varepsilon_3 = \dfrac{1}{E}\left[\Phi_3 - k\left(\Phi_1 + \Phi_2\right)\right] \end{cases}$$

Se i arcordoma che $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ (coeficent ëd dilatassion cùbica) e se i butoma che $\sigma = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$, i arcavoma :

$$\theta = \frac{1}{E}(1-2k)\sigma \quad ; \quad \sigma = \frac{E}{1-2k}\theta$$

ma le tre relassion ch'i l'oma scrivù dzora a peulo esse scrivùe coma (con $i = 1, 2, 3$):

$$\varepsilon_i = \frac{1+k}{E}\Phi_i - \frac{k}{E}\sigma \quad \text{e 'dcò} \quad \Phi_i = \frac{E}{1+k}\varepsilon_i + \frac{k}{1+k}\sigma$$

e scrivend ël valor ch'i l'oma trovà për σ:

$$\Phi_i = \frac{E}{1+k}\varepsilon_i + \frac{kE}{(1+k)(1-2k)}\theta$$

Da costa espression e da lòn ch'i l'avìo vist a propòsit dle costant ëd Lamè λ e μ, adéss i arcavoma sùbit ste doe costant an fonsion dël mòdul E e dël coeficent k :

$$\lambda = \frac{kE}{(1+k)(1-2k)} \quad ; \quad \mu = \frac{E}{2(1+k)}$$

Al contrari i podoma 'dcò scrive:

$$k = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \quad ; \quad E = \mu\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda+\mu}$$

Relassion fra omografìe

Costa a l'é n'àutra manera dë scrive lòn ch'i l'oma vist sì dzora. I consideroma l'omografìa djë sfòrs Φ e la dilatassion $D\alpha$ dl'omografìa dla deformassion α. I l'oma che:

$$D\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + K\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{s}}{dP} + K\frac{d\vec{s}}{dP}\right)$$

Adéss i pijoma ij versor dle diression prinsipaj e i-j ciamoma $\boldsymbol{a_1}$, $\boldsymbol{a_2}$, $\boldsymbol{a_3}$. Coste a son ëdcò le diression unìe dl'omografìa $D\alpha$. Dal moment che i consideroma sempe un còrp omogéni isòtrop, ste diression a coincido 'dcò con le diression prinsipaj djë sfòrs intern, vis-a-dì con le diression unìe dl'omografìa Φ.

As peul osservé che $\sigma = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ a l'é l'invariant prim $I_1\Phi$ dl'omografìa djë sfòrs e che as peul arcavé, da lòn ch'i l'oma dit, aplicand ai versor $\boldsymbol{a_i}$ ij coeficent ε_i, che :

$$D\alpha\,\vec{a}_i = \frac{1}{E}\left[(1+k)\Phi - k\,I_1\Phi\right]\vec{a}_i$$

e da costa as peul arcavé la relassion:

$$D\alpha = \frac{1}{E}\left[(1+k)\Phi - k\, I_1 \Phi\right]$$

Se is arferima a la trien-a 'd diression ch'a seurto dal pont *P* e che a son paraléle a j'ass coordinà *x*, *y*, *z*, arcordand che për deformassion anfinitésime i l'oma :

$$D\alpha = \begin{Vmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{1}{2}\varepsilon_{12} & \frac{1}{2}\varepsilon_{13} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \frac{1}{2}\varepsilon_{23} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{13} & \frac{1}{2}\varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{Vmatrix} \cdot \Phi = \begin{Vmatrix} Xx & Xy & Xz \\ Yx & Yy & Yz \\ Zx & Zy & Zz \end{Vmatrix}$$

andova Xx, Yy, Zz a son le component normaj djë sfòrs mentre Xy =Yx , Yz = Zy , Zx = Xz a son le component tangensiaj, as arcava che:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}\left[(1+k)Xx - k\left(Xx + Yy + Zz\right)\right]$$
$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}\left[(1+k)Yy - k\left(Xx + Yy + Zz\right)\right]$$
$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}\left[(1+k)Zz - k\left(Xx + Yy + Zz\right)\right]$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{2(1+k)}{E}Xy \quad ; \quad \varepsilon_{23} = \frac{2(1+k)}{E}Yz \quad ; \quad \varepsilon_{31} = \frac{2(1+k)}{E}Zx$$

Ste equassion a esprimo le component dla deformassion coma fonsion linear omogénie dle component djë sfòrs intern.

Sti coeficent, parèj coma le relassion fra omografìe, a peulo esse dàit an fonsion dle costant ëd Lamé fasend le sostitussion dël cas.

Sensa fé tut ël procediment matemàtich, i disoma che le component djë sfòrs, parèj com a son stàite notà sì dzora a peulo esse dàite an fonsion dle costant ëd Lamé da j'equassion sì sota.

