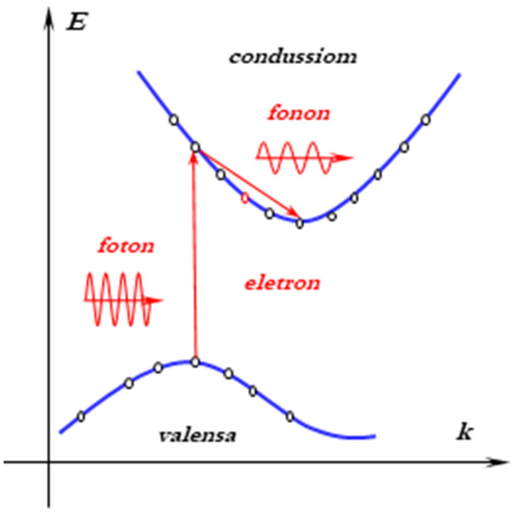
Carlo Demichelis

Nòte ëd n'arsercadur an oension (material amatorial)

Fìsica

Mecànica Quantistica

Session ses



Socià al pòst amatorial dla ragnà

http://digilander.libero.it/dotor43

pàgina veuida

Prefassion e avertense

Ël but ëd costa session a l'é sempe l'istéss ëd col ch'a l'ha portà a campé giù le session ch'a ven-o prima.. I arpetoma che, belecheé l'autor a sia un fìsich e a l'abia fàit l'arsercador tuta soa vita ëd travaj, vist che a l'é mai stàit sò mesté ël mostré a l'Università, tut ël material arportà ambelessì a venta che a sia pijà coma **diletantistich**.

An efét ste nòte a son sempe socià al pòst “web” (an italian a-j diso “sito” e "web" a stà për "ragnà") amatorial, e pròpi mach amatorial*,* [***http://digilander.libero.it/dotor43***](http://digilander.libero.it/dotor43) ëd l'autor (vis-a-di: mi).

Sì i vardoma, sensa andé tròp ant l'ancreus, ij pont ëd partensa e le implicassion prinsipaj dla Fìsica Quantìstica. An sl'interpretassion ëd tuta la teorìa ancora adéss as discut, e noi is pijoma bin varda d'intré ant la discussion. Com a l'é capità për la Relatività, ëdcò për la Mecànica Quantistica (e ambelessì fin-a 'd pì) a l'é necessàri un cambi 'd mentalità rispét a la "tranquila sicurëssa" dla Fìsica clàssica, ma noi i voroma nen intré an costion filosòfiche. Pitòs an anterésso coj arzultà che a përmëtto d'antërpreté la Fìsica dj'àtomo, dle molécole dij cristaj e dle radiassion che a son necessàrie ant lë studi dl'eletrònica.

Ant ël cors dla tratassion, an particolar an prinsìpi, i arciamroma còse che i l'oma dësgià dit ant le session prima, quaicòs i arpetroma e për quaicòs is contentroma 'd dé j'arferiment. Pì che intré ant ël formalism che a ven ëd sòlit dovrà ant la mecànica quantìstica, i vardoma dë s-ciairì ij concét.

Ëdcò për costa part i foma donca 'l sòlit travaj.

I arcordoma giusta che fin-a tre "pare" dla Mecànica Quantìstica a disìo che se quaidun a l'era nen bolversà da la teorìa quantistica l'era përchè a l'avìa nen capila)N. Bohr), che pì la teorìa quantìstica a arzolvìa 'd problema pì a smiijava na ròba da mat (A. Einstein), e che gnun a capìa la teorìa quantìsrica (R.P. Feyman). An efét vàire còse a l'han nen na giustificassion teòrica, ma mach sperimental, e vàire ipòtesi a son acetà mach përchè a corispondo a lòn che as peul misuré- I podoma consolesse.

pàgina veuida

Indes general dle part

- ***Part un - Origin - Prinsìpi 'd base*** - An costa part i vardoma le rason che a l'han portà a fornulé la Mecànica Quantìstica e j'esperiment fàit për giustifiché j'ipòtesi che man man a vnisìo proponùe.. Tut sòn përchè la Mecàniva Clàssica a rivava nen a dëscrive lòm ch'a capitava s livél microscòpich.. Dòp ëd sòn i vardoma la Matemàtica dovrà da la M.Q. e i comensoma a antroduve ël formalism che a ven dovrà. A la fin i vardoma ij prinsìpi e ij postulà, sempe basà sj'esperiment, che a fan da base a lë svilup dla teorìa quanrìstica.
- ***Part doi - Partìcola quantìstica***- An costa part i comensoma a vëdde com as peul dëscrive ël moviment ëd na partìcola an vàire situassiom. I vardoma prima ël moviment ant na dimension, I parloma ëd partìcola lìbera, e peui dl'equassion de Schrödinger indipendenra dal temp. I vardoma peui la part'cola che as bogia an diferente situassion ëd oitensial, e i parlona dl'efét "tunel!.. I vardoma l'ossilator armònich. Ipassoma peui a consideré ël moviment an tre dimension e peui i acenoma a l'ossilator anarmònich. A sta mira i passoma a parlé dël nonent angolar, ëd moment angolar orbital e i comensoma a parlé dë "spin". Donca i tratoma ëd potensial sentral, e da sì i passoma a j'àtomo idrogenòid e a j'àtom di'idrògeno. A kaèèla fin i parloma dël jon molecolar d0idrògeno e dla relativa anliura-
- An costa part i comensoma con ël traté la molécola d'idrògeno e l'anliura che a ten ansema9j doi àtomo. Peui i passoma a parlé un èòch pì ant l'ancreus dlë spin, coma lë spin a càmbia le fonsion d'onda, e com as compòrto le partìcole identiche am base al valor ëd sò spin, comensand a consoderé doi boson e doi fermion. Da sì a ven peui ël prinsìpi d'esclusion ëd Pauli. Peui i passoma a consideré ij sistema ëd vàire partìcole e i tratoma dla simetrìa dle fonsion d'onda-. Apréss i vardoma l'òtomo con vàire proton ant la nos 3 la formassion dj'orbitaj a tòmich. I vardoma da davzin j'òtomo ij pì d'anterésse, l'eletronegatività e ij diferent tipo d'anliura. A sta mira i comensoma a parlé d'eletron confinà e dìorbitaj molecolar, për peui passé a consideré j'eletron ant ij sòlid, e la strutura a bande, con ël teorema ëd Bloch e ël modél ëd Kronig-Penney. I saroma ël discors con n'acennëd Mecànica Statistica Quantìstica, limità a lòn ch'as arferiss a le distribussion tèrmiche ëd Maxwell-Boltzmann, ëd Bose-Einstein, na pì che tut ëd Fermi-Dirac.

pàgina veuida

Part un - Orìgin e prinsipi ëd base

An costa part i vardoma le rason che a l'han portà a fornulé la Mecànica Quantìstica e j'esperiment fàit për giustifiché j'ipòtesi che man man a vnisìo proponùe.. Tut sòn përchè la Mecàniva Clàssica a rivava nen a dëscrive lòm ch'a capitava s livél microscòpich.. Dòp ëd sòn i vardoma la Matemàtica dovrà da la M.Q. e i comensoma a antroduve ël formalism che a ven dovrà. A la fin i vardoma ij prinsipi e ij postulà, sempe basà sj'esperiment, che a fan da base a lë svilup dla teorìa quanrìstica.

Tàula dla part un

Tàula dle figure dla part un

pàgina veuida

La Fìsica a la fin dl'eutsent

Fin-a a la sconda metà dl'eutsent la Fìsica Clàssica a smijava che a fussa rivà a arzòlve tuti ij problema conossù e che la soa lògica aplicassion e sò svilup a podèisso arzolve tuti ij probléma che a sarìo presentasse ant ël futur.

Ant ël camp dla Mecànica jë studi a l’avìo portà a na formulassion analìtica potenta e eleganta (Lagrange, Hamilton, Jacobi), mentre jë studi an sl’eletricità e an sël magnetism, a l’avìo dàit na spiegassion ëd tuti ij fenòmeno, e Maxwell a l’avìa formulà soe quatr equassion che a arsumìo an manera satìa tute ste teorìe.

Monsù Thomson (ò, për chi a-i ten ai tìtoj Lord Kelvin), vers la fin dël sécol ch'a fà disneuv a disìa che la Fisica a l'era n'ansema bin armonisà, tut ch'a filava seuli coma l'euli, ma a-i ero giusta doe cosëtte che 'ncora a dasìo quàich problema. Un-a a l'era l'esperiment ëd Michelson e Morely, che a cobiava nen con la teorìa e as savìa nen coma mai, e l'àutr a-i ero ij tentativ ëd giustifiché l'emission d'energìa fàit da Wien e da Rayleigh e Jeans che, ò da na mira ò da l'àutra, a fonsionavo nen.

Donca, pròpi mentre a smijava che tut a cobièissa an manera precisa, e che ògni fenòmeno a trovèissa na soa giustificassion analìtica an cost formalism, j’arzultà sperimentaj trovà an d’esperiment che man man a podìo esse fàit an manera sempe pì precisa, a l’han anvece comensà a dimostré che quaicòs a fonsionava nen, se as restava ant ël camp dla Mecànica ëd Newton e ij sò svilùp. Sòn a parte dal comportament dla lus e dle radiassion an general. Coste a j'ero misure a livél macroscòpich, ma cand l'é comensàsse a rasoné sla strutura dj'àtomo ij problema a son stàit ancora pì evident. Për arferìsse a lòn ch'a disìa monsù Thomson, a-i ero vnù fòra problema con la misura dla velocità dla lus e sò sistema d'arferiment (esperiment ëd Michelson e Morely), mentre 'dcò a cobiavo nen con j'esperiment le giustificassion clàssiche dl'emission d'energìa termica da part dla matéria (teorìe ëd Wien e Rayleigh-Jeans).

Parèj com a l’è capità për la Relatività (i l'oma vistlo ant la prima session, ùltima part), ëdcò la Mecànica Quantìstica a ven donca da la necessità ëd giustifiché j’arzultà sperimentaj, che a son motobin diferent da lòn che i dovrìo spetésse da le teorìe clàssiche, cand as comensa a fé d'esperiment an sël mond microscòpich, ò macassìa d'esperiment pì precis e an condission diferente da cole dl'esperiensa ëd tuti ij dì.

La Fìsica Clàssica e le lej ëd Newton a resto sempe ij pont ëd partensa e a peulo esse aplicà con pì che bon-a precision a tut ël mond macroscòpich, ma për dëscrive 'l comportament dël mond microscòpich a livél atòmich a deuvo esse integrà da d'àutri prinsìpi, che a corispondo motobin manch a cola che a l'é nòstra intuission, e che donca a ciamo un cambiament ëd mentalità, pròpi com i l'oma dësgià vist për la Relatività. An sostansa, ëdcò për la Mecànica Quantìstica as peul dì che la Mecànica Clàssica a l'é n'aprossimassion che a và motobin bin për quasi tut lòn ch'a serv an pràtica, ma për dàit problema spessìfich e për tut lòn ch'a l'é microscòpich (a livel d'àtomo, molécole, cristaj e via fòrt), a l'ha pont ed partensa che a peulo esse considerà d'autut sbalià.

Macassìa, sensa conòsse la Fìsica Clàssica, e an particolar la Mecànica Analìtica (Hamilton) a l'é nen possìbil studié la Fìsica Quantìstica (as peul nen parte da la Fìsica Quantìstica për studié Fìsica), ò almanch costa a l'é l'idèja dj'arsercador ij pì avosà.

La natura dla lus

Ai sò temp, Newton a suponìa che la lus a fussa fàita da partìcole, mentre Huygens, che a l'era 'dcò chièl dij temp ëd Newton, a pensava che la lus a fussa anvece fàita da onde. Newton a pensava a costa teorìa përchè, ant ij sò esperiment, a l'avìa nen arlevà d'efét d'interferensa e difrassion che a son caraterìstich dla propagassion për onde, ma Huygens a disìa che sòn a l'era mach dovù a la mancansa 'd possibilità, për col temp, ëd fé misure precise a basta, con dë strument sensìbij a basta. Le conossense e le possibilità dël moment a lassavo nen capì cola ch'a podìa esse la natura dla lus.

Parèj coma ij fenòmeno relativistich a j'ero nen evident a rason dla motobin àuta velocità dla lus e dle partìcole sub-atòmiche, rispét a le velocità dl'esperiensa e a rason dla mancansa 'd possibilità 'd precìse misure dël temp, parèj a l'era nen evident un fenòmeno ondulatòri con longhësse d'onda motobin pì cite dle pì cite còse ch'as savìjo manegé, e con stument con sensibilità tròp bassa.

An efét cand a l'é stàit possìbil butè ansema 'd misure pì precise, fàite peui da Young ant ël 1801 e da Fresnel coste a butavo an evidensa che la lus as comportava pròpi coma n'onda ch'as propaga, e che a-i era interferensa fra doe sors ëd lus coerenta, mentre sinquant'ani dòp (1850) Foucault a dimostra che la velocità dla lus a l'é diferenta ant l'ària rispét che ant l'aqua, còsa che a dimostrava la possibilità dla difrassion.

Dòp des ani (1860) Maxwell a l'avìa trovà na formulassion satìa dle lèj che a goerno eletricità e magnetism, e da sì as arcavava che ij camp elétrich e magnétich, sempe socià fra 'd lor cand a j'ero variàbij, a podìo propaghésse coma onde ant lë spassi con na velocità dàita da $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, e costa a l'era pròpi la velocità che a l'era stàita misurà për la lus. Subit dòp Hertz a dimostrava, da na mira sperimental, che j'onde eletromagnétiche a esisto dabon, e prima dla fin dël secol ch'a fà disneuv che la lus a fussa n'onda eletromagnética a l'era acetà da tuti. I vëddroma pì anans che pròpi a la fin dl'eutsent e an prinsìpi dël neuvsent sta convinsion a tornava a andé an crisi, sempe a rason ëd precis esperiment an 's l'emission e l'assurbiment dle radiassion. An prinsipi dël sécol ch'a fa vint a comensava a evidensiésse ël dualism paertìcola-radiassion che i vëddroma pì anans.

I l'oma già acenà a l'esperiment ëd Young dël 1801 ant la Session 4, Sotsession "Òtica geométrica", Part 4 (Introdussion a l'òtica fisica) pag. 195. I voroma arportélo ambelessì giusta për avèjlo sotman, vist che a peul esse arfàit, an d'àutre manere, për dé d'àutre informassion amportante (e sòn i lo vëddroma dòp).

Interferensa fra doe filure - Esperiment ëd Young

Is arferima a figura 1, andova i l'oma schematisà e semplificà cost esperiment fàit, com ant ël 1801, an manera ëd confermé la natura ondulatòria dla lus.

Ant la figura i l'oma n'onda pian-a che a riva përpendicolar an 's në scherm S_1, e donca con ij front d'onda paraléj a lë scherm midem. St'ónda a peul esse pensà coma prodòta da na sors a forma 'd pont, butà lontan da le scherm e an sl'ass fra le doe filure, an manera 'd podèj consideré le surfasse d'ónda pian-e.

Ant lë scherm a-i son doe filure paralele F_1 e F_2, e a na distansa gròssa da le schërm S_1 a-i è në scherm S_2 paralel al prim, andova as peul vëdde la lus che a riva da le filure. Le filure peui a son motobin longhe rispét a lòn ch'a son larghe, an manera che i podoma vardé 'l problema an doe dimension, second la session disegnà an figura. Ancora, ste filure a son motobin sutile.

I suponoma che l'onda pian-a che a riva contra lë scherm S_1 a sìa n'onda monocromàtica. Da le filure F_1 e F_2, che i suponoma esse strèite a basta (dimension parafonàbij a la longhëssa d'onda λ), a seurto doe onde coerente cilindriche generà da jë stessi front d'onda. Le filure a son a na distansa d fra 'd lor e lë scherm S_2 a l'è a na distansa D da lë scherm S_1, con $D >> d$

An slë scherm S_2 riva la lus da le filure e as forma n'imàgin dàita da bande ciàire antërcalà a bande scure. Coste a son dite "***frange d'anterferensa***". Për studié ste frange 'l procediment a l'è ilustrà sì sota.

I consideroma 'l pont genérich P an slë scherm S_2, che a l'è a distansa x da l'ass normal a lë scherm e che a passa për ël senter dël segment che a uniss le doe filure. Sto pont a arsèiv ël ragg s che a riva da F_1 e 'l ragg t che a riva da F_2. Dal moment che $D >> d$, i podoma consideré che 'l pont P a arsèiv da la diression r, doi ragg , che a parto con l'istéssa fase, dont la diferensa 'd camin òtich a l'è δ. Se φ a l'è l'àngol fra l'ass e la riga drita r, antlora i l'avroma che $\delta = d \sin \varphi$.

Antora i l'avroma che la diferensa 'd fase θ dle doe onde a sarà dàita da $\theta = \frac{\delta}{\lambda} 2\pi$. Sta diferensa 'd fase a sarà donca fonsion dl'àngol φ, e sostituend:

$$\theta = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \varphi$$

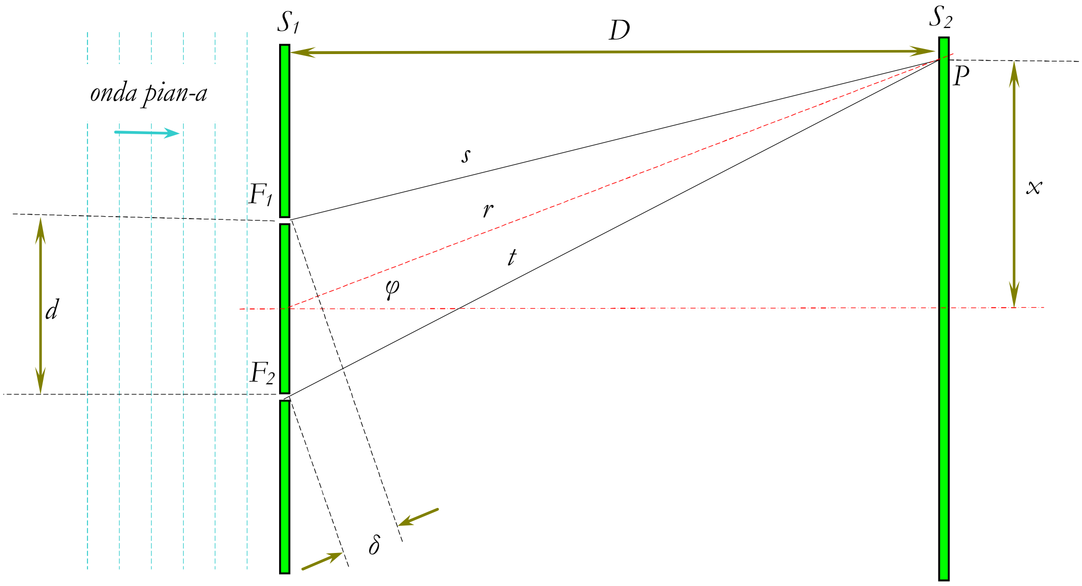


Figura 1 - Interferensa fra doe filure, sors d'ónde eletromagnétiche

Sòn a pòrta a n'intensità dla lus ant ël pont P dàita da:

$$I = 4 I_0 \cos^2 \frac{\theta}{2} = 4 I_0 \cos^2 \left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin \varphi \right)$$

andova I_0 a l'è l'intensità che a sarìa dàita da na filura sola (onda sférica).

Ël cossen al quadrà a val 1 cand so argoment a val $n\,\pi$, con n nùmer antrégh che a va da 0 anans, e a val 0 cand so argoment a val $\left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi$.

Da sì as treuva che l'intensità a presenta 'd màssim cand $\pi \frac{d}{\lambda} \sin \varphi = n \pi$ e donca $\sin \varphi = n \frac{\lambda}{d}$. A l'istessa manera i l'avroma ij mìnim d'intensità cand $\pi \frac{d}{\lambda} \sin \varphi = \frac{n+1}{2} \pi$ e donca $\sin \varphi = (2n+1) \frac{\lambda}{2d}$.

An pràtica a venta ten-e cont che le filure a l'han sempe na dimension finìa e donca quàich fenòmeno 'd difrassion da na filura a lo produvo.

A parte dal prim màssim an sl'ass, j'àutri màssim a son nen d'ampiëssa costanta, ma a calo man man che l'àngol a chërs.

Cand a l'é stàit fàit an prinsìpi dl'eutsent, st'esperiment a mostrava mach la natura ondulatòria dla lus, ma peui a l'é stàit la base për vàire d'àutre dimostrassion, a propòsit dël dualism dont i l'oma acenà, com i vëddroma pì anans.

Radiassion dël còrp nèir

Costa a l'é stàita la costion ëd base che a l'ha butà an evidensa, a la fin del sécol ch'a fa disneuv, la necessità d'arvëdde ij mecanism d'emission e assurbiment dl'energìa eletromagnética (calor, lus, etc,). Da sì a son peui derivà tute j'àutre consegoense.

Second la teorìa 'd Maxwell (e dl'eletromagnetism an general) ògni càrja elétrica an moviment nen costant a anraja energìa emëttend n'onda eletromagnética. Ògni còrp a temperatura pì àuta dël zero assolut a conten ëd càrie an vibrassion e a manda donca d'energìa, anrajà sot forma d'ónde eletromagnétiche, dont la lus a l'é giusta na cita frassion, e a l'istéss temp a arsèiv da fòra energìa mandà da tut lòn che a-i é antorna, fin-a a rivé a n'echilìbri, a na dàita temperatura T. An coste condission d'echilìbri i podoma definì për ël còrp un ***podèj d'emission*** e un ***podèj d'assorbiment***, che a son l'energìa che, ant l'unità ëd temp e për unità ëd surfassa, ël còrp a emet ò a assòrb. I podoma 'dcò consideré un ***coeficent d'assorbiment*** coma rapòrt fra l'energìa assorbìa e l'energìa arseivùa, dal moment che na part dl'energìa arseivùa a peul, an general, esse arbatùa.

La lus ch'i conossoma a ven anrajà mach a temperature bin àute (mentre cola che i l'oma antorna e che an fa vëdde j'ogét a l'è lus arbatùa), mentre a temperature pì basse l'anrajament a corispond a onde an sle frequense infra-rosse (calor), macassìa i ciamoma, ambelessì, sempe "lus" st'anrajament.

Ël "***còrp nèir***" a l'é stàit definì e studià da Monsù Kirkhhoff a parte dal 1859. As dis parèj un còrp che a assòrba tuta la radiassion che a-j riva dzora, sensa arbatne gnente (sòn a veul nen dì che a emëtta nen ëd radiassion, ma giusta che a arbat nen cola che a arsèiv). Donca sò coeficent d'assorbiment a val 1.

Na manera convenienta 'd consideré na situassion dë sto tipo a l'é cola 'd pensé a un gav sarà ant la matéria, che a peul conten-e opura nen d'autri còrp, con parete isolante, ël tut mantnù a na temperatura T, an echilibri con la radiassion ch'as produv ant ël gav midem.

Ant le parete dël gav a-i é un cit beucc che a lassa seurte na cita porsion ëd radiassion (che peui a serv për misura) sensa sfaussé la situassion, mentre se un ragg a intra ant ël beucc, dòp quàich arbatiment, a ven assurbì al complét, sensa an pratica gnun-e possibilità che na part a peussa seurte. Ël beucc as compòrta coma un còrp nèir a la temperatura T interna.

Ant ël gav ëd volum V as ëstabiliss n'energìa total U, che a sarà fonsion dla temperatura T. I ciamoma u la densità dl'energìa che as ëstabiliss ant ël gav. St'energìa për unità ëd volum as distribuiss su tute le frequense second na fonsion ëd "***densità spetral***" $u_\nu(\nu, T)$ ant ël sens che la quantità d'energìa për unità 'd volum ant l'interval ëd frequensa $d\nu$ a val $u_\nu(\nu, T)d\nu$. Donca l'é a natural che a sia: $u(T) = \int_0^\infty u_\nu(\nu, T)d\nu$.

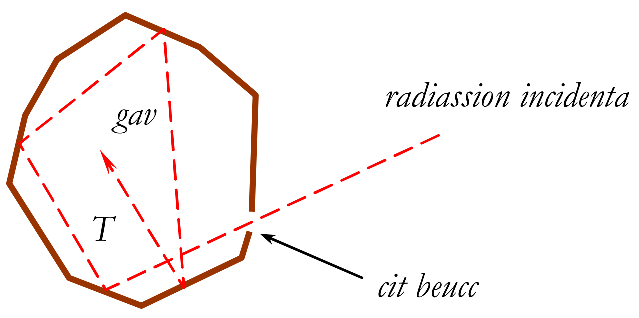


Figura 2- Arpresrntassion dël còrp nèir

Sensa fé tròpi cont e arferendse a la session sinch part eut ëd coste nòte (pag. 275-276), andova i l'oma parlà d'energìa e pression socià a na radiassion, e an particolar i l'oma che la pression p a val: $p = \frac{u}{3}$.

I comensoma a dì che la densità d'energìa u ant ël gav a dipend da la temperatura T, e as distribuiss an sle diferente frequense ant na manera che a l'é l'ogét dlë studi an sla radiassion dij còrp. As trata donca ëd giustifiché da na mira teòrica lòn ch'as peul misuré. I veddroma che da sì a l'é partìa la necessità dla Mecànica Quantìstica. An figura 2 i arportoma na schematisassion d'un còrp nèir.

Teorema ëd Kirkhhoff

Se is butoma da na mira teòrica as peul dimostré, coma monsù Kirkhhoff a l'ha dimostrà, che 'l podèj emissiv a dipend nen dal tipo ëd còrp e la fonsion $u_\nu(\nu, T)$ a dipend nen dal tìpo ëd gav considerà, da soa forma, dal material dovrà e via fòrt, ma a l'é na "***fonsion universal***". I podoma consideré, an efét doi gav coma coj arpresentà an figura 3.

As trata ëd doi gav A e B, che i suponoma diferent fra 'd lor, che a son portà da doi termòstato a l'istéssa temperatura T. I colegoma ij doi gav con un condutor ëd lus che a lassa passé mach na frequensa ν (filter ëd lus) e i gavoma ij termòstato.

I suponoma për assurd che la densità u_ν d'energìa socià a la frequensa ν a sia pì gròssa ant ël gav A che l'istéssa densità ant ël gav B. I suponoma donca ch'a sìa $u_\nu(A) > u_\nu(B)$.

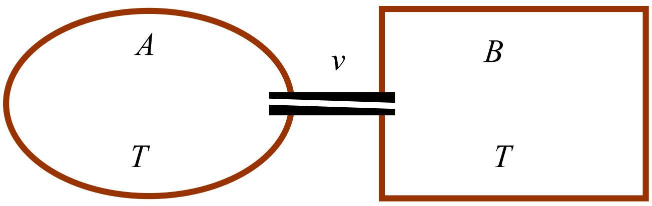


Figura 3 - Dimostrassion dël teorema 'd Kirkhhoff

Travers ël condutor ëd lus a-i sarìa un passagi ant ij doi sens d'energìa a la frequensa ν ma da A vers B sto passagi a sarìa pì àut che an sens contrari. Sòn a portrìa n'aument ëd temperatura ant ël gav B e na diminussion ant ël gav A, con passagi 'd calor da na temperatura pì bassa a un-a pì àuta sensa travaj da fòra. Ël sàut ëd temperatura a podrìa peui esse sfrutà për fé un travaj con un calor che a l'é partì a A e a torna an *A. Τυτ σ∫ν α λ϶∫ χοντρ◊ρι αι πρινσ∫πι δλα τερμοδιν◊μιχα, ε δονχα, α λ϶ιστεσσα τεμπερατυρα α ϖεντα χηε α σ∫α υν* $(A) = u_\nu(B)$, qualonque a sìo ij gav.

Relassion fra radiassion e densità spetral

As peul dimostré che ël podèj d'emission dël cit beucc che an nòstr gav as compòrta da còrp nèir, a corispond an manera direta a la densità spetral ant el gav. Se i ciamoma S sto podèj d'emission (energìa al second da l'unità 'd surfassa) as peul trové la relassion;

$$S = \frac{c}{4} u$$

La radiassion drinta al gav a peul donca esse studià da na mira teòrica dovrand le lèj dla termodinàmica, mersì a l'universalità dla distribussion spetral. La stéssa distribussion a peul esse misurà con l'emission dël còrp nèir.
A l'é stàit pròpi ël confront fra coste misure e torìe clàssiche che a l'ha portà a la formulassion dle prime lèj dla Mecànica Quantistica.

La lèj dë Stefan

Da na mira sperimental, monsù Stefan, a l'ha trovà la lèj che a anlìa l'emission d'energìa al second për unità 'd surfassa W con la temperatura T. Sta lèj a dis che :

$$W = \sigma \cdot T^4$$

andova për σ a l'é stàit trovà 'l valor $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \left[\frac{W}{m^2 K^4}\right]$.

I l'oma vist che l'energìa al second anrajà për unità 'd surfassa a l'é proporsional a la densità d'energìa interna $\boldsymbol{u}$, e donca i podoma 'dcò scrive sta lèj coma: $u = a \cdot T^4$.

La lèj dë Stefan-Boltzmann

A l'é l'istéssa lèj ed prima che monsù Boltzmann a l'ha dàje na giustificassion termodinàmica. Sòn a l'é amportant përchè a dis che 'l procediment segoì dal rasonament teòrich a l'é giust.

I consideroma un "***gav nèir*** " coma un ëd coj vist prima, che a l'àbia un volum V, con n'energìa interna $U = uV$ e na pression che, com i l'oma vist, a sia $p = u/3$. I aplicoma lë scond prinsìpi dla termodinàmica, andova S a l'é l'entropìa, e i scrivoma:

$$dS = \frac{dU + p\,dV}{T} = \frac{d(uV)}{T} + \frac{p\,dV}{T} = \frac{1}{T}(u\,dV + V\,du) + \frac{1}{T}p\,dV = \frac{1}{T}(u+p)dV + \frac{V}{T}\frac{du}{dT}dT$$

I consideroma antlora le derivà parsiaj dl'entropìa rispét al volum e rispét a la temperatura e i l'oma:

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{u+p}{T} = \frac{u + \frac{u}{3}}{T} = \frac{4u}{3T} \quad ; \quad \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{V\,du}{T\,dT}$$

e dal moment che dS a l'é un diferensial precis, a venta ch'a sia:

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right) = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right) \quad vis\text{ - }a\text{ - }dì \quad \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{u}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{V}{T}u'\right)$$

andova i l'oma indicà con u' la derivà ëd u rispét a T. Da sì as arcava l'equassion diferensial

$$\frac{1}{3}\frac{u'}{T} - \frac{4}{3}\frac{u}{T^2} = 0$$

La solussion ëd costa equassion, butand coma condission al contorn che $u(0) = 0$, a peul esse scrivùa ant la forma:

$$u = a\,T^4$$

La lèj ëd Wien

Sempe partend da considerassion termodinàmiche a l'é stàita dimostrà da monsù Wien la forma dla relassion che a anlìa la densità d'energìa ant un gav ëd coj ch'i l'oma vist con le variàbij ν e T. As treuva na dipendensa dël tipo:

$$u_\nu(\nu, T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

La dimostrassion ëd costa lèj a l'é motobin complicà ma a l'é pitòst fòra da nòstr but. Noiàutri is limitoma a pijéla për bon-a, e i notoma che a l'é dimostasse vera ant jë svilup ch'a son vnù dòp. Costa dimostassion a buta nen an discussion cola ch'a peul esse la fonsion f , ma mach la "forma" dla dipendensa dla densità spetral da fequensa e temperatra.