I arcordoma che as trata ëd còrp omogéni isòtrop e com arferiment i pijoma le tre diression che a seurto dal pont *P* e che a son paralele a j'ass coordinà. I arcordoma 'dcò che për deformassion anfinitésime a val la relassion : $\theta = I_1\alpha = I_1 D\alpha = div\,\vec{s} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$.

$$\begin{cases} Xx = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda\, div\,\vec{s} \\ Yy = 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda\, div\,\vec{s} \\ Zz = 2\mu\varepsilon_{33} + \lambda\, div\,\vec{s} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} Xy = \mu\varepsilon_{12} \\ Yz = \mu\varepsilon_{23} \\ Zx = \mu\varepsilon_{31} \end{cases}$$

Energìa elàstica ëd deformassion

I l'oma vist che se la deformassion a l'é adiabàtica (sensa scambi 'd calor, vis-a-dì che 'l sistema che a ven deformà nì a arseiv calor da fòra, nì a manda calor fòra) antlora a esist na fonsion *W* dle ses component ε_{ij} dla deformassion, tala ch'a sia:

$$Xx = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{11}} ; \quad Yy = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{22}} ; \quad Zz = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{33}}$$

$$Xy = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{12}} ; \quad Yz = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{23}} ; \quad Zx = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{31}}$$

Le component djë sfòrs a son fonsion linear omogénie dle component dla deformassion, antlora W a sarà na fonsion omogénia quadràtica dle component dla deformassion. I l'oma ciamà costa fonsion " ***potensial dle fòrse elàstiche*** ".

I calcoloma antlora ël travaj virtual djë sfòrs intern provocà da na variassion virtual $\delta \boldsymbol{s}$ dlë spostament $\boldsymbol{s}$ dij sò pont. A sto spostament a corispond na variassion virtual $\delta\alpha = \delta\left(\frac{d\vec{s}}{dP}\right)$ dl'omografìa ëd deformassion.

I consideroma un paralelepìped elementar coma col ëd figura 1, con un cò ant ël pont P e con jë spìgoj , l_1 , l_2 , l_3 , paralej a le diression prinsipaj. Jë slongament unitari , ε_1 , ε_2 , ε_3 , a l'avran le variassion virtuaj, ant l'órdin, $\delta\varepsilon_1$, $\delta\varepsilon_2$, $\delta\varepsilon_3$, e donca ij lat a l'avran na variassion che, ant l'órdin, a sarà , $l_1\,\delta\varepsilon_1$, $l_2\,\delta\varepsilon_2$, $l_3\,\delta\varepsilon_3$. An corispondensa i l'avroma che 'l travaj virtual fàit da jë sfòrs an sle face opòste , $\boldsymbol{\Phi_1}$ **,** $\boldsymbol{\Phi_2}$ **,** $\boldsymbol{\Phi_3}$, a sarà dàit da:

$$\Phi_1\, l_2 l_3 \cdot l_1\,\delta\varepsilon_1 + \Phi_2\, l_1 l_3 \cdot l_2\,\delta\varepsilon_2 + \Phi_3\, l_2 l_1 \cdot l_3\,\delta\varepsilon_3 = \left(\Phi_1\,\delta\varepsilon_1 + \Phi_2\,\delta\varepsilon_2 + \Phi_3\,\delta\varepsilon_3\right)\cdot l_1 l_2 l_3$$

an efét i l'oma che lë sfòrs Φ_1 a agiss an dla fàcia $l_2 l_3$, e sta fòrsa a pròvoca la veriassion $l_1\,\delta\varepsilon_1$ e via fòrt. mentre i notoma che $l_1\, l_2\, l_3$ a l'é 'l volum dël paralelepìped e donca 'l travaj virtual[3] δT për unità 'd volum a sarà :

$$\delta T = \Phi_1\,\delta\varepsilon_1 + \Phi_2\,\delta\varepsilon_2 + \Phi_3\,\delta\varepsilon_3$$

Se adéss i consideroma che $\boldsymbol{a_1}$ **,** $\boldsymbol{a_2}$ **,** $\boldsymbol{a_3}$, a sio ij versor dle tre diression prinsipaj e che Φ a sia l'omografìa djë sfòrs (che a l'é na dilatassion) mentre α a l'é l'omografìa dla deformassion, i podoma scrive :

$$\delta T = \Phi\,\vec{a}_1 \times \delta\alpha\,\vec{a}_1 + \Phi\,\vec{a}_2 \times \delta\alpha\,\vec{a}_2 + \Phi\,\vec{a}_3 \times \delta\alpha\,\vec{a}_3 = \vec{a}_1 \times \Phi\delta\alpha\,\vec{a}_1 + \vec{a}_2 \times \Phi\delta\alpha\,\vec{a}_2 + \vec{a}_3 \times \Phi\delta\alpha\,\vec{a}_3$$

$$\text{e donca} \quad \delta T = I_1(\Phi\delta\alpha)$$

As peul dimostré (sì i lo foma nen), che lë scond member dla relassion sì dzora a l'é un diferensial precis. I l'oma che $I_1(\Phi\delta\alpha) = \frac{1}{2}\delta\, I_1(\Phi\alpha) = \delta T$. A sta mira i podoma definì na fonsion W tala che $W = \frac{1}{2} I_1(\Phi\alpha)$.