La lèj dlë spostament ëd Wien

I podoma scrive la fonsion $u_\nu(\nu, T)$ an termo ëd longhëssa d'onda λ anvece che an terrmo ëd frequensa ν, tnisend cont dla relassion $\lambda = \frac{c}{\nu}$. I l'avroma:

$$u = \int_0^\infty u_\nu\,d\nu = \int_\infty^0 u_\nu\left(\frac{d\nu}{d\lambda}\right)d\lambda = \int_\infty^0\left(-\frac{c}{\lambda^2}u_\nu\right)d\lambda = \int_0^\infty\left(\frac{c}{\lambda^2}u_\nu\right)d\lambda \equiv \int_0^\infty u_\lambda\,d\lambda \quad andova \quad u_\lambda(\lambda, T) = \frac{c}{\lambda^2}u_\nu(\nu, T)$$

Da sì as deriva n'àutra espression dla lèj ëd Wien andova a-i é na fonsion g che a dipend mach dal prodòt λT, andova prima a-i era la fonsion f che a dipendìa mach da $\frac{\nu}{T}$. La lej ëd Wien a dventa

$$u_\lambda(\lambda, T) = \frac{1}{\lambda^5} g(\lambda T)$$

Second la lèj dlë spostament ëd Wien, la frequensa (opura la longhëssa d'onda) che a corispond a la màssima emission a dipend an manera linear da la tenperatura T. An efét ël màssim an fonsion dla frequensa as treuva ant la condission:

$$\frac{d\,u_\nu(\nu, T)}{d\,\nu} = 0 \quad vis\text{ - }a\text{ - }dì \quad \frac{d\left[\nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)\right]}{d\,\nu} = 0 \quad opura$$

$$\frac{d\,u_\lambda(\lambda, T)}{d\,\lambda} = 0 \quad vis\text{ - }a\text{ - }dì \quad -\frac{5}{\lambda^6} g(\lambda T) + \frac{T}{\lambda^5} g'(\lambda T) = 0$$

e donca, se i disoma λ_m la longhëssa d'onda che a corispond al màssim d'emission, a venta ch'a sia :

$$5\, g(\lambda_m T) = (\lambda_m T) g'(\lambda_m T)$$

Se i foma la conversion ëd variàbil $x = \lambda\, T$, e i conossoma la fonsion g, i otnoma n'espression che a përmëtt ëd trové un $x_0 = \lambda_m T$ che a corispond al màssim rispét a x, e che a l'é na costant, còsa che as peul ëdcò vëdde da l'espression sì dzora Tornand a le variàbij ë partensa i l'oma donca che

$$\lambda = x_0 \frac{1}{T} \quad opura \quad \nu = w_0 T$$

andova i l'oma ciamà w_0 la costant che as troverìa travajand con le frequense.

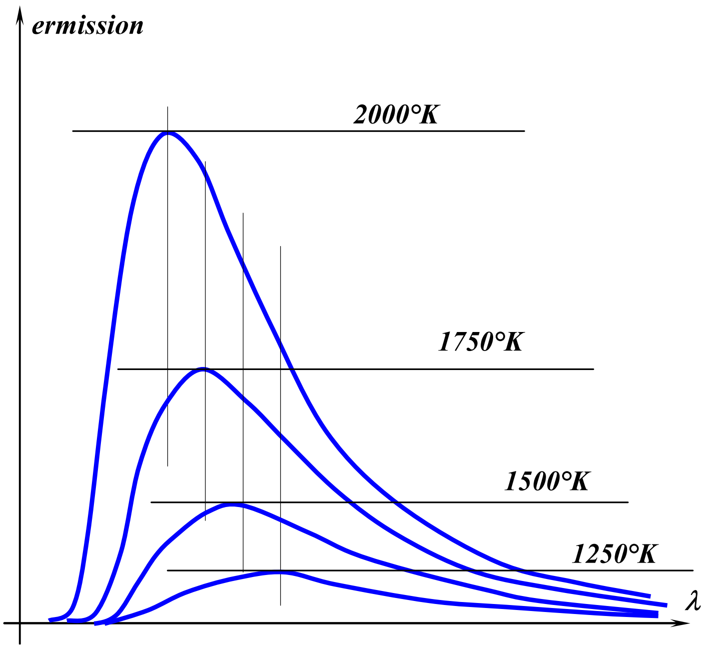


Figura 4 - - Emission an fonsion dla longhëssa d'ónda a diferente temperature

Ant lòn ch'i l'oma vist fin-a sì a-i son nen contradission fra la teorìa clàssica e j'arzultà sperimentaj.

I notoma giusta che an coste derivassion i l'oma nen fàit d'ipòtesi an sël coma a l'é fàita nòstra fonsion $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ che, com i vëddroma, a l'é pròpi la rason dla crisi dla Fìsica clàssica.

Fin-a sì le còse a fonsion-o, sempe considerand le lèj dla Fìsica Clàssica, e i rivoma a la fin dl'eutsent. I l'oma già vist com a l'é vnùita fòra la necessità d'elaboré la Realtività, e sì i vardoma com a l'é vnùita fòra la necessità dla Mecànica Quantìstica.

La figura 4 a mostra, an manera d'autut indicativa, ij dàit sperimentaj che a confermo la Lej dlë spostament ëd Wien.

Le novità dël prim neuvsent

I podoma consideré che 'l prinsìpi dla Mecànica Quantìstica a coincid con j'esperiment ëd monsu Planck, ant j'ùltim ani dl'eutsent e ij prim dël neuvsent, pròpi coma a l'é capità për la teorìa dla Relatività ch'i l'oma vist ampressa a la fin dla prima session, e 'dcò ambelessì le solussion proponùe për arzòlve ij problema butà da j'esperiment, e che a son dimostrasse bon-e a dëscrive ij dàit sperimentaj a l'han bin pòch d'intuitiv, e a ciamo un cambi ëd mentalità, contut che ij pont ëd partensa a sio sempe coj dla Mecànica Analìtica. e an particolar, la formulassion ëd Hamilton..

Misure dla radiassion dël còrp nèir

I l'oma vist fin-a sì jë studi an sla radiassion dël còrp nèir. Al moment ëd giustifiché an manera precisa l'anrajament parèj com a podìa esse misurà, la teorìa clàssica a l'ha comensà a pì nen andé bin.

Fòrmole ëd Wien e ëd Rayleigh-Jeans

Un tentativ d'antivëdde cola ch'a dovìa esse la distribussion an frequensa dla radiassion nèira a l'é stàit fàit da monsù Wien, che a l'ha provà con na fòrmola pitòst empìrica, giustificà da l'esse d'acòrdi con le lèj bin giustificà e viste prima e partend da ipòtesi pitòst ardìe. Tnisend cont dla dipendensa general trovà prima pròpi da chièl, monsù Wien a l'ha proponù che as podèissa scrive che:

$$u_{\nu}(\nu, T) = \frac{8\pi k}{c^3}\nu^3 e^{-\frac{b\nu}{T}}$$

giusta ciamà "***fòrmola ëd Wien***", andova a e b a son costant. I l'oma la dipendensa antivista da le variàbij ν e *T*, ma mentre sta lèj a cobia bin con j'arzultà sperimentaj a le frequense àute, a riva pròpi nen a giustifiché j'arzultà dle misure a frequense basse.

Partend da considerassion an sël camp eletro-magnétich, e dal fàit che a l'é stàit dimostrà che la radiassion a dipend nen dal particolar gav, e che donca as peul giusta consideré d'ossilator, a l'é stàita proponùa la "***fòrmola ëd Rayleigh-Jeans***".

As considera giusta n'ossilator ant un gav con parete arbatente ant un gas përfét nèutr che a interagiss con l'ossilator për urt, an manera che as riva a n'echilìbri con n'energìa média fonsion dla temperatura $E(T) = kT$. Da sto pont ëd partensa as riva, con un rasonament clàssich che i stoma nen a arporté ambelessì, a la fòrmola ch'i l'oma dit e che a l'é:

$$u_{\nu}(\nu, T) = \nu^3 \left[\frac{8\pi k}{c^3}\left(\frac{T}{\nu}\right)\right]$$

andova $k = 1{,}381 \cdot 10^{-23}\ JK^{-1}$ a l'é la costant ëd Boltzmann

Sta fonsion, però a l'é monotón-a ch'a chërs, e donca, se a l'é bon-a a dëscrive bin la situassion a frequense basse, a tira a l'anfinì con le frequense ch'a chërso.

Fòrmola ëd Planck

Studiand la manera ed giustifiché la fòrmola ëd Wien e sercand ëd modifichéla an manera che a andèissa bin a le frequense basse, andova as comensava a rivé a fé 'd misure, monsù Planck a scriv, dòp vàire tentativ, soa fòrmula ëd la distribussion, che a echival a la fòrmola ëd Rayleigh-Jeans a basse frequense e a cola ëd Wien a àute frequense ma, pì che tut, a cobia con ij dàit sperimentaj.

An definitiva Planck a l'ha ipotisà che n'ossilator a podèissa nen pijé tuti ij valor d'energìa con continuità, ma mach na sucession discréta 'd valor, mùltipl antregh ëd na quantità mìnima $\varepsilon = h\nu$, ciamà "quant

" d'energìa, andova h a l'é na costant universal, che a l'é stàita dita "costant ëd Planck ". Lòn ch'a càmbia a l'é donca l'espression dl'energìa média dl'ossilator. La fòrmola a l'é:

$$u_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}$$

La costant h a val $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Joule·sec.,

As peul noté che a frequense basse sta fòrmola a tira a esse cola ëd Rayleigh e Jeans, mentre a frequense àute a tira a esse cola ëd Wien. La costant k a l'é la sòlita costant ëd Boltzman. La figura 5 a ilustra la situassion da na mira qualitativa.

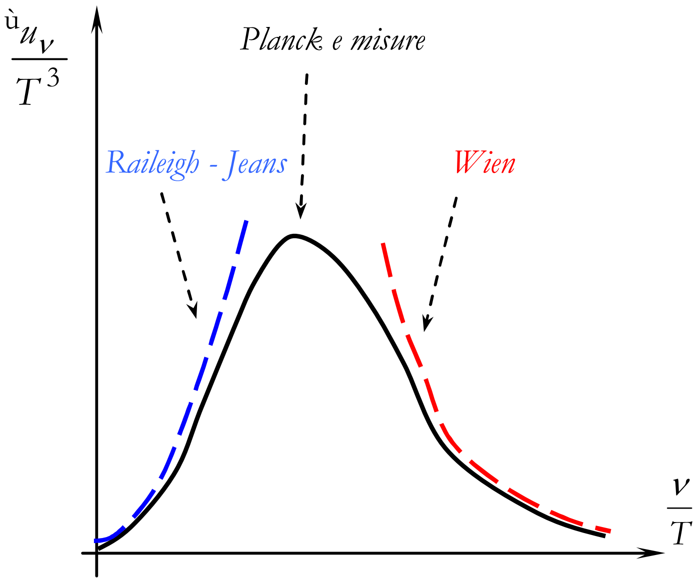


Figura 5 - Confront fra le fòrmole e ij dàit sperimentaj

Implicassion dla fòrmola 'd Planck

Dal moment che a l'é stait dimostrà prima che la densità d'energìa a dipend nen dal particolar gav, i podoma butèsse an condission sempie për calcolé sta densità, e donca 'dcò l'anrajament, partend dal consideré che l'energìa dla radiassion a sia prodòta da un sistema d'ossilator armònich. L'energìa ant l'unità 'd volum e an sle frequense da ν a $\nu+d\nu$ a sarà dàita donca da l'energìa media dj'ossilator che a son an coste condission. Ël nùmer dj'ossilator a l'é dàit da le manere normaj d'ossilassion ëd n'ónda stassionaria ant ël gav, vis-a-dì che i butoma che a ògni manera normal d'ossilassion dl'ónda a corispond a n'ossilator.

I suponoma un gav cùbich con lat L e i butoma che a-i sia periodissità an sle parete. Ógni manera normal d'ossilassion a l'é dëscrivùa da n' ónda pian-a dël tipo $e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$, donca 'l vetor ëd propagassion a sarà dël tipo

$$k_i L = 2\pi n_i \quad andova \quad n_i = 1, 2, 3, \cdots$$

As treuva 'l numer d'ossilator dN con frequensa fra ν e $\nu+d\nu$, che a corispondo a meud normaj d'ossilassion con vetor d'ónda fra k e $k+dk$, ant ël gav ëd volum $V = L^3$. Sto nùmer, dont i stoma nen a fé tuti ij passagi, a val :

$$dN = \frac{V}{\pi^2}\left(\frac{2\pi}{c}\right)^3 \nu^2 \, d\nu$$

Se, adéss, i ciamoma $\bar{\varepsilon}$ l'energìa media socià a costi ossilator, e i calcoloma la densità d'energìa a la frequensa antorna a ν i l'oma:

$$u_\nu = \frac{dN}{V\, d\nu}\,\overline{\varepsilon} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\,\overline{\varepsilon}$$

Second la fisica clàssica, as peul dimostré che për n'ossilator armònich, dont l'energìa a peul varié con continuità, la media dl'energìa a val $\overline{\varepsilon} = kT$, e as riva a trové la fòrmula ëd Rayleigh-Jeans che, i l'oma vist, a fonsion-a nen për vàire rason.

A sta mira monsù Planck a l'ha notà che l'istéss rasonament a peul porté a soa fòrmola, bastamach che as buta 'l postulà che l'energìa d'ògni ossilator a sia discreta e a peussa mach pijé ij valor :

$$E = n\,h\,\nu$$

An costa manera a l'é stàit arzolvù un pont ëd crisi dla Fìsica Clàssica, ma sòn a l'ha butà an crisi le concession clàssiche mideme. Da costa mira anans a venta aceté che l'energìa a l'àbia sta limitassion. L'importansa dë sto comportament a dventa gròssa an tuti ij fenòmeno microscòpich, mentre che për ij fenòmeno macroscòpich i podoma noté che la costant a l'é motobin cita, e donca sto comportament "quantisà" quasi sempe as riva nen a noté.

Pen-a sta giustificassion teòrica a l'é stàita presentà, da vàire arsercador a l'é giusta stàita considerà n'artifissi matemàtich che për boneur a rivava a simulé, ma nen a spieghé, i dàit sperimentaj, e sòn përchè a smijava (e a smija 'ncor adss) che a-i fusso gnun-e bon-e rason për che l'energìa a dovèissa esse quantisà.

Ij pont ëd crisi, macassìa, a vnisìo nen mach da l'emission dël còrp nèir, che macassìa a implicava nen misure microscòpiche, ma 'dcò da d'àutre misure a livél macroscòpich, e peui ëdcò a livél microscòpich, livél che an prinsìpi dël neuvsent as comensava a esse conossù e studià.

Ij "foton" d' Einstein

Ant ël 1905 Einstein, basandse an sle considerassion ëd Planck, e an sël fàit che ant ël gav ël camp eletromagnétich as compòrta coma n'ansema d'ossilator, a l'avìa suponì che nen mach l'energìa a podìa esse assurbìa e emëttùa an 's na dàita freqensa ν për valor discrét $h\nu$, ma che la radiassion ant na banda da ν a $\nu + d\nu$ a l'ha n'energìa U che a l'é dividùa an $n = U/h\nu$ "***foton***", com as tratèissa 'd corpùscoj andipendent ognidun d'energìa $h\nu$. Sto foton a dovìa esse nen divisìbil

Fenòmeno mach giustificàbij con ij "quant"

I arportoma sì sota quàich problrma sperimental che a dà arzultà diferent da coi antivist da la teoeìa clàssica e mach arzolvìbil con la teorìa dij quant.

Calor spessìfich a bassa temperatura

I consideroma un sòlid, fàit da àtomo che a l'han la possibilità d'ossilé su tre gré 'd libertà. Second lòn ch'i l'oma vist prima, i podoma dì che l'energìa média për àtomo $\overline{\varepsilon}$ an echilibri con la temperatura T, second la Fìsica clàssica a val:

$$\overline{\varepsilon} = 3\,k\,T$$

e për na mòle 'd costi àtomo, se N_A a l'é 'l nùmer d'Avogadro $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$, l'energìa total U a l'é:

$$U = \overline{\varepsilon}\,N_A = 3\,k\,N_A\,T = 3\,R\,T$$

andova $R = k \cdot N_A$ a l'é la costant dij gas, $R = 8{,}316$ [Joule/(mòle K°)] opura $R = 1{,}988$ [Cal/(mòle K°)]

A sta mira i trovoma 'l calor spessific a volum costant giusta fasend:

$$c_V = \frac{\partial U(T)}{\partial T} = 3 \cdot R = 5{,}964 \quad \left[Cal/\,(mole \cdot K°)\right]$$

e costa a va sota 'l nòm ëd "***Lèj ëd Dulong e Petit***".