A arzulta che 'l travaj virtual arferì a l'unità 'd volum a l'é dàit da δW.

La fonsion W a l'é donca 'l potensial dle fòrse elàstiche arferì a l'unità 'd volum, ò potensial spessìfich ant ël pont P. A l'é donca l'energìa për unità 'd volum che l' còrp a l'ha, che a corispond al travaj fàit da le fòrse për la deformassion e al travaj che 'l còrp a peul fé se a torna a lë stat natural (sòn sempe arferì a l'unità 'd volum).Se S a l'é 'l volum dël còrp e ds a l'é un sò element, i podoma scrive che $V = \int_S W\, ds$ a l'é l'energìa elàstica total dël còrp.

L'energìa elàstica a peul esse dàita coma fonsion dle component dla deformassion, opura coma fonsion dle component djë sfòrs intern. Ant ël prim cas a interven-o le costant ëd Lamé e ant lë scond cas ël mòdul d'elastissità e 'l coeficent ëd contrassion.

Ant ël prim cas i podoma parte da la relassion $\Phi = 2\,\mu\, D\alpha + \lambda\,\theta$ ch'i l'oma vist prima, e dal moment ch'i l'oma 'dcò vist che $W = \frac{1}{2} I_1(\Phi\alpha)$. i podoma scrive:

[3] I arcordoma sempe che sì 'l travaj as dis T e nen L coma an italian.

$$W = \mu I_1(D\alpha \cdot \alpha) + \frac{1}{2}\lambda\theta^2$$

I pijoma na trien-a d'ass cartesian paraléj a j'ass coordinà e con l'orìgin an *P*. Com al sòlit ij versor ëd costi ass a son ***i, j, k***. I l'oma, antlora che $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, e peui

$$I_1(D\alpha \cdot \alpha) = I_1(D\alpha \cdot D\alpha) = D\alpha\,\vec{i} \times D\alpha\,\vec{i} + D\alpha\,\vec{j} \times D\alpha\,\vec{j} + D\alpha\,\vec{k} \times D\alpha\,i\vec{k}$$

Ma i l'oma che $D\alpha\,\vec{i} \times D\alpha\,\vec{i} = (D\alpha\,\vec{i})^2 = \left(\varepsilon_{11}\,\vec{i} + \frac{1}{2}\varepsilon_{12}\,\vec{j} + \frac{1}{2}\varepsilon_{13}\,\vec{k}\right)^2$ e via fòrt. An sostituend e fasend ij cont a arzulta che:

$$I_1(D\alpha \cdot \alpha) = \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2\right)$$

donca i l'avroma:

$$W = \mu\,[\,\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + \frac{1}{2}(\,\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2\,)] + \frac{1}{2}\lambda\,(\,\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\,)^2$$

Për esprime 'l potensial an fonsion dle component djë sfòrs i patoma anvece da l'espression ch'i l'oma vist : $D\alpha = \frac{1}{E}\left[(1+k)\Phi - k\,I_1\,\Phi\right]$

I stoma nen a arporté tuti ij passagi, i disoma mach che a la fin as treuva l' espression:

$$W = \frac{1}{2E}\left[(Xx + Yy + Zz)^2 - 2(1+k)(XxYy + YyZz + ZzXx) + 2(1+k)\left(Xy^2 + Yz^2 + Zx^2\right)\right]$$

Da lòn ch'i l'oma vist fin-a sì a arzulta 'dcò che:

$$\frac{\partial W}{\partial Xx} = \varepsilon_{11} \quad ; \quad \frac{\partial W}{\partial Yy} = \varepsilon_{22} \quad ; \quad \frac{\partial W}{\partial Zz} = \varepsilon_{33}$$

$$\frac{\partial W}{\partial Xy} = \varepsilon_{12} \quad ; \quad \frac{\partial W}{\partial Yz} = \varepsilon_{23} \quad ; \quad \frac{\partial W}{\partial Zx} = \varepsilon_{31}$$

còsa che i pijoma për bon-a parèj, sensa andé 'd pì ant l'ancreus.