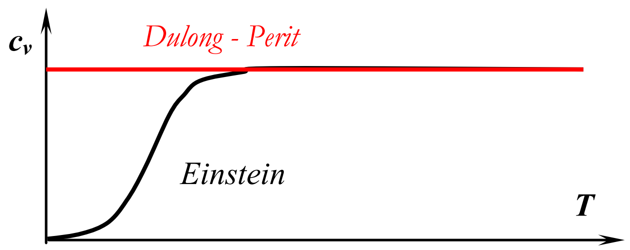
Comportament sperimental a bassa temperatura

Sta lèj a l'é bin verificà a le temperature dl'esperiensa comun-a, ma a fonsion-a pì nen cand la temperatura a cala motobin vers ël $0°$ assolut. Na cosa che a smija a sòn a càpita 'dcò a temperatura àuta, ma an col cas a-i é n' àutra spiegassion ant ël fàit che cand le ossilassion a son gròsse, a val pì nen l'aprossimassion armònica. La figura 6 a dà, an manera andicativa, lòn ch'a suced anvece a bassa temperatura

As peul vëdde che ij valor che as peulo misuré a bassa temperatura as arduvo fin-a a rivé a zero. Monsù Einstein, ant ël 1907 a l'ha dimostrà che c_v a tend a zero cand T a tend a zero, contut che peui l'andura andividoà a sia nen cola sperimental, ma a l'apròssima mach.

Sòn a càpita sempe se as sostituiss l'espression dl'energìa média clàssica con cola suponùa da Planck, e donca l'energìa ëd na mòle, se as supon che tuti j'àtomo a ossilo a l'istéssa frequensa ν, a dventa;

$$U = 3\, N_A\, \bar{\varepsilon} = \frac{3\, N_A\, h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$



:

Figura 6 - Calor spessìfich a bassa temperatura -

Ël fàit ëd consideré tuti j'àtomo con l'istéssa frequensa a l'é un pòch tròp n'aprossimassion, ma macassìa as treuva na solussion a la diferensa con la teorìa classica.

Se i suponoma temperature àute, costa fòrmula a dventa cola supòsta da Dulong e Petit, mentre a basse temperature l'espression dël calor spessifich a dventa:

$$c_V = \frac{\partial U(T)}{\partial T} = 3\, N_A\, k \left(\frac{h\nu}{kT} \right)^2 \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^2}$$

e për T ch'a tend a zero, c_v a và a zero. Na tratassion precisa a l'é stàita fàita da Debye, con na curva teòrica, sempe basà an sla quantisassion dl'energia, motobin pì davzin ai dàit sperimentaj, ma për noi a basta parèj.

Efét fotoelétrich

Con la teorìadij foton enunsià da Einstein, as treuva sùbit na giustificassion a lòn ch'as osserva studiand "***l'efét fotoelétrich***".

As trata d'eletron emëttù da un metal anluminà da na lus, e st'efét a peul esse evidensià con ël dispositiv ilustrà an figura 7, che a l'é col dl'esperiment ëd Lenard.

Ant n'àmola andova a l'é fàsse 'l veuid a-i son un fotocàtodo fàit ëd metal che a peul esse 'l metal an studi, e n'ànodo. An sël càtodo as peul fé rivé da fòra na lus a na dàita frequensa ν e con da dàita intensità. As supon che frequensa e intensità a peulo esse regolà, ò almanch sernùe vira për vira, parèj coma 'l material dël càtodo.

Ij doi elétrodo ant l'àmola a son colegà a un dobi generator ëd tension contìnua travers un potensiòmetro che a përmet ëd regolé la tension fra ànodo e càtodo, portandla da negativa fin-a a positiva. Un vòltmetro *V* a përmet ëd misuré costa tension. Un micro-amperòmetro peui a consent ëd misuré la corent, se a-i é, fra ànodo e càtodo. Se 'l càtodo a ven nen anluminà, qualonque a sia la tension fra càtodo e ànodo, ant l'àmola a passa nen corent. Se a ven anluminà a passa corent mach se la lus a l'ha na frequensa pì àuta d'un valor che a dipend dal material dël càtodo. Për frequense pì basse a-i é nen corent, a-i n'anfà nèn che intensità 'd lus as deuvra.

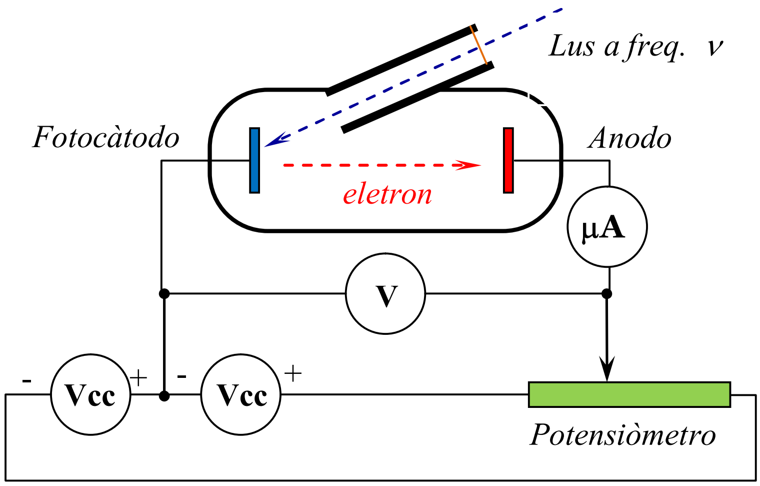


Figura 7 . Dispositiv për studié l'efét fotoelétrich

L'energìa cinètica dj'eletron emëttù a va da 0 a un màssim che a dipend nen da l'intensità dla lus, ma mach da soa frequensa.

Cand a-i é passagi 'd corent, costa a dipend da l'intensità dla lus dovrà. As nòta che 'l procéss d'estrassion a l'é istantani.

As peul misuré cola ch'a l'é l'energìa cinética dj'eletron cand a seurto dal càtodo, dasend a l'ànodo na tension negativa, e a sòn a servo ij doi generator e 'l potensòmetro colegà com an figura.

Na manera clàssica ëd giustifiché j'arzultà dl'esperiment as treuva nen. I podrìo consideré che an sla surfassa dël metal a-i sia un potensial ëd dobi seul, dàit da j'eletron periférich dj'àtomo dla surfassa, con sota le càrie positive dle nos, e che j'eletron che a seurto a sio eletron lìber ant ël metal, che a arsèivo energìa a basta për superé 'l dobi seul. A-i sarà donca un mìnim travaj da fé për porté fòra n'eletron, che a ven giusta ciamà "***travaj d'estrassion***", indicà con T_{es}.

La Fìsica clàssica a supon che l'eletron a peussa assòrbe energìa con continuità, e donca se as manda na radiassion débola distribuìa an sla surfassa, ògni eletron a arsèiv n'energìa al second che a sarà nen a basta a superé la bariera dël dobi seul, e l'eletron a venta che a acùmula energìa për un dàit nùmer ëd second prima 'd podèj seurte dal metal. Ël temp che a-i và për l'estrassion, e peui l'energìa dj'eletron che a seurto a dipendrìo da l'intensità dl'anluminassion. Sòn as verìfica nen.

Se i suponoma che la lus as propaga con foton, i l'avroma che n'eletron a assòrb un foton ant un ùnich at. Se l'energìa dël foton a supera ël valor dël travaj d'estrassion, l'eletron a peul seurte dal metal. L'energìa che l'eletron a l'ha cand a seurt a l'é lòn ch'a resta dl'energìa dël foton dòp avèj gavà 'l travaj d'estrassion.

Lòn ch'a conta, për podèj comensé a seurte, a l'é che l'energìa dël foton a sia superior al travaj d'estrassion, e sòn a giustìfica la frequensa dë scalin ν_0 necessaria.

Se 'l travaj d'estrassion T_{es} a l'é pì àut dla quantità d'energìa $h\nu$ dël foton a-i é nen estrassion d'eletron, a-i n'anfà nen vàire ch'a sio ij foton, e donca quant fort a sia l'anluminament. Se anvece 'l travaj d'estrassion a l'é pì bass dla quantità d'energìa $h\nu$ dël foton, bele mach un foton a peul estràe n'eletron.

An fonsion donca dël valor dël travaj d'estrassion T_{es} , a-i sarà në scalin lìmit për la frequensa ν dij foton che a peulo produve estrassion (efét fotoelétrich). I l'oma

$$T_{es} \leq h\nu \quad e \;\; donca \quad \nu \geq \frac{T_{es}}{h} \quad vis\text{-}s\text{-}dì \quad \frac{c}{\lambda} \geq \frac{T_{es}}{h} \quad e \;\; donca \quad \lambda \leq \frac{c\,h}{T_{es}}$$

andova c a l'é la velocità dla lus, e λ a l'é la longhëssa d'onda dla radiassion.

La lus a pòrta fòra dal metal d'eletron. I suponoma che tuta l'energìa dël foton a sia assurbìa da l'eletron. Na part ëd costa energìa a ven dovrà për fé 'l travaj d'estrassion, e lòn ch'a vansa a dventa energìa cinética dl'eletron midem, che adéss a l'é lìber, e che donca a peul avèj n'energìa qualonque. Se donca 'l foton a l'ha n'energìa $h\nu > T_{es}$, (i l'oma ciamà f la frequensa për nen fé confusion con v = velocità) l'energìa cinética dl'eletron ch'a seurt (i suponoma che as trata 'd n'eletron davzin a la surfassa) a sarà dàita da :

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = h\,f - T_{es}$$

andova m_e a l'é la massa dl'eletron e v soa velocità.

Se as dà na diferensa 'd potensial fra ànod e càtod, as peul misuré se, e quanta corent a passa. I consideroma che le variàbij che i l'oma a disposissionn a sio: Ël material dël càtod (a-i và në sfòrs ëd fantasìa a pensé ch'i lo peusso cambié fàcil, ma i suponoma d'arfé le preuve con diferent materiaj). La frequensa dla lus (an figura 8 i doma na manera 'd fé për sòn). La tension aplicà a l'ànod (da negativa a positiva rispét al càtod).

Se la tension anòdica V a l'é negativa, j'eletron che a seurto dal càtod a son arbutà andarera. L'energìa potensial fra ij doi elétrodo a l'é eV , andova e a l'é la cària dl'eletron. se l'energìa dij foton a l'é $h\nu > T_{es}$,

antlora l'energìa cinética dj'eleton a l'é, al màssim $\frac{1}{2} m_e v^2 = h\,f - T_{es}$. Cand la tension anòdica negativa a l'é tala che $\frac{1}{2} m_e v^2 = eV$, quàich eletron a riva fin-a a l'ànod e a comensa a passé corent. man man che la tension a dventa manch negativa e peui positiva, la corent a chërs fin-a a na dàita mita, e peui a resta costanta.. La corent, a sta mira, a peul chërse se as aumenta l'intensità dla lus.

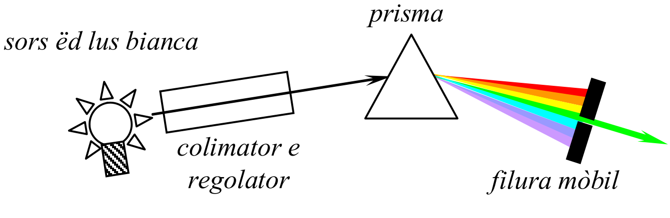


Figura 8- Schema d'un generator ëd lus a frequense diferente

Tut sòn, però, a càpita mach a parte da na dàita frequensa dla lus, diferenta për ògni material dovrà për ël càtod. Se na frequensa dla lus a pròvoca emission d'eletron, antlora as peul trové col ch'a l'é 'l travaj d'estrassion dël metal dël càtod, e l'intensità dla lus a giuta mach a avèj na sensibilità pì àuta, përchè a saran ëd pì j'eletron estrat, ma a càmbia nen, natural, l'arzultà dla misura.

An efét i conossoma la frequensa dla lus, e donca l'energìa dij foton, e i podoma trové la tension V che a comensa a provoché na corent ant ël sircuit, tension che i ciamoma tension d'arést V_{ar} . Da le doe espression ch'i l'oma scrivù sì dzora i arcavoma che $eV_{ar} = h\,f - T_{es}$ e donca $T_{es} = h\nu - eV_{ar}$. Ël potensial d'arésat a dipend nen da l'intensità dla lus.

A l'istéssa manera, dàit un material con un dàit valor ëd travaj d'estrassion, as peul calcolé la frequensa mìnima dla lus che a pròvoca emission fotoelétrica.

I arpetoma che la costant ëd Planck a val $h = 6{,}626069...\ 10^{-34} J \cdot s$, echivalent a $4{,}135628...\ 10^{-15}\ eV$, e che la velocità dla lus ant ël veuid a val $c_0 = 299792458\ \ m\ /\ s$.

Stabilità dj'àtomo

An prinsìpi dël neuvsent as comensava a fé d'ipòtesi su coma a podìa esse fàit n'àtomo. Vàire còse, e fra coste l'emission radio-ativa, a portavo a conclude che ant l'àtomo a dovìo essie tant carie positive coma càrie negative. Lassand perde le prime propòste dë strutura dl'àtomo, i podoma vëdde cola ëd Thomson, proponù e studià fra 'l 1903 e 'l 1906, che a suponìa n'àtomo con cària positiva dëstribuìa, che a l'era 'dcò quasi tuta la massa dl'àtomo midem, e j'eletron andrinta coma le grumele dj'angùrie.

Ma j'esperiment ëd Lenard ant ël 1903, però, a lo portavo a conclude che l'àtomo a dovie esse quasi veuid, con carie e massa consentrà, dal moment che j'eletron a passavo pitòst fàcil travers la matéria. An efét, Nagaoka, ant l'istéss ann a proponìa un modél planetari.

Ant ël 1911 Rutherford a l' ha suponù che a-i fussa na nos sentral positiva e che a contnéissa bele che tuta la matéria dl'àtom, e motobin cita, con d'eletron perifërich motobin lontan da la nos, an proporsion a soe dimension. J'eletron, për nen casché an sla nos a rason dl'atrassion fra càrie positive e negative, a l'avrìo dovù viré antorna a la nos për svilupé na fòrsa sentrìfuga gròssa a basta da compensé l'atrassion. Sòn a l'era suportà da n'esperiment fàit da Geiger e Marsden, darera consèj ëd Rutherford midem, ant ël 1908, a dasìa rason al modél d'àtomo con nos sentral cita e eletron estern che a lassavo lë spàssi ocupà da l'àtomo quasi veuid. An cost esperiment as misurava com a vnisìo devià 'd partìcole alfa slansà contra na lastrin-a 'd matéria motobin sutila. J'arzultà a j'ero, an manera motobin precisa, coj che as podìjo supon-e con la teorìa ëd Rutherford.

Ma 'dcò ambelessì la Fìsica Clàssica a podìa nen giustifiché lòn ch'a smijava rasonà second j'esperiment. An efét j'eletron negativ che a viro antorna a na nos positiva a son sotpòst a n'acelerassion sentrìpeta, che second l'eletromagnetism clàssich a dovrìo anrajé d'energìa, e casché motobin ampréssa an sla nos. Se as fan tuti ij cont second la Fìsica Clàssica as dimostra sùbit che 'l ragg ëd l'òrbita as arduvrìa motobin ampressa. Anvece l'àtomo a l'é stàbil. La radiassion emëttùa a cambierìa frequensa ansema a sto ragg, mentre gnanca 'l ragg ëd l'àtomo trovà ant j'esperiment a peul esse giustificà con la teorìa clàssica.

L'àtomo ëd Böhr

I l'oma tratà ëd cost argoment ant la session "***Eletricità e Magnetism***" - part set (pag. da 227 anans). Sì i arportoma lòn ch'an anteressa adéss e i lo completoma. Ël modél atòmich ëd Böhr a ven, oltra che da jë studi 'd Planck, ëdcò da j'arzultà djë studi an sjë spétr atòmich, basà su d'esperiment motobin precis. Ël modél a ven fòra giusta da la necessità ëd giustifiché jë spétr d'emission e d'assurbiment. Su costi a-i ero a disposission ij travaj ëd Balmer (ant ël 1885), ëd Rydberg e ëd Ritz (ant ël 1905).

An efét, le righe d'emission e d'assurbiment për l'àtomo d'idrògeno a l'han frequense che a son dëscrivùe da la lèj, dita ëd Rydberg - Ritz :

$$\nu = \overline{R}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

andova n, m a son antregh e a l'é $(m > n)$. mentre $\overline{R} = 3{,}39 \cdot 10^{15}\ \ sec^{-1}$ a l'é dita "***costant ëd Rydberg***".