EQUASSION DL'ELASTISSITÀ

Le equassion dël moviment e dl'echilìbri ant un còrp elàstich omogéni isòtropo as treuvo aplicand j'equassion generaj ch'i l'oma vist prima. I continuoma a consideré variassion anfinitésime. I partoma da l'equassion general:

$$\rho\left(\vec{F}-\vec{a}\right)=\frac{\partial\vec{\Phi}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\Phi}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\Phi}_z}{\partial z}$$

andova le notassion a son cole ch'i l'oma dovrà a sò temp con $\boldsymbol{F}$ = fòrsa 'd massa për unità 'd massa, ρ = densità e $\boldsymbol{\Phi_x}$, $\boldsymbol{\Phi_y}$, $\boldsymbol{\Phi_z}$ a son jë sfòrs spessifich su element ëd pian ant ël pont P e normaj, ant l'órdin a j'ass coordinà x, y, z.

I disoma sempe che Φ a l'é l'omografìa djë sfòrs e α a l'é l'omografìa dla deformassion, con $D\alpha$ che a arpresenta la dilatassion ëd costa omografìa. Se $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ a son ij versor dj'ass coordinà, com i savoma, a l'é:

$$\vec{\Phi}_x=\Phi\,\vec{i}\quad;\quad\vec{\Phi}_y=\Phi\,\vec{j}\quad;\quad\vec{\Phi}_z=\Phi\,\vec{k}$$

e donca

$$\frac{\partial\vec{\Phi}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\Phi}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\Phi}_z}{\partial z}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}$$

e arcordand com i l'oma definì ël gradient ëd n'omografìa, i l'oma che

$$\frac{\partial\vec{\Phi}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\Phi}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\Phi}_z}{\partial z}=grad\,\Phi\quad\text{vis-a-dì che}\quad\rho\left(\vec{F}-\vec{a}\right)=grad\,\Phi$$

I l'oma vist che për deformassion anfinitésime l'omografìa djë sfòrs che a peòvoco na dàita deformassiom a l'é definìa, travers le costant ëd Lamé, da l'espression :

$$\Phi=2\mu D\alpha+\gamma\theta$$

Jë sfòrs intern dël còrp a son la reassion ugual e contrària a costi sfòrs estern e donca nòstr Φ, ch'i consideroma sì, a val : $\Phi=-2\mu D\alpha-\gamma\theta$

I l'oma 'dcò trovà che $D\alpha=\frac{d\vec{s}}{dP}-\frac{1}{2}rot\,\vec{s}\wedge$.

Fasend le sostitussion i trovoma che:

$$\Phi=-2\mu\frac{d\vec{s}}{dP}+\mu\,rot\,\vec{s}\wedge-\lambda\;div\,\vec{s}$$

$$grad\,\Phi=-2\mu\;grad\frac{d\vec{s}}{dP}+\mu\;grad\,(rot\,\vec{s}\wedge)-\lambda\;grad\,div\,\vec{s}$$

ma i l'oma vist che da la definission ëd gradient ëd n'omografìa as arcava che :

$$grad\frac{d\vec{s}}{dP}=grad\,\alpha=\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\,\vec{i}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha\,\vec{j}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha\,\vec{k}\right)=\frac{\partial^2\vec{s}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{s}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{s}}{\partial z^2}=\Delta_2\,\vec{s}.$$

e as mostra 'dcò che

$$grad\,(\,rot\,\vec{s}\,\wedge\,) = -rot\;rot\;\vec{s}$$

e che a val la fòrmula

$$rot\;rot\;\vec{s} = grad\;div\,\vec{s} - \Delta_2\,\vec{s}$$

e che donca i l'oma che che

$$grad\,(\,rot\,\vec{s}\,\wedge\,) = \Delta_2\,\vec{s} - grad\;div\,\vec{s}$$

A sta mira i podoma fé coste sostitussion ant l'equassion ch'i l'oma scrivù sì dzora për ël gradient, e scrive che:

$$grad\,\Phi = -\,\mu\,\Delta_2\,\vec{s} - (\gamma + \mu)\,grad\;div\,\vec{s}$$

opura 'dcò:

$$grad\,\Phi = \mu\,rot\,rot\,\vec{s} - (\gamma + 2\mu)\,grad\;div\,\vec{s}$$

Se i tnima cont che l'acelerassion $\boldsymbol{a}$ dël pont P a val $\partial^2\vec{s}/\partial t^2$, i podoma scrive l'equassion generalëd partensa ant la forma:

$$\rho\left(\vec{F} - \frac{\partial^2\vec{s}}{\partial t^2}\right) + \mu\,\Delta_2\,\vec{s} + (\lambda + \mu)\,grad\;div\,\vec{s} = 0 \quad \text{opura}$$

$$\rho\left(\vec{F} - \frac{\partial^2\vec{s}}{\partial t^2}\right) + \mu\,rot\,rot\,\vec{s} + (\lambda + 2\mu)\,grad\;div\,\vec{s} = 0$$

Costa a l'é l'equassion dël moviment ant un còrp elàstich, e l'equassion dl'echilibri as treuva butand a zero 'l termo $\partial^2\vec{s}/\partial t^2$, acelerassion dël pont.