Ipòtesi ëd Böhr për l'àtomo

Sti fàit a l'han portà Böhr, ant ël 1913, a formulé soe ipòtesi an sla strutura e an sël comportament ëd dl'àtomo. Böhr a scheuvr che as peul trové la fòrmola 'd Rydberg se as assum ***che 'l moment angolar ëd n'eletron, antorna a la nos, a peussa mach pijé valor dàit da la costant ëd Planck h moltiplicà për un nùmer antregh n e dividùa për 2 π.*** Valadì, se as supon n'órbita sircolar:

$$L = p\,r = n\frac{h}{2\pi}$$

andova L l'é 'l moment angolar dl'eletron suponend che a përcora n'òrbita sircolar ëd ragg r, mentre p a l'é 'l moment linear (ò quantità 'd moviment, impuls) e peui i dovroma 'l sìmbol $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, e donca $p\,r = n\,\hbar$

Ël rasonament ëd Böhr a l'era che 1) na cària che a vira a dovrìa emëtte ónde eletromagnétiche con na dàita energìa e un dàit moment angolar. Suponoma che ΔE a sìa l'energìa che a ven emëttùa ant un interval Δt, second Maxwell costa energìa a l'é socià al moment angolar ΔL second la relassion:

$$\Delta E = 2\pi\nu\,\Delta L$$

andova ν l'é la frequensa dla radiassion. Se la pì cita quantità d'energìa che a peul esse emëttùa a l'é un foton d'energìa $E = h\nu$, antlora la pì cita quantità 'd moment angolar che a peul esse emëttùa as arcàva sostituend ant l'espression sì dzora:

$$\Delta E = h\nu = 2\pi\nu\,\Delta L \quad \text{vis-a-dì} \quad \Delta L = \frac{h}{2\pi} = \hbar$$

Sto discors a l'ha portà Bohr a conclude che se 'l moment angolar a peul mach cambié për unità antreghe ëd $\hbar$ antlora ël moment angolar total për n'eletron ëd n'àtomo d'idrògeno a venta ch'a sia un mùltipl antregh ëd $\hbar$. Sòn a l'é nen pròpi lòn ch'a càpita, ma a l'era un pass anans për capì lòn ch'a sucedìa.

Sempe second j'ipòtesi ëd Böhr, se l'eletron ëd n'àtomo d'idrògeno a përcor n'òrbita sircolar, a venta che la fòrsa d'atrassion a sia ugual a la fòrsa sentrìfuga. L'energìa potensial U ëd n'eletron a distansa r da la nos a val $U = -\frac{kZe^2}{r}$, andova k a l'é la costant ëd Coulomb, che a val $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ e a soavira ε_0 a l'é la ostant dielétrica dël veuid, e a l'é la cària dl'eletron, mentre Z a l'é ël nùmer atòmich dla nos, che da sì anans i pensoma nos dl'idrògeno, e che për l'idrògeno a val 1. L'energìa total dl'eletrom a sarà l'adission dl'energìa cinética e 'd cola potensial :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{ke^2}{r}$$

andova m a l'é la massa dl'eletron e v soa velocità.

L'acelerassion sentrìfuga a val $a = \frac{v^2}{r}$ e la relativa fòrsa a val $F_s = m\frac{v^2}{r}$. La fòrsa d'atrassion a val $F_a = -\frac{ke^2}{r^2}$ e donca a l'echilìbri a venta che

$$F_s + F_a = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2}$$

Se i moltipòicoma ij doi mèmber dl'ùltima espression për $r/2$ as treuva che

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{ke^2}{r}$$

e donca i l'oma che l'enargìa cinética a val la metà dël valor assolut dl'energìa potensial. Dal moment che ste doe energìe a l'han segn diferent, l'energìa total a dventa $E = -\frac{1}{2}\frac{ke^2}{r}$

Amt j'ipòTesi ëd Bohr, com i l'oma vist, la transission da un livél d'energìa inissial E_i e un livél final E_f, a càpita con l'assurbiment ò l'emission d'un foton dont la frequensa ν a val

$$\nu = \frac{|E_f - E_i|}{h}$$

I l'oma vist, an sto modél, che ij livéj d'energìa discrét coma ij moment angolar, a son caraterisà da un dàit raggëd l'òrbita suponùa sircolar. I podoma scrive l'espression sì dzora esplissitand j'energìe inissial e final, e i trovoma

$$\nu = \frac{ke^2}{2h}\left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right)$$

Costa fòrmula a venta che a sia compatibil con la lèj ëd Rydberg-Ritz , e donca a venta che ij ragg dj'òrbite stàbik a sio proporsionaj a nùmer antrégh al qyadrà.. Per avèj na proporsionalità dë sto tipo a basta ipotisé che, com i l'oma vist an prindipi dj'ipòtesi ed Böhr, che a sia

$$L = pr = mvr = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

Ragg ëd Böhr

I l'oma vist che la relassion fra energìa cinéyica e energìa potensial a l'é $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{ke^2}{r}$, mentre i l'oma vist sì dzora che $mvr = n\hbar$. Da cost'ùltima espressiom i arcacoma che $v = \frac{n\hbar}{mr} \Rightarrow v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{m^2r^2}$ e sostituend e moltiplicand ij doi member për $2r$ i l'oma :

$$\frac{n^2\hbar^2}{mr} = ke^2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{n^2\hbar^2}{mke^2}$$

e is arcordoma che costa fòrmula as arferiss a l'àtomo d'idrògeno e donca për $Z = 1$ I savoma che ël livél fondamental a l'é col për $n = 1$, e donca ël ragg dl'òrbita dël livél fondamental dl'energìa dl'idrògeno a val

$$r_0 = a_0 = \frac{\hbar^2}{mke^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$$

Cost a l'é dit "***ragg ëd Böhr***". Se i consideroma un livél qualonque n, second sto modél as ved fàcil che ël ragg dl'òrbita a arzulta $r_n = a_0 n^2$.

I arcordoma che cost a l'é ël ragg ëd Böhr esprimù ant le unità dël sistena S.I. , ma sovens ant ël mond nicroscòpich as deuvro j'unità u.e.s. che a l'é edcò dit ël sistema CGSes. I stoma nen a parlç dë sto sistema, ma i disoma mach che la costant ëd Coulonb che ambelessì (sistena S.I.)i l'oma definì coma $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad \left[\frac{Nm^2}{C^2}\right]$, ant -el sistema CGSes a val $k = 1$.

A sto ragg ëd Böhr a l'é socià n'energìa total dl'eletron , second la lèj ch'i l'oma vist $E = -\frac{1}{2}\frac{ke^2}{r}$ che a dventa $E_0 = -\frac{1}{2} ke^2 \frac{mke^2}{\hbar^2} = -\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}$ andova $h = 2\pi\hbar$

I l' oma ciamà costa energìa E_0 e nen E_1 përchì i disoma che, an sto modél, për n'àtomo idrogenòid con nùmer atòmich Z a val la relassion (bin fàcil da dimostré) $E_n = -\frac{Z^2 E_0}{n^2}$ e a l'é ciàir che për l'àtomo d'idrògeno i l'oma $E_1 = E_0$..

L'àtomo a l'é nen bon a cambié soa energìa con continuità, ma a peul mach avèj un dàit nùmer dë stat stassionari, ò stat quàntich. L'energìa dl'àtomo a l'é donca quantisà ant un nùmer ëd livéj energétich E_i. Ël passagi da un livél energétich E_i a un livél energétich $E_j < E_i$ a l'é socià a l'emission d'un foton $h\nu = E_i - E_j$. A l'istessa manera l'assurbiment d'un foton d'energìa $h\nu$ a pròvoca 'l passagi da lë stat energétich E_j a lë stat energétich $E_i > Ej$ se $h\nu = E_i - E_j$.

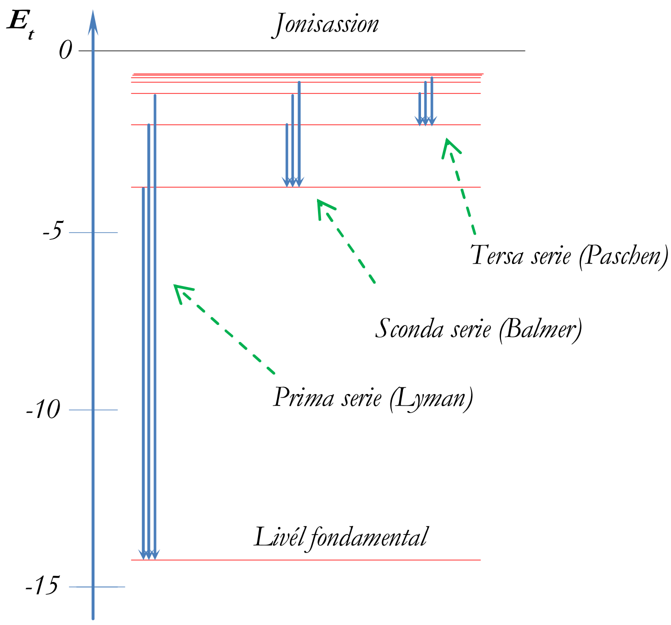


Figura 9- Giustificassion dlë spétr dl'idrògen

L'àtomo che as treuva al pì bass dij livéj a peul nen emëtte energìa, e donca a l'é stàbil. Costa posission a giustìfica la lèj empìrica trovà da Rydberg. Ògni àtomo a l'ha un sò spetr d'emission, ma për un dàit tipo d'àtomo lë spetr a l'é sempe l'istéss precis.

Se i consideroma l'àtomo d'idrògeno, che a l'é 'l pì sempi, i podoma artrové la lèj ëd Rydberg se i suponoma che l'energìa dij livéj possìbij a sia dàita da

$$E_n = -h\frac{\overline{R}}{n^2}$$

con $n = 1, 2, 3, ...$

Për ël livél fondamental E_1 as treuva $E_1 = -h\overline{R} \cong -13{,}6 \quad eV$ (sì i notoma che a peul vnì còmod consideré na costant $R = h\overline{R} \cong 13{,}6 \quad eV$). Ant lë spétr dl'idrògeno as treuva un prim grup ëd righe, che a ven da transission dai diferent livéj ecità, al livél E_1.

Ël livél che a ven sùbit dzora a sarà 'l livél E_2 con valor $E_2 = E_1/4$. Ant lë spétr dl'idrògeno as treuva në scond grup ëd righe, che a ven da transission dai diferent livéj ecità pì àut, al livél E_2.

Ël livél che a ven ancora dzora a sarà 'l livél E_3 con valor $E_3 = E_1/9$. Ant lë spétr dl'idrògeno as treuva un ters grup ëd righe, che a ven da transission dai diferent livéj ecità pì àut, al livél E_3.

An figura 9 i l'oma arportà sta situassion.

Esperiment ëd Franck e Hertz

A conferma dla teorìa 'd Böhr a l'é stàit fàit (1914), cost esperiment. As trata 'd provoché l'ecitassion d'àtomo fasendje bate contra d'eletron, e peui misuré l'energìa përdùa da j'eletron, che a corispond a cola assurbìa da j'àtomo. La figura 10 a mostra ël dispositiv dla misura.

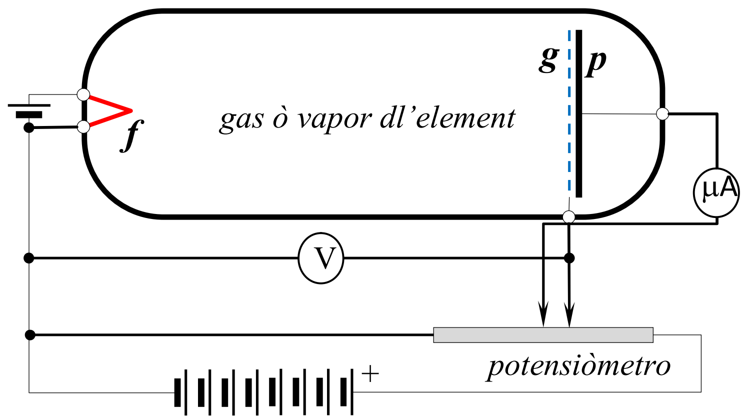


Figura 10- - Misura 'd Franck e Hertz

Ant l'àmola a-i é na sors d'eletron termojonich dàita da un filament f foà da na baterìa cita, e colegà a la massa dël sistema, andova a-i é colegà 'dcò 'l pòlo negativ dla baterìa anòdica. Ël filament a fà da càtodo. Ant l'àmola as treuva, a na dàita distansa dal càtodo, un grup ë doi elétrodo, dont ël prim ch'as ancontra rivand dal càtodo a l'é na grìja, che com a dis ël nòm a l'é na grija 'd fij condutor g che a lasso motobin dë spassi lìber, mentre le scond elétrodo a l'é n'ànodo ò placa p fàita da na piastrin-a contìnua. La distansa fra grija e placa a l'é 'd l'órdin dël milim.

Ant l'àmola, andova a l'é stàita gavà l'ària as treuva, a bassa pression, ël gas opura 'l vapor dla sostansa sota preuva. La baterìa anòdica a l'é colegà a un potensiòmetro dont as arcavo le doe temsion regolàbij për l'alimentassion positiva dla grija e dla placa.

La tension dla grija a ven tnùa un pòch pì àuta ëd cola dla placa, e sto scart a ven mantnù costant cand as vària la tension ëd grija. Con un potensial positiv an grija, j'eletron emëttù dal filament a son atirà da la grija (e da la placa). Rivà a l'autëssa dla grija, j'eletron che a treuvo ij fij a son caturà da la grija midema, ma na përsentual bin àuta, con l'energìa cinética che a l'han pijà, a contìnuo a andé vers la placa, superand sensa problema 'l cit contra-camp fra grija e placa. Costi ùltim eletron a van a produve la corent misurà dal micro-amperòmeter. I podoma vardé lòn ch'a càpita se i partoma da na tension motobin bassa (potensiòmetro tut a snistra), e i la foma aumenté pian pianin, misurandla con ël vòltmetro derivà fra càtodo e grija.

As misura sùbit na cita corent. J'eletron che a seurto dal càtodo a l'han na dàita energìa cinética generà da la temperatura dël càtodo midem. Se a-i é nen diferensa 'd potensial fra càtodo e grìja, j'eletron pen-a seurtì a formo na nivola negativa, mentre 'l càtodo midem, avend slansà d'eletron, a dventa positiv, e sòn a arciama andaré j'eletron dla nivola. As ëstabiliss parèj n'echilìbri con na zòna negativa ëd cària spassial antorna al càtodo. Se peui ël càtodo midem a l'é un filament alimentà dirét da na baterìa, antlora a càpita che a sia nen tut a l'istéss potensial. A-i é la manera 'd ten-e cont ëd tuti costi efét, e për adéss is na preocupoma nen.

Pen-a as dà a la grija un pòch ëd tension a comensa a passé corent, dal moment che quaidun dj'eletron termojònich a ven atirà dal camp elétrich. Aumentand costa tension la corent a aumenta, përchè a aumenta 'l nùmer d'eletron caturà dal camp elétrich. Costi a saran tuti j'eletron che a rivo a superé 'l pont andova as anula 'l camp negativ prodovù da la cària spassial dj'eletron. da col pont a la grìja la tension a l'é cola misurà dal vòltmetro.

J'eletron a peulo bate contra le molécole 'd vapor con urt elàstich, se soa energìa a riva nen a porté n'eletron dl'àtomo a un livél energétich superior. L'energìa cinética pijà da l'eletron a corispond a l'energìa potensial eV, andova e a l'é la cària dl'eletron e V la diferensa 'd potensial fra 'l pont ëd partensa e 'l pont andova as treuva l'eletron midem. Fin-a a cand a-i son mach d'urt elàstich, tuti j'eletron che a passo la caria spassial (che as arduv con ël chërse dla tension) a rivo al grup grija-placa con energìa cinética a basta për superé 'l contra-camp placa-grija, e, gavà coj che bato ant la grija midema, tuti j'autri a contribuisso a la corent misurà dal micro-amperòmetro.

La corent a chërs con la tension V fin-a a cand l'energìa eV ant lë spassi davzin a la grija a riva al valor dël sàut fra 'l prim e lë scond livél d'energìa dj'àtomo 'd gas ò 'd vapor present drinta a l'àmola.

A sta mira n'eletron termo-jonich a peul cede soa energia a n'eletron dl'àtomo, portandlo al prim livél superior d'energìa. Ma l'eletron termo-jonich, a sta mira, a l'ha perdù tuta soa energia, e donca a l'é bele che ferm; a riva donca pì nen a superé 'l contra-camp fra grija e plàca, e a ven arciamà an sla grija. An corispondensa ëd costa tension, che i disoma V_1, antlora as nòta che la corent ëd placa a diminuiss motobin ampressa, përchè 'l nùmer d'eletron che a rivo a costa energìa a chërs ampressa. A sta mira i podoma calcolé 'l sàut che a-i é fra lë stat fondamental E_1 e 'l prim stat ecità E_2. I l'avroma che $E_2 - E_1 = eV_1$.

Aumentand ancora la tension, j'urt anelàstich a comenso a capité sempe pì lontan da la grija, e dòp l'urt j'eletron a fan a temp a avèj energìa a basta për rivé a la placa, donca la corent a torna a chërse, fin-a a cand j'eletron a pijo energìa a basta për torna esse an condission d'ecité në scond àtomo davzin a la grija. Sòn a càpita a na tension V_2, cand $2 \cdot (E_2 - E_1) = eV_2$.

La stéssa còsa a càpita cand la tension a riva a un valor V_3 tal che $3 \cdot (E_2 - E_1) = eV_3$. A la fin as oten lòn che i arpresentoma an figura 11, fasend ël gràfich dla corent anòdica an fonsion dla tension aplicà. La figura as arferiss ai vapor ëd mercuri.

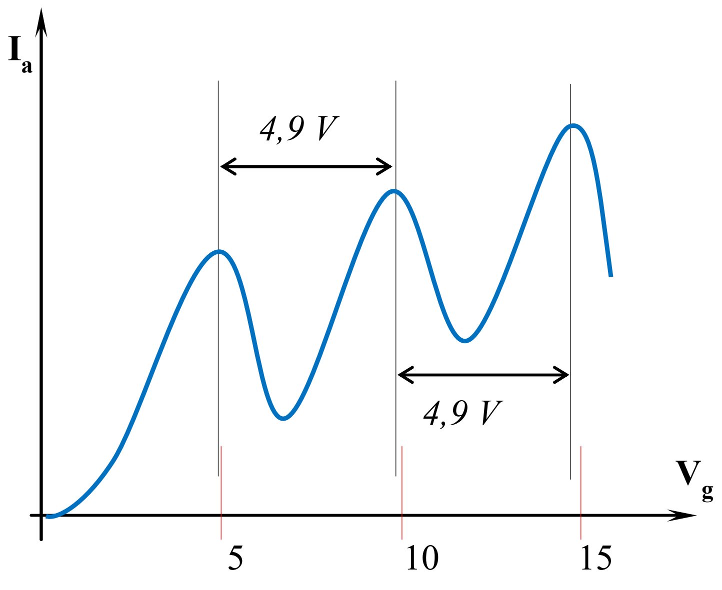


Figura 11 - Arzultà dl'esperiment ëd Franck e Hertz

La posission dël prim màssim a podrìa esse sfaussà da quàich eror sistemàtich, mentre as peul pijésse për n'indicassion pì bon-a la diferensa fra 'l prim e lë scond màssim.

As peul ëdcò verifiché, con në spetroscòpi, che an corispondensa al prim màssim, as verìfica n'emission ëd radiassion, da part dël vapor an esame, ëd na radiassion con na frequensa $\nu = \dfrac{E_2 - E_1}{h}$.

Sòn a conferma la teorìa 'd Böhr, contut che nen tuti ij problema a sio arzolvù. A venta ancora afinè e completé la teorìa, ma a ven dimostrà coma l'énergìa a peussa esse trasferìa mach për quantità discrete.

Efét Compton

Cost a l'é n'àutr efét che a ven spiegà bin mach da la teorìa dij foton. As trata dla variassion ëd frequensa 'd na radiassion cand a ven spatarà da un material che a conten eletron poch anlià. I consideroma un fluss ëd ragg X che a riva su un blòch ëd parafin-a. Lòn ch'as osserva a l'é arpresentà an figura 12.

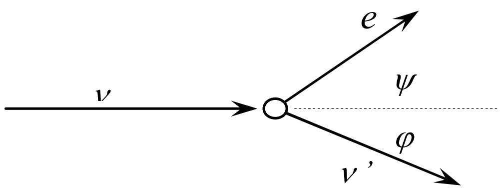


Figura 12- Efét Compton

La teorìa clàssica a dis che l'onda che a invest n'eleron a lo buta an vibrassion, e sto eletron vibrant a produv n'ónda che donca a dovrìa avèj l'istéssa frequensa dl'ónda incidenta. La spiegassion a ven anvece an manera sempia da la teorìa corpuscolar.

I l'oma vist che un foton as compòrta coma na partìcola 'd massa zero, dal moment che a viagia a la velocità dla lus, e ant la teorìa dla Relatività strèita i l'oma vist che se a l'ha n'energìa $E = h\nu$, antlora a l'ha na quantità 'd moviment (che a corispond ëdcò a l'impuls) $\left|\vec{p}\right| = \dfrac{E}{c} = \dfrac{h\nu}{c}$.

I suponoma che l'eletron a sia ferm, e sòn as peul fé mersì a la gròssa diferensa d'energìa fra foton ëd raj X e eletron pòch anlià ant la parafin-a. Ant l'urt ël foton a ven difondù ant la diression andividoà da l'àngol φ, mentre l'eletron a ven mandà ant la diression ψ. Ël foton dòp l'ùrt a l'avrà n'impuls che i ciamoma p' mentre l'eletron a pija n'impuls che i ciamoma P'.

I podoma scrive le condission ëd conservassion dl'energìa e dl'impuls. Prima 'd l'urt l'energìa dël foton a l'é $E = h\nu = pc$, mentre sò impuls a l'é $p = h\nu / c$. Per l'eletron i l'oma che l'energìa a l'é cola 'd massa $E = mc^2$, mentre l'impuls a val zero. I podoma esprime la frequensa ν an fonsion dla pulsassion ω, vis-a-dì $\omega = 2\pi\nu$. I definìma peui la costant $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$.

Energìa e impuls dël foton a ven-o antlora scrivùe

$$E = \hbar\omega \quad ; \quad \vec{p} = \hbar\vec{k} \quad ; \quad \left|\vec{k}\right| = \frac{\omega}{c}$$

andova i l'oma che ***k*** a l'é ël "***vetor d'onda***". Da la relatività i l'oma che l'energìa d'arpos E_0 ëd na partìcola a l'é anlià a soa energìa E e sò impuls p da la relassion $E^2 - p^2c^2 = E_0^2$ e donca

$$m_o^{\,2}c^4 + p^2c^2 = \hbar\omega \quad ; \quad m_o^{\,2}c^4 + \hbar^2\frac{\omega^2}{c^2}c^2 = \hbar^2\omega^2 \quad ; \quad m_o^{\,2}c^4 = 0 \quad ; \quad m_o^{\,2} = 0$$

che a dis lòn ch' i l'avìo supòst, che la massa d'arpòs dël foton a val zero.

Dòp l'urt i l'avroma che 'l foton difondù a l'avrà na pulsassion ω', con $\hbar\,\omega'$, e un vetor d'ónda $\boldsymbol{k'}$, che i l'oma da determiné. Da sì anans i ciamoma m la massa dl'eletron E soa energìa e p sò impuls. mentre che për ël foton i esprimoma energìa e impuls an termo ëd ω', $\boldsymbol{k'}$, $\hbar$.

Dòp l'urt, l'energìa e l'impuls dl'eletron a venta che a sodisfo a la relassion $E^2 = m^2 c^4 + c^2 \left|\vec{p}\right|^2$.

Për la conservassion dl'energìa a venta ch'a sia sodisfàita la condission $\hbar\omega + mc^2 = \hbar\omega' + E$ -mentre che për la conservassion dl'impuls la condission a l'é $\hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}' + \vec{p}$. I podoma scrive 'l sistema coma sì sota.

$$\begin{cases} \hbar\,\omega - \hbar\,\omega' = E - m\,c^2 \\ \hbar\,\vec{k} - \hbar\,\vec{k}' = \vec{p} \end{cases}$$

A sta mira i podoma porté al quadrà le doe equassion, moltipliché la sconda equassion për c^2 e peui sotrae la sconda da la prima. An costa operassion a venta ten-e cont che $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{k'}$ a son vetor, e che sò dobi prodòt a l'é un prodòt scalar. I l'oma

$$\begin{cases} (\hbar\,\omega)^2 + (\hbar\,\omega')^2 - 2\hbar^2\omega\,\omega' = E^2 + m^2 c^4 - 2\,E\,m\,c^2 \\ c^2\left(\hbar\,\vec{k}\right)^2 + c^2\left(\hbar\,\vec{k}'\right)^2 - 2\,c^2\hbar^2\vec{k}\cdot\vec{k}' = \vec{p}^2\,c^2 \end{cases}$$

$$e\ \ arcordand\ \ che\ \ \left|\vec{k}\right| = \frac{\omega}{c}$$

$$-2\hbar^2\omega\,\omega' + 2\,c^2\hbar^2\vec{k}\cdot\vec{k}' = E^2 + m^2 c^4 - 2\,E\,m\,c^2 - \vec{p}^2\,c^2$$

$$ma \quad p^2c^2 = E^2 - m^2c^4 \quad e\ \ donca$$

$$-\hbar^2\omega\,\omega' + c^2\hbar^2\vec{k}\cdot\vec{k}' = m^2 c^4 - E\,m\,c^2$$

$$ma\ \ i\ \ l'oma\ \ scrivù\ \ che \quad \hbar\,\omega - \hbar\,\omega' = E - m\,c^2 \quad donca$$

$$E = \hbar\,\omega - \hbar\,\omega' + m\,c^2$$

$$e\ \ donca\ \ ancora\ \ i\ \ podoma\ \ scrive: \quad -\hbar^2\omega\,\omega' + c^2\hbar^2\vec{k}\cdot\vec{k}' = m^2 c^4 - m\,c^2\left(\hbar\,\omega - \hbar\,\omega' + m\,c^2\right) \quad vis\text{-}a\text{-}dì:$$

$$-\hbar^2\left(\omega\,\omega' - c^2\,\frac{\omega}{c}\frac{\omega'}{c}\,cos\,\psi\right) = -\hbar\,m\,c^2\left(\omega - \omega'\right) \quad dividoma\ \ për\ \hbar\ \ e\ \ i\ \ arduvoma:$$

$$\hbar\omega\,\omega'\left(1 - cos\,\psi\right) = m\,c^2\left(\omega - \omega'\right)$$

Adéss i podoma 'ncora divide ij doi member për $m\,c^2\,\omega\omega'$ e i otnima $\frac{\hbar}{m\,c^2}\left(1 - cos\,\psi\right) = \frac{\omega - \omega'}{\omega\,\omega'}$

che a echival a scrive $\frac{\hbar}{m\,c^2}\left(1 - cos\,\psi\right) = \frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega}$ e se i dovroma le longhësse d'ónda $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ a la fin i otnima la relassion fra le frequense dël foton incident e dël foton difondù:

$$\lambda' - \lambda = 2\pi\frac{\hbar}{mc}\left(1 - cos\ \psi\right)$$

La longhëssa d'onda dël foton devià a dipend da l'àngol ëd deviassion, e j'arzultà dle misure a corispondo an manera motobin precisa a costa teorìa.

La natura corpuscolar dla lus butà an evidensa an costa manera, macassia a corispond nen a la natura corpuscolar suponùa da Newton. As buta pitòst an evidensa coma 'l foton a sia anlià a la frequensa dla lus, e che la natura corpuscolar e cola ondulatòria dla lus a son nen dividìbij.

Esperiment ëd Young

I l'oma vist an prinsìpi ëd nòstra ciaciarda che cost a l'é l'esperiment che a l'é servì a decide për la natura ondulatòria dla lus, an prinsìpi dl'eutsent, e an efét l'interferensa ce as nisuea a l'é bin hiustificà da la teorìa ondulatòria.

Se però i pensoma a la jus fàita da foton nen divisìbij e andipendent, a ven dificil capì com a peul un foton che a pasa da na filura, interagì con un foton chhe a passa da l'àutra filura, e nen mac lòn, dal moment che se is butoma an condission ga fé passé vers le ffilure mach un foton a la vira, dòp ël temp necessari, lle bande d'interferensa as formo franch istéss.

An figura 13 i arportoma lìesperiment, ma sta vira is atressoma për capì còs a fan ij foton. Ël ragg che da la sors a passa ant la prima filura, se costa a l'é strèita a basta, as propaga për onde sircolar, che a rivo a le doe filure dlë scond scherm. Da ste filure le onde as propago torna an manera sircolar, e a van via con fase coerente vers lë scherm butà an sël ters pian.

I l'oma, ambelessì, la possobilità ëd saré un-a dle filure, e lë schermàègni singol foton che a riva, còsa che as peul vëdde con un microscòpi.

I l'oma dit che l'esperiment a l'avìa dimostrà che la lus as propaga për onde Le righe d'interferensa a l'han forta intensità andova j'ónde a rivo an fase e intensità bassa (ò zero) andova j'ónde a rivo an contrafase. Sòn an fonsion dla diferensa dij përcors l_1 e l_2 . Se l'esperiment a l'é fàit con mach na filura duverta, antlora a-i nen interferensa. Con un-a dle filureb A opura B sarà, as forma giusta na figura ëd difrassion daré a la filura duverta.- Se as deurbo e as saro le filure an manera ëd fé passé an alternansa in foton da na paet e un foton da l'àutra, as dormo mach doe figure 'd difrassion daré dle doe filure. Se as buta un rivelator daré ëd na filura për conté ij foton che a passo, antlora le frange as dormo nen, tant coma saré la fillura. Le frange d'interferensa as formo mach con le doe filure duferte, contut cje ij foton a rivo mach un a la vira.

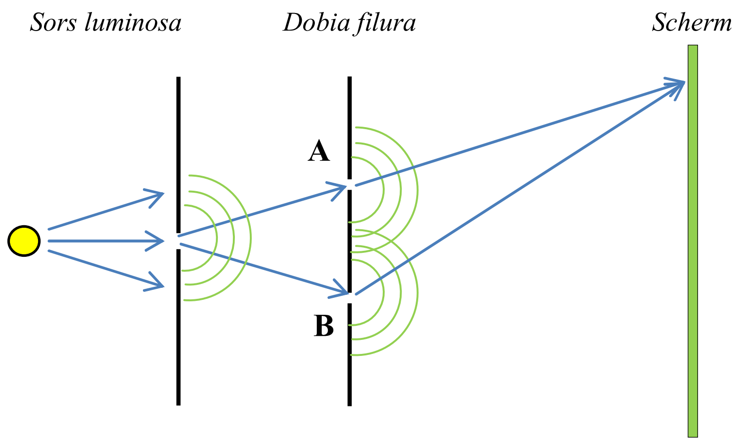


Figura 13- Esperiensa 'd Young

Se però as analiso ste frange con un microscòpi i podoma vëdde che la lus as distribuiss nen an manera uniforma con na variassion contìnua, com a farìa supon-e l'andament dl'intensità dl'ónda, ma pitòst as osservo ëd pontin luminos, ràir ant le fasse scure e s-ciass ant le fasse ciàire. An diferente zòne dl'istéssa fassa ij pontin a l'han l'istéssa densità, contut che a sio spatarà an manera che as dirìa casual. Ij pontin luminos osservà a son nen diferent fra 'd lor. Tut sòn a supòrtrìa la teorìa corpuscolar dla lus, che però a giustìfica nen ij bindéj d'interferensa.

Con ij oton che a passo un a la vira, as nòta che costi a passo sempe antrég da un-a dle doe filure e mai da tute dor ansema, e peui che ël passagi da un.a ò l'àutra dle filure a l'é nen prevedìbil.

Da considerassion dë sto tipo monssù Born a l'é rivà a na formulassion probabilìstica dla Mecànica Quantìstica, ma sòn i lo vëddroma peui.