Da costa equassion as peulo arcavé j'equassion scalar arcordand che *u, v, w,* a son le coponent dlë spostement ***s***, e che *X, Y, Z,* a son le component dla fòrsa e che $\theta = div\;\boldsymbol{s}$.

$$\begin{cases} \rho\left(X - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + \mu\,\Delta_2\,u + (\lambda + \mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = 0 \\ \rho\left(Y - \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) + \mu\,\Delta_2\,v + (\lambda + \mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = 0 \\ \rho\left(Z - \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) + \mu\,\Delta_2\,w + (\lambda + \mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Coste a son j'equassion indeterminà dël moviment, che a peulo esse arzolvùe butand le condission inissiaj e le condission ai lìmit, ò macassìa condission che a përmëtto ëd dè un valor a le costant d'integrassion.

Dé le condission inissiaj a veul dì dé posission e velocità, ëd tuti ij pont anteressà dal moviment, a un dàit temp pijà coma $t = 0$. Sòn a veul dì che a sto temp i l'avroma che le component $u, v, w, \dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial v}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial t}$ a saran fonsion conossùe dle coordinà *x, y, z.*

Le condission ai lìmit as arferisso a le condission a la surfassa chew a lìmita nòstr sistema e a peulo esse dàite coma sfòrs an sla surfassa, coma spostament an sla surfassa, opura coma sfòrs an 's na part e spostament an 's n'àutra part dla surfassa midema. Sòn a dipend da le condission reaj dël problema che a venta arzòlve.

Equassion dël moviment con ël prinsìpi 'd Hamilton

Ël prinsìpi variassional ëd Hamilton, che a fà part dla Mecànica analìtica, a përmëtt na formulassion dla Mecànica clàssica che a peul esse motobin vantagiosa për arzòlve vàire problema. Ant la prima session, acenand a la Mecànica analìtica, i soma fërmàsse a la formulassion ëd Lagrange, e sì i vardoma mach lòn ch'a serv a nòstr but sensa andé pì ant l'ancreus.

Ël prinsìpi as peul apliché an manera fàcil cand a esist un potensial W dle fòrse elàstiche. I consideroma n'interval ëd temp da t_0 a t_1 e ant ògni istant ëd cost interval i consideroma në spostament virtual $\delta \boldsymbol{s}$ dlë spostament $\boldsymbol{s}$. I butoma che sto spostament virtual a sia zero ant ij doi estrem dl'interval ëd temp. Is arferima a figura 2, giusta për dé n'idèja.

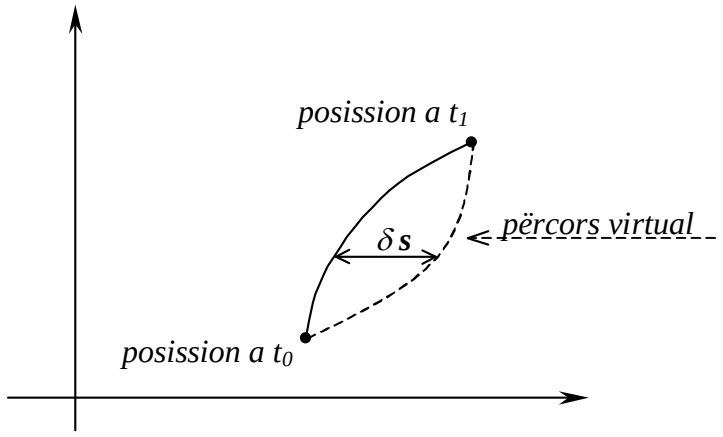

Figura 2 - Prinsipi variassional

Parèj, anvece che mach në spostament virtual d'un pont ò sistema 'd pont com ant ël prinsipi ëd D'Alembert, i finima për consideré un përcors virtual, socià a col real, che a part e a riva ant j'istéss pont. Su sto përcors l'energìa cinética Ec a l'avrà, ant ògni istant, na variassion virtual δEc , ël travaj virtual dle fòrse elàstiche a sarà ugual e contrari a la variassion virtual dl'energìa elàstica δV dël còrp, mentre le fòrse esterne a faràn un travaj virtual δT.