Interpretassion dl'esperiment con la teorìa dij foton

I vardoma adéss se a-i é na manera dë spieghé l'esperiment ëd Young con la teorìa dij foton. Con la teorìa ondulatòria la spiegassion, com i l'oma vist, a l'é imedià. Da lòn ch'i l'oma dit prima, i podoma pensé che se mach un-a dle doe filure a l'é duverta a passa na distribussion che i podoma prevëdde, ëd foton che a seurto da la filura an tute le diression e a dan na dàita distribussion d'intensità an slë scherm, coma indicà da un-a dle righe nèire an figura 14. Duvertand le doe filure as oten nen la sempia adission dle distribussion nèire (riga rossa), ma as oten l'interferensa arpresentà da la riga bleuva.

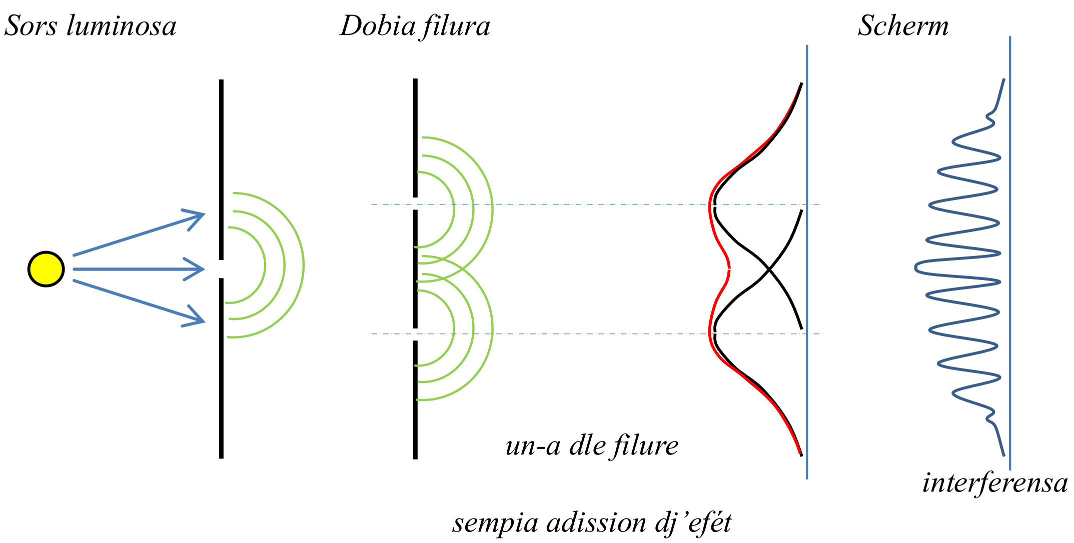


Figura 14 - Esperiensa 'd Young con un-a ò doe filure

As podrìa pensé che doi foton che a passo da le doe filure a peusso anteragì fra 'd lor prima 'd rivé an slë scherm, ma gnanca sòn a va nen bin, dal moment che i l'oma vist che pura se i foma passé un foton a la vira, e donca cand ògni foton a l'ha nen n'àutr foton da anteragìje ansema, ij bindéj d'interferensa as formo franch istéss.

Sòn a dis che as peul nen consideré ij foton mach coma corpùscoj, ma d'àutra mira se i mandoma an slë scherm mach pòchi foton, as forma quàich pontin spatarà, ma nen ij bindéj d'interferensa, gnanca motobin sbiadì, e donca la radiassion a peul nen esse considerà mach n'ònda.

Ij doi aspét, com i l'oma dësgià notà prima, a peulo nen esse dividù. L'idèja da svilupé a l'é che la radiassion as compòrta coma un fluss ëd partìcole che as compòrto an manera probabilìstica, e l'ónda a goerna sta probabilità.

An nòstr esperiment i podoma dì che se a l'é mach duverta la filura 1, antlora la probabilità ëd trové 'l foton an slë scherm a l'é dàita da $\left|\vec{E}_1\right|^2$. Sto valor a l'é donca la distribussion dij foton an sle scherm e donca dl'energìa luminosa (cand ij foton a son tanti). Se as deurbo le doe figure, torna la probabilità ëd trové ël foton an slë scherm a sarà dàita da $\left|\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right|^2$, e costa fonsion a dëscriv ëdcò ij bindéj d'interferensa.

A l'é ciàir che costa interpretassion a ciama un càmbi 'd mentalità. An nòstra esperiensa comun-a, se doi foton a peulo nen interferì fra 'd lor, i rivoma nen a trové na spiegassion a propòsit ëd còsa a càmbia, për un foton che a passa da na filura, se l'àutra filura a l'é duverta opura sarà.

I podoma gnanca fé 'd misure për savèj da che filura a passa 'l foton, dal moment che, se daré a na filura i butoma un rivelator ëd foton, an pràtica i saroma na filura e i cambioma tut l'esperiment.

Ancora 'd pì tute ste considerassion a valo cand a passé da le filure a son eletron e nen foton. Sòn i lo vëddroma dòp.

Esperiment dë Stern e Gerlach

N'àutr esperiment che a mostra j'eét dla quantisassion (cola ch'a l'éciamà "quantisassion spassial") a lié col dë Stern e Gerlach, ilustrà an figura 15. A l'é àit dovrand d'àtomo d'argent, che a l'é un material paramagnétich, e dona j'àtomo a l'han un sò moment nagnétich $\vec{M}$.

Un fluss d'àtomo d'argent a seurt slansà da na fornasa e a ven colimà da un colimator che a lo arduv a un fass che a viagia arlongh dl'ass y ëd figura. Ël fass a traversa un càmp magnétich d'indussion $\vec{B}$ che, mersì a la forma dj'espansion polar, a l'ha un gradient an diression z trasversal al moviment dj'àtomo. Costi a son donca sogét a un potensial $V = \vec{M} \cdot \vec{B}$.

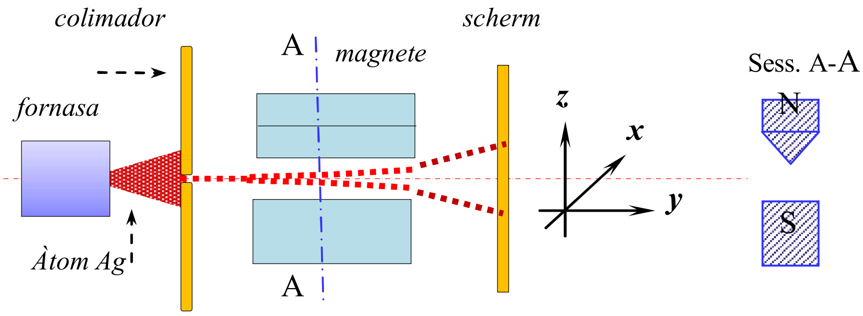


Figura 15- Esperiment dë Stern e Gerlach

As produv un moviment ëd precession ëd $\vec{M}$ anrorna a la diression ëd $\vec{B}$, mentre as ësvilupa na fòrsa media $\vec{F}_z$ dàita dal gradient del canp, e donca dël potensial, che a val $\vec{F}_z = M_z \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z}$., mentre la component M_z a dipend da l'orientament dl'àtomo com a seurt da la fornasa, che a l'é casual, e a dovrìa pijé con continuità tuti ij valoe da *-M* a *+M*. Sòn a produvrìa na trassa an slë scherm slongàantorna a l'ass z.

.Anvece as treuvo mach doi depòsit separà, un che a corispond a l'orientassion ëd M paralél a B , e l'àutr che a corispond a l'orientassion antiparalela. Sòn mostra che. contut che ij mment a sio orientà an manera casual cand j'àètomo a seurto da la sors, ant la misura a l'han mach doi orientament consentì. Donca jìorientament a son quantisà, ant ël sens che mach quaidun a ven trovà ant la misura. La misura midema a influensa l'arsìzultà e a stabiliss la diression ëd quantisassion.

J'ónde ëd de Broglie

Ant ël 1924 monsù deBroglie a l'ha ipotisà che, parèj coma un foton a l'é descrivù da n'ónda, për certi aspét, e da na partìcola për d'àutri, a l'istéssa manera as dovìa podèj socé n'ónda a na partìcola an moviment, ëd massa m a l'arpòs. An particolar de Broglie a l'ha ipotisà che për l'eletron, coma për ël foton, as peussa parlé 'd n'energìa $E = h\nu$, e ëd n'impuls $p = \frac{h}{\lambda}$. -

Da na mira concetual a l'é nen fàcil socé n'ónda a n'eletron, ma deBroglie a pensava, pr'esempi, che 'l comportament ëd l'eletron an sl'òrbita d'un àtomo d'idrògen a podèissa esse dëscrivù da n'ónda stassionaria an sl'òrbita. An efét, an sto cas, la condission che l'ónda a venta che a rispeta a l'é che an sl'órbita a-i sia un nùmer antregh ëd perìodo. Se r a l'é 'l ragg ëd l'órbita, antlora a deuv esse

$$n\lambda = 2\pi r$$

Ma se costa condission a l'é vera, antlora se i provoma a scrive col ch'a dventa l'impuls dl'eletron, i otnoma che

$$n\frac{h}{p} = 2\pi r \quad vis\text{-}a\text{-}dì \quad p\,r = n\hbar$$

e costa a l'é pròpi la condission ëd quantisassion ëd Böhr. Donca l'ipòtesi a l'é suportà an quaich manera.

Prima d'andé anans a l'é méj arciamé un pòch d'idèje su j'ondee eletromagnétiche ch'i l'oma vist ant la seddion sinch paer eut ëd coste nòre.

Arciam an sj'onde eletromagnétiche

An cost capìtol i vardoma ëd trové na manera rasonèivol ëd socé n'onda a na partìcola ch'a viagia. An efét i soma abituà a pensé nìonda coma n'entità che as ëspàntia a l'anfinìan tute le diression, e a na partìcola coma n'entità che as treuva ant un pont con soa massa m che a resta consentrà e as ëspatara nen ant lë spassi. I antroduvroma ëll pachet d'onde e soa velocità ëd grup. Ma partoma da j'onde pian-e.

Onde pian-e

Is arferima a la figura 16, andova i l'oma arpresentà na fonsion $\Psi(x)$ che i disoma "fonsion d'obda", an fonsion dlë spassi (is limitoma ambelessì a na sola dimension) ant un temp qualonque, Sta fonsion a arpresenta n'onda piaan-a, vis-a-dì n'onda dont ij pont con l'istessa fase a stan su pian ortogonaj a l'ass x.

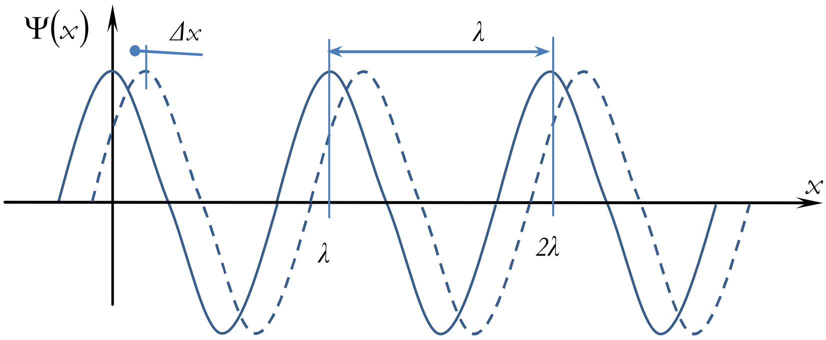


Figura 16 - Onda pian-a

Soa equassion a l'é $\psi(x) = A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$ e se i pensoma a n'ampièssa unitària: $\psi(x) = \cos\frac{2\pi x}{\lambda}$

St'onda a viagia ant la diression positiva dl'ass x e donca, dòp un temp t, a sarà spostasse d'un tràit Δx .Se u a l'é la velocità dlë spostament i l'oma che $\Delta x = u\,t$, e i l'oma 'dcò che la velocità u a l'é 'dcò dàita da la frequensa ν moltiplicà për la longhëssa d'onda λ. Donca $u = \nu\lambda$

I podoma scrive:

$$\Psi(x,t) = \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - \Delta x)\right] = \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - u\,t)\right] = \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - \nu\lambda\,t)\right] = \cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu\,t\right)\right]$$

Adéss i butoma che $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (nèmer d''onda) e $\omega = 2\pi\nu$ (pulsassion) . I l'oma donca:

$$\Psi(x,t) = \cos(k\,x - \omega\,t)$$

L'argoment dël cossen a l'é dit !fase", e i l'ona dit che l'onda pian-a a l'é caraterusà da ian an posission x a fase costanta, e donca për un qualonque x ant un dàit temp t i l'oma

$$kx - \omega t = cost \quad ; \quad x = \frac{\omega}{k} t + cost$$

La surfassa x = cost a fase costanta a viagia, ant la diression ëd x ch'a chërs, con na velocità:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

che ant ël veuid a val c velocità dla lus., ma al pòst dël cossen as peul dovré la fonsion sen r an general (vardé session sinch part eut) i l'oma

$$\Psi(x,t) = cos(kx - \omega t) + i\, sin(kx - \omega t) \quad ma\ i\ l'\ oma\ che: \quad cos\,\alpha + i\, sin\,\alpha = e^{i\alpha} \quad e\ \ donca$$

$$\Psi(x,t) = e^{i(kx - \omega t)}$$

e as peul ëdcò supon-e che ël moviment a sia vers x che a cala, e antlora, arfasend ij cont, l'equassion a dventa:

$$\Psi(x,t) = e^{i(kx + \omega t)}$$

Adission d'onde pian-e

Ambelessì an anteresso d'onde che a l'ùbio na longhëssa d'onda λ pòch diferenta. I suponsma donca che ògni onda a l'àbia na soa puksassion ω_j e un sò nùmer d'onda k_j, con ampissa A_j. I l'oma:

$$\Psi(x,t) = \sum_j A_j\, e^{i(k_j x - \omega_j t)}$$

I comensoma a adissioné fra 'd lor doe onde $\Psi_1(x,t) = e^{i(k_1 x - \omega_1 t)}$ e $\Psi_2(x,t) = e^{i(k_2 x - \omega_2 t)}$. An figura 17 i arportoma la part real dl'equassion $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$

An efét, se i adissionomaa le part reaj dj'onde i l'oma $\Psi(x,t) = cos(k_1 x - \omega_1 t) + cos(k_2 x - \omega_2 t)$

ma për le fòrmule ëd prostaferesi: $cos\, p + cos\, q = 2\, cos\frac{p-q}{2} \cdot cos\frac{p+q}{2}$ nòstra onda a dventa:

$$\Psi(x,t) = 2\, cos\frac{(k_1 x - \omega_1 t) - (k_2 x - \omega_2 t)}{2} \cdot cos\frac{(k_1 x - \omega_1 t) - (k_2 x - \omega_2 t)}{2}$$

$$\Psi(x,t) = 2\, cos\left[\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right] \cdot cos\left[\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right]$$

Ël prim fator dòp ël 2 a l'é l'ampiëssa A che a vària con na pulsassion $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ fra -1 e 1, mentre lë scond fator a l'é l'onda con pulsassion média fra le doe ëd partensa.