Second ël prinsìpi d'Hamilton a arzulta che :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta Ec - \delta V + \delta T\right) dt = 0$$

Se ρ a l'é la densità dël còrp, antlora i l'oma che $Ec = \frac{1}{2}\int_S \rho \left(\frac{\partial \vec{s}}{\partial t}\right)^2 dS$ andova S a l'é 'l volum dël còrp. Sòn a veul dì che :

$$\delta Ec = \int_S \rho \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} \times \delta \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} \cdot dS = \int_S \rho \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} \times \frac{\partial \delta \vec{s}}{\partial t} \cdot dS$$

e donca i l'avroma che :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta\, Ec\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_S \rho \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} \times \frac{\partial \delta\, \vec{s}}{\partial t} \cdot dS \right) dt = \int_S \rho \left(\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} \times \frac{\partial \delta\, \vec{s}}{\partial t} dt \right) dS$$

L'integral an *dt* an parèntesi a peul esse integrà për part e as oten che :

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} \times \frac{\partial \delta\, \vec{s}}{\partial t} dt = \left| \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} \times \delta \vec{s} \right|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} \times \delta \vec{s} \cdot dt$$

andova 'l prim termo (part integrà) a val zero, dal moment che $\delta \boldsymbol{s}$ a val zero ant j'estrem dl'interval.

An sostituend la fin as treuva che :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta Ec\, dt = -\int_{t_0}^{t_1} \left(\int_s \rho \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} \times \delta \vec{s} \cdot d \right) dt$$

Për ël travaj δT i consideroma che le fòrse esterne che a agisso a son le fòrse 'd massa dàite da $\rho \boldsymbol{F}\, dS$ e le fòrse 'd surfassa che i podoma indiché con $\boldsymbol{f_n}\, d\sigma$ e che a agisso an sj'element positiv estern dla surfassa σ dël còrp. Donca i l'avroma che :

$$\delta T = \int_S \rho \vec{F} \times \delta \vec{s} \cdot dS + \int_\sigma \vec{f}_n \times \delta \vec{s} \cdot d\sigma$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_S \rho \vec{F} \times \delta \vec{s} \cdot dS \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_\sigma \vec{f}_n \times \delta \vec{s} \cdot d\sigma \right) dt$$

Për l'energìa elàstica i arcordoma che $V = \int_S W\, ds$ con W com i l'oma definìlo ant ël capìtol prima. Donca i l'avroma che $\delta V = \int_S \delta W\, ds$ e 'dcò:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta V\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_S \delta W\, ds \right) dt$$

A sta mira a venta svilupé l'espression ëd δW partend da lòn ch'i l'oma vist ant ël capìtol prima. I l'oma che :

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{11}} \delta \varepsilon_{11} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{22}} \delta \varepsilon_{22} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{33}} \delta \varepsilon_{33} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{12}} \delta \varepsilon_{12} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{23}} \delta \varepsilon_{23} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{31}} \delta \varepsilon_{31}$$

A sta mira i definima ij vetor $\boldsymbol{W_1}$, $\boldsymbol{W_2}$, $\boldsymbol{W_3}$, che a son dàit (con ***i, j, k*** versor ëd j'ass) da :

$$\vec{W}_1 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{11}} \vec{i} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{21}} \vec{j} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{31}} \vec{k}$$

$$\vec{W}_2 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{12}} \vec{i} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{22}} \vec{j} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{32}} \vec{k}$$

$$\vec{W}_3 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{13}} \vec{i} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{23}} \vec{j} + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{33}} \vec{k}$$

A l'é fàcil vëdde che i podoma scrive

$$\delta W = \vec{W}_1 \times \delta \frac{\partial \vec{s}}{\partial x} + \vec{W}_2 \times \delta \frac{\partial \vec{s}}{\partial y} + \vec{W}_3 \times \delta \frac{\partial \vec{s}}{\partial z} =$$

$$= \vec{W}_1 \times \frac{\partial \delta \vec{s}}{\partial x} + \vec{W}_2 \times \frac{\partial \delta \vec{s}}{\partial y} + \vec{W}_3 \times \frac{\partial \delta \vec{s}}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{W}_1 \times \delta \vec{s}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{W}_2 \times \delta \vec{s}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{W}_3 \times \delta \vec{s}\right) - \left(\frac{\partial \vec{W}_1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{W}_2}{\partial y} + \frac{\partial \vec{W}_3}{\partial z}\right) \times \delta \vec{s}$$

Sensa fé tuti ij passagi, e aplicand le fòrmule 'd Gauss i disoma che :

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta V \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{\sigma} \left(\alpha \vec{W}_1 + \beta \vec{W}_2 + \gamma W_3\right) \times \delta \vec{s} \cdot d\sigma \right) dt - \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{S} \left(\frac{\partial \vec{W}_1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{W}_2}{\partial y} + \frac{\partial \vec{W}_3}{\partial z} \right) \times \delta \vec{s} \cdot dS \right) dt$$

andova α, β, γ a son ij cossen diretor dla normal a la surfassa positiva vers l'anfòra ëd $d\sigma$.

Adéss as peul arscrive l'equassion ëd partensa fasend le diferente sostitussion. as oten n'espression che a peul esse indicà coma : $\int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{S} A \times \delta \vec{s} \cdot dS + \int_{\sigma} B \times \delta \vec{s} \cdot d\sigma + \right) dt = 0$, andova

$$A = \rho \left(\vec{F} - \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial \vec{W}_1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{W}_2}{\partial y} + \frac{\partial \vec{W}_3}{\partial z}$$

$$B = f_n - \left(\alpha \vec{W}_1 + \beta \vec{W}_2 + \gamma \vec{W}_3\right)$$

andova i l'oma ciamà $\boldsymbol{f_n}$ lë sfòrs ëspessìfich estern che as esercita an dla surfassa elementar che a l'ha $\boldsymbol{n}$ coma normal (com i l'avìo già indicà).

Dal moment che lë spostament virtual $\delta \boldsymbol{s}$ a l'é d'autut arbitrari, përchè l'equassion a sia sodisfàita a venta ch'a sia :

$$\rho \left(\vec{F} - \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial \vec{W}_1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{W}_2}{\partial y} + \frac{\partial \vec{W}_3}{\partial z} = 0$$

$$f_n - \left(\alpha \vec{W}_1 + \beta \vec{W}_2 + \gamma \vec{W}_3\right) = 0$$

La prima 'd coste equassion a venta ch'a sia verificà an tuti ij pont dël volum S e la sconda an tuti ij pont dla surfassa σ.

Adéss i osservoma che as peul dimostré che për ij tre vetor $\boldsymbol{W_1}$, $\boldsymbol{W_2}$, $\boldsymbol{W_3}$ a valo le relassion:

$$\vec{W}_1 = -\vec{\Phi}_x \quad ; \quad \vec{W}_2 = -\vec{\Phi}_y \quad ; \quad \vec{W}_3 = -\vec{\Phi}_z$$

e che donca : $\alpha \vec{W}_1 + \beta \vec{W}_2 + \gamma \vec{W}_3 = -\Phi_n$ e sòn a veul d' che la prima dle doe equassion ch'i l'oma trovà a l'é l'equassion andefinìa dël moviment ant un còrp contìnuo e la sconda equassion a dà le condission ai lìmit.

Vibrassion lìbere

Se un còrp elàstich a ven deformà e a na dàita mira as gavo d'autut le fòrse che a pròvoco la deformassion, ël còrp as buta an moviment, e sto moviment, an general, a l'é vibratòri. Se an sël còrp a agisso nen fòrse da fòra, ste vibrassion a son lìbere.

Sto moviment a l'édëscrivù da j'equassion ch'i l'oma trovà sì dzora, andova i butoma a zero tute le fòrse esterne, tant ëd massa com ëd surfassa. Donca i l'oma :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{W}_1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{W}_2}{\partial y} + \frac{\partial \vec{W}_3}{\partial z}$$

$$\alpha \vec{W}_1 + \beta \vec{W}_2 + \gamma \vec{W}_3 = 0$$

dont la prima a l'é sodisfàita da ògni pont dël volum e la sconda da ògni pont ëd la surfassa. L'incògnita a l'é lë spostament $\boldsymbol{s}$, e le solussion a son anfinìe. Se as dan le condission inissiaj ëd posission e velocità, antlora la solussion a dventa ùnica.

La dimostrassion che costa solussion a l'é ùnica as fà suponend che a-i sio doe fonsion diferente dlë spostament che a sodisfo a j'equassion e a le condission inissiaj dàite e verificand che coste doe solussion a venta che a coincido. Sì i arportoma nen sta dimostrassion.

L'echilibri

Ant ël cas che un còrp elàstich che a sia deformà sota l'assion ëd fòrse esterne 'd massa e 'd surfassa, a venta che lë spostament a sodisfa a j'equassion ch'i l'oma vist, andova però l'acelerassion a val zero. Com i l'oma già vist, l'equassion a dventa:

$$\rho \vec{F} + \mu \Delta_2 \vec{s} + (\lambda + \mu) grad\, div\, \vec{s} = 0 \quad \text{opura}$$

$$\rho \vec{F} - \mu\, rot\, rot\, \vec{s} + (\lambda + \mu) grad\, div\, \vec{s} = 0$$

Se peui a son conossù jë sfòrs aplicà a la surfassa e se indicoma con $\boldsymbol{f_n}$ lë sfòrs spessìfich estern an sj'element ëd surfassa, antlora as gionta la condission ai lìmit : $\vec{f}_n + \vec{\Phi}_n = 0$. Se anvece a esse assegnà a son jë spostament. antlora la condission al lìmit a sarà $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_\sigma$.

As peul dimostré che cand a-i é na solussion për costa equassion, sta solussion a l'é ùnica.

Teorema dla mìnima energìa

Com i l'oma vist, l'energìa elàstica d'un còrp a peul esse arpresentà da $V = \int_S W\, dS$ mentre 'l travaj T fàit da le fòrse 'd massa $\boldsymbol{F}$ esterne e da j'é sfòrs $\boldsymbol{f_n}$ aplicà a la part ëd surfassa σ' a l'é dàit da: $T = \int_S \rho \vec{F} \times \vec{s} \cdot dS + \int_{\sigma'} \vec{f}_n \times \vec{s} \cdot d\sigma$. L'energìa potensial Ep dël còrp a sarà dàita da :

$$Ep = V - L = \int_S W\, dS - \int_S \rho \vec{F} \times \vec{s} \cdot dS - \int_{\sigma'} \vec{f}_n \times \vec{s} \cdot d\sigma$$

Adéss i consideroma un $\boldsymbol{s}$ che a corisponda a na configurassion d'echilìbri, e a parte da costa configurassion i doma në spostament virtual qualonque $\delta \boldsymbol{s}$, con la condission che sto spostament a sia zero an sla part σ'' ëd surfassa andova a son dàit jë spostament.

An sto cas a arzulta che : $\delta Ep = \delta V - \delta L = 0$. An efét

$$\delta Ep = \int_S \delta W\, dS - \int_S \rho \vec{F} \times \delta \vec{s} \cdot dS - \int_{\sigma'} \vec{f}_n \times \delta \vec{s} \cdot d\sigma$$

Ma da lòn ch'i l'oma vist prima i l'oma che :

$$\int_S \delta W \, dS = \int_\sigma \left(\alpha W_1 + \beta W_2 + \gamma W_3\right) \times \delta \vec{s} \cdot d\sigma - \int_S \left(\frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial y} + \frac{\partial W_3}{\partial z} \right) \times \delta \vec{s} \cdot dS$$

e donca fasend le sostitussion i l'oma che :

$$\delta Ep = -\int_S \left(\rho \vec{F} + \frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial y} + \frac{\partial W_3}{\partial z} \right) \times \delta \vec{s} \cdot dS - \int_{\sigma'} \left[\vec{f}_n - \left(\alpha W_1 + \beta W_2 + \gamma W_3\right) \right] \times \delta \vec{s} \cdot d\sigma +$$

$$+ \int_{\sigma''} \left(\alpha W_1 + \beta W_2 + \gamma W_3\right) \times \delta \vec{s} \cdot d\sigma$$

As vëdd ampressa che se la situassion a l'é d'echilìbri, antlora tuti e tre j'integraj a son uguaj a zero. Ij primi doi a son zero për le condission d'echilibri ch'i l'oma vist prima e 'l ters a l'é zero përchè i l'oma soponù che an sla part σ'' dla surfassa $\delta \boldsymbol{s}$ a sia zero.

Stabilità dl'echilibri

An echilibri l'energìa potensial total a deuv donca avèj në stat stassionari. As dimostra che per esse n'echilibri stàbil l'energìa total E a venta ch'a l'abia un mìnim. (Teorema 'd Dirichlet).

A venta fé atension a stabilì cand në stat stassionari a l'é un mìnim. An efét, i podoma consideré na variassion virtual prima dl'energìa, che i ciamoma $\delta_1 E$, socià a na variassion $\delta \boldsymbol{s}$ dlë spostament $\boldsymbol{s}$, e na variassion sconda dl'energìa, che i ciamoma $\delta_2 E$. (pensoma a le derivà prima e sconda che a servo a stabilì màssim e mìnim dle fonsion).

Në stat a l'é d'echilibri cand i l'oma che $\delta_1 E = 0$ e a sarà stàbil cand $\delta_2 E > 0$. Ma costa condission a l'é sempe sodisfàita se, ant le derivà dle component dla deformassion ε_{11} , ε_{22} . e via fòrt ... as considero mach ij termo linear. Se as considero ëdcò ij termo d'órdin superior, antlora as treuvo ed condission andova $\delta_2 E \leq 0$, e donca as buto an evidensa situassion d'echilìbri andiferent ò instàbil. Sòn a pèeul esse dimostrà.

Ma noiàutri, për adéss, is fërmoma sì.

++++++++++

Cola ch'i l'oma arportà ambelessì, pitòst ampressa, a l'é la teorìa clàssica dl'elastissità. Ant la prima session ëd coste Nòte i l'oma parlà d'elastissità an termo ëd misura sperimental dj'efét macroscòpich dl'elastissità dij còrp, orientà a la dëscrission dle caraterìstiche mecàniche dij materiaj, còsa motobin amportanta ant la técnica.

La teoria ch'i l'oma vardà ambelessì a l'é 'dcò a la base dla mecànica dij flùid, e a l'é për sòn che i l'oma svilupàla ambelessì.

Pàgina lassà veuida apòsta