L'ampiëssa

$$A = 2\, cos\left[\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right]$$

anlup ëd l'onda, as ëspòsta 'dcò chila vers driya con na ***velocità ëd grup*** v_g che a val:

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \; .$$

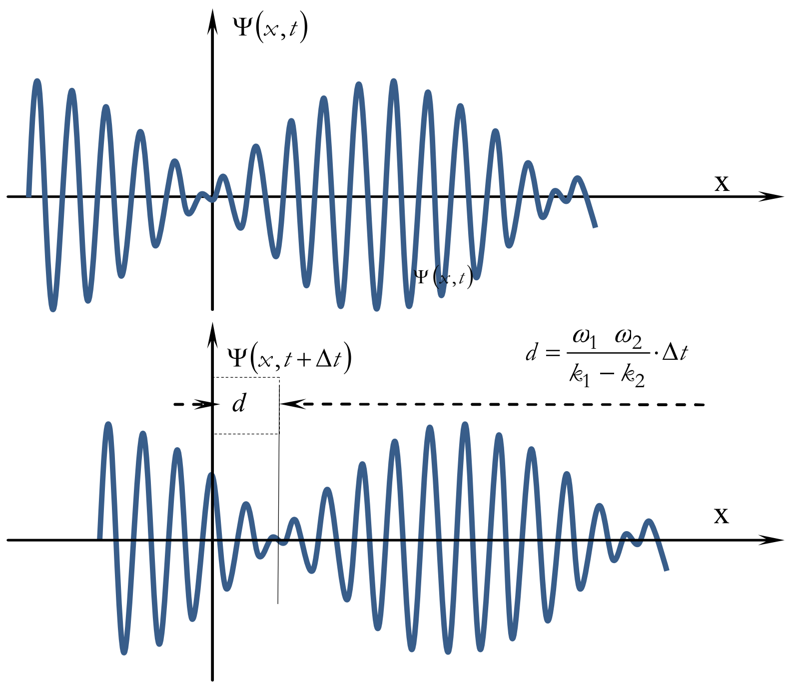


Figura 17 - Adission d'onde e velocità ëd grup

Onde stassionàrie

Se i consideroma doe onde che a l'àbio $k = k_1 = -k_2$ *e* $\omega = \omega_1 = \omega_2$, vis-a-dì istessa frequensa e nùmer d'onda opòst, e j'adissionoma, i otnoma l'equassion d'onda

$$\Psi(x,t) = e^{i(kx-\omega t)} + e^{i(-kx-\omega t)} = e^{i(kx-\omega t)} + e^{-i(kx+\omega t)} = \left(e^{ilx} + e^{-ilx}\right)\cdot e^{-i\omega t}$$

e se i arcordoma l'espression esponensial dle fonsion trigonométriche, i podoma scrive

$$\Psi(x,t) = 2\cos kx \cdot (\cos \omega t - i \sin \omega t)$$

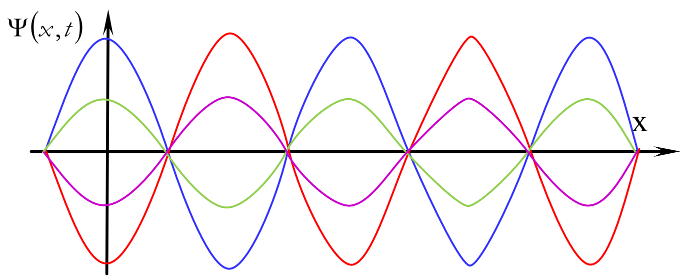


Figura 18 . Onda stassionària

Donca i l'ona ël prodòt ëd doe fonsion, dont la prima a dipend mach da x e la sconda a dipend mach da t, La prima part a dà l'ampiëssa dl'onda an fonsion dla posission, e ant ij pont $kx = \pi/2\,, 3\pi/2\,, \ldots$ a val sempe zero. Ij neu dl'osslsddion a dipendo nen dak temp. La part real dla sconda fonsion a và da -1 a 1 con la pulsassiom ω . A-i é donca nen nièspostament orisontal dl.onda arlongh l'ass x ma mach na vibrassion an vertical dij pot che a son nen neu,. Son a l'é arpresentù an figura 18.

Pachet d'onde

La dzorposission d'anfin'e onde ant un camp strèit ëd frequense con spetr contìnuo) a dà origin a un pachet d'onde, che a pija la forma aprossimà an figura 19, andova a son stàite adissionà 30 onde con frequensa da f - $0{,}038\,f$ fina a $f + 0{,}038\,f$, fasend an manera che j'onde a fusso tute an fase ant ël pont orìgin ant ël disegn ëd fifura Con mach coste onde a continuo a essie d'ondulassion lontan da l'orìgin, còsa che a càpita nen con në spétr contìnuo.

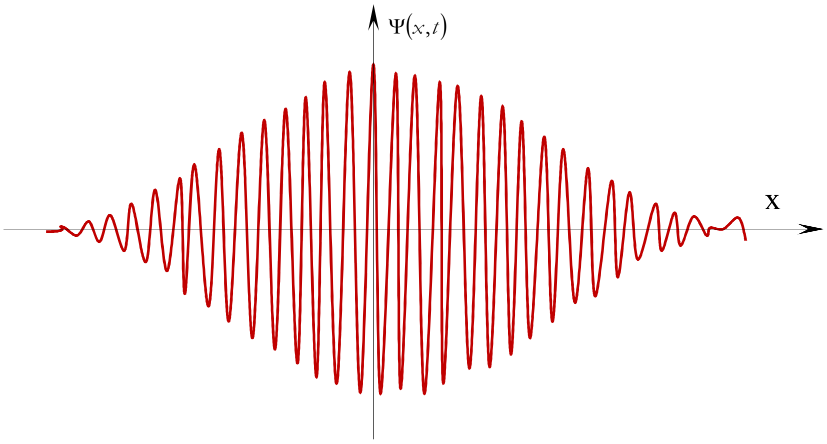


Figura 19 - Pachet d'onde

Sempe restand ant na sola dimension i podoma donca arpresenté ël pachet d'onda $\Psi(x,t)$ cona:

$$\Psi(x,t)=\int f(k')e^{i(k'x-\omega' t)} \quad andova \quad f(k')=A(k')e^{i\alpha(k')} \quad e \;\; donva \quad \Psi(x,t)=\int A(k')e^{i(k'x-\omega' t+\alpha)}$$

andova $A(k')$ a l'é definìa antorna a in valor k ant un domini D che a l'ha n'estension Δk. A sta mira i cianona $\phi = k'x - \omega' t + \alpha$ la variàbil ëd fase. Se ël fator ëd fase $e^{i\phi}$ a ossila vàire vire ant ël domini D, antlora l'integralb a dventa trascuràbil, mentre ël contribù pì gròss a l'é dàit da na fase ϕ qiàai costanta, donca cand

$$\left.\frac{d\phi}{dk'}\right|_{k'=k} = \left(x - \frac{d\omega'}{dk'}t + \frac{d\alpha}{dk'} \right)_{k'=kk'=k} \cong 0$$

Costa condission a definiss ëdcò ël pont x andova la fonsion $\Psi(x,t)$ a l'ha sò valor màssim, che a l'é donca dàit da:

$$\bar{x} \cong \frac{d\omega}{dk}t - \frac{d\alpha}{dk}$$

andova le derivà a son fàite rispét a k' calcolà ant ël pont k.

Për valuté la larghëssa Δx dël pachet i consideroma che se $e^{i\phi}$ a fa pì che n'ossilassion amt lìonterva D antlora l'integral a tira a anulésse. Antlora i podoma buté la condission:

$$\Delta\phi \cong \Delta k \left|\frac{d\phi}{dk}\right| \le 1$$

e se esplissitoma $\Delta\phi$ e peui i arcordoma che $\bar{x} \cong \frac{d\omega}{dk}t - \frac{d\alpha}{dk}$ i otnoma:

$$\Delta k \left|\frac{d\phi}{dk}\right| = \Delta k \left| x - \frac{d\omega'}{dk'}t + \frac{d\alpha}{dk'} \right| = \Delta k |x - \bar{x}| \le 1$$

e da sì as arcava che $\quad \Delta x \equiv |x - \bar{x}| \le \frac{1}{\Delta k}$

Sòn a dis che as peul fesse un pachet dìonde con n'estension limità Δx, dzorponend onde pian-e con nùmer dìonda comprèis ant un interval Δk, antorna a un valor k. Pì ël pachet a l'é localisà e pì gròss a venta ch'a sia l'interval Δk dij nùmer d'onda dovrà. I notoma che -el pont ëd màssim $\bar{x}$ dël pachet as bogia con na velocità

$$v_g = \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d\omega}{dk}$$

che a l'é dita "***velocità ëd grup***" (con mach doe onde i l'avìo trovà $v_g = \Delta\omega/\Delta k$)-

Se adéss arpojoma le posission ëd monsù deBroglie për j'onde 'd materia për l'energìa $E = h\nu = \hbar\omega$, e për n'impuls $p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$.

Se ant l'espression ëd vg i moltiplicoma numerator e denominator për $\hbar$ i l'oma che $v_g = \frac{dE}{dp}$ e i podoma verifiché che costa a corispond a la velocità ëd na partìcola tant ant ël cas nen relativìstich coma ant ël cas relativìstich. Për ël cas nen relativìstich i l'oma:

$$v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\frac{p^2}{2m}\right) = \frac{p}{m} = v$$

Për ël cas relativìstich i armndom a l'ultima part dla prima session ëd coste nòte e da là i arportoma che l'energìa ëd na partìcola con massa a l'arpòs ugual a m_0 e con na velocità v a val a val $E = m_0\,\gamma\,c^2$ andova $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ mentre i l'oma $p = m_0\,\gamma\,v$. Donca, sensa fé tuti ij passagi:

$$v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{p\,c^2}{E} = \frac{m_0\,\gamma\,v\,c^2}{m_0\,\gamma\,c^2} = v$$

Contut sòn, l'arpresentassion dla partìcola con un pachet d'onde a l'é da pijécon le mòle, dal moment che ël pachet a tira ampressa a disperdse.

I notoma che se i voroma localisé bin ël pachet i l'oma da manca ëd tante onde e donca a aumental'incertëssa an sl'impuls. Con na sola onda pian-a i l'oma un precus impuls ma i savoma gnente an ska posission dla partìcola.

Esperiment ëd Davisson e Germer

Për verifiché l'ipòtesi ëd deBroglie ij monsù Davisson e Germer, ant ël 1927, a l'han fàit n'esperiment ëd difrassion, fenòmeno che a càpita con j'ónde eletro-magnétiche e che, se dabon j'eletron a l'han comportament ëdcò ondulatòri, a deuv capité 'dcò con j'eletron.

Mandand un fass ëd ragg X a un dàit àngol su na surfassa d'un material cristalin, an sto cas ël nìchel, cost a ven-o devià a dàit àngoj che a dipendo da la frequensa dla radiassion e, natural, dal retìcol cristalin. Sostituend ël fass ëd ragg X con un fass d'eletron, ij doi arsercador a l'han podù stabilì che la difrassion a càpita a l'istéssa manera. Da le frange 'd difrassion a l'han podù calcolé la longhëssa d'ónda ëd "*l'ónda*" dj'eletron, e a l'han podù trové pròpi $\lambda = \frac{h}{p}$, andova p a l'é 'l moment dj'eletron calcolà an base a la tension d'acelerassion, e donca conossù. Sòn a dimostrava l'esistensa për dabon dj' ónde 'd deBroglie. (Noi i l'oma dësgià acenà che 'dcò l'esperiment ëd Young, fàit con eletron, a conferma costa ipòtesi).

I stoma nen, ambelessì a intré ant ij particolar dla misura.

Esperiment ëd Young con j'eletron

I l'oma dësgià acenà prima che l'esperiment ëd Young a fonsion-a 'dcò se a l'é fàit con d'eletron. Sì i vardoma còs a càpita se i consideroma n'ónda dël tipo 'd cola ch'i l'oma vist, ancora sensa pensé a j'eletron che a la produvo. An serv giusta savèj che se j'eletron a son acelerà da un potensial V a l'avran un moment

$$p = \sqrt{2meV}$$

L'ónda 'd deBroglie a riva coma n'ónda pian-a an sle doe filure, che a dvento sors d'ónde coerente silìndriche, e su coste i foma j'istésse considerassion ch'i l'oma fàit an sj'onde luminose. An efét i consideroma, che an slë scherm, ant ògni pont, a rivo doi ragg, un për filura, e i adissionoma j'ampiësse për conòsse l'ampiëssa dla radiassion che a riva an slë scherm. Sensa arportéla ambelessì, is arferima sempe a figura 1.

Da la prima filura F_1 al pont P a l'autëssa x an slë scherm S_2, a-i é la distansa $\boldsymbol{s}$, e se N a l'é na costant, l'ampiëssa dl'ónda che a riva da sta filura a val:

$$\psi_{F_1}(x,t) = N\, e^{i(ks - \omega t)} = N\, e^{i\left(\frac{ps - Et}{\hbar}\right)}$$

An sl'istéss pont P l'ampiëssa che a riva da la filura F_2 a val (i l'oma indicà con $\boldsymbol{r}$ la distansa e nen con $\boldsymbol{t}$ për nen confondla con el temp):

$$\psi_{F_2}(x,t) = N\, e^{i(kr - \omega t)} = N\, e^{i\left(\frac{pr - Et}{\hbar}\right)}$$

I podoma gionté le doe ampiësse për avèj l'ampiëssa an sël pont P an costion. Svilupand ij cont (còsa che sì i foma nen) i l'oma:

$$\psi(x,t) = \psi_{F_1}(x,t) + \psi_{F_2}(x,t) = 2N\, e^{i\left(\frac{p l_{med} - Et}{\hbar}\right)} \cdot cos\left(\frac{p\,\Delta l}{2\hbar}\right)$$

andova i l'oma indicà $l_{med} = \dfrac{s+r}{2}$ e $\Delta l = r - s$. I osservoma peui che se la distansa D a l'é bin pì gròssa dla distansa d fra le filure, i podoma scrive, con bon-a aprossimassion, che $\Delta l = \delta = d \cdot sin\,\varphi$ (i soma sempe arferì a figura 1). L'intensità ëd n'ónda a l'é proporsional al quadrà dl'ampiëssa, e se l'ampiëssa a l'é complessa, coma an sto cas, l'intensità a l'é proporsional al quadrà dël mòdulo. Se donca I a l'é l'intensità, i podoma scrive che

$$I \propto \psi\,\psi^*$$

e për nòstre onde i l'avroma

$$I(x) \propto cos^2\left(\frac{pd\, sin\,\varphi}{2\hbar}\right)$$

I l'oma dovrà la notassion ψ^* per indiché la fonsion complessa coniugà dla fonsion ψ. Se la còsa, për quàich letor, a fussa nen ciàira, i armandom al capìtol ch'a ven ("***nossion matenàtiche da ten-e present***") për ba ciaciarada an orioòsit.

Adéss i podoma arpijé 'l discors dj'eletron. L'intensità d'un fluss as àplica 'dcò a un fluss d'eletron, e nen mach a d'ónde. An efét l'intensità a l'é l'energìa che a passa travers l'unità 'd surfassa ant l'unità ëd temp. Adéss i podoma ciamé *N(x)* ël nùmer d'eletron che a rivo ant l'unità 'd temp an 's l'unità 'd surfassa e arcordésse che ògni eletron a l'ha n'energìa socià che a val $E=\frac{p^2}{2\,m}$. L'intensità socià a j'eletron a l'é donca $I(x)=N(x)\frac{p^2}{2\,m}$

Second la teorìa ëd deBroglie i dovrìo spetésse che $N(x)\propto\psi\psi^*\propto cos^2\left(\frac{pd\,sin\,\varphi}{2\hbar}\right)$ se as conto j'eletron che a rivo ant le diferente posission x an slë scherm, as peul vëdde che la teorìa ëd deBroglie a l'é confermà.

A sta mira i l'oma vist che për giustifiché j'esperiment a venta consideré che l'energìa a ven assurbìa e emettùa për quantità discréte, che j'eletron antorna a l'àtomo a l'han stat d'energìa discreta con precis livej, e a peulo nen passé da në stat a l'àutr se nen emëttend ò arsèivend ant un sol at l'energìa necessària al sàut. Ël moment angolar dj'eletron antorna a n'àtomo a l'é quantisà, con precis valor possìbij. I l'oma vist che la lus as propaga për foton che as compòrto coma partìcole, dont l'energìa a l'é anlià a soa frequensa da la costant ëd Planck. A la fin i l'oma vist che 'dcò le partìcole as compòrto coma ij foton, con na frequensa socià che a dipend da soa energìa, con relassion istésse a cole dij foton.

Interpretassion ëd Born

I suponoma che an total a-i sio N_{tot} eletron che a passo le filure ògni second. Is ciamoma che probabilità a l'ha un ëd costi eletron ëd rivé an 's na surfassa ΔA dlë scherm ant l'anviron dël pont x. Se i suponoma che ògni eletron a viagia an manera indipendenta, sta probabilità a l'é dàita da: $\frac{N(x)\Delta A}{N_{tot}}$. Ma n'eletron che a viagia a na velocità v, për rivé an sla surfassa ΔA a venta che, ant un temp che a và da t_0 a $t_0+\Delta t$ as trovèissa ant un cit volum anans a la surfassa dàit da $\Delta V=\Delta A\cdot v\Delta t$.

Donca i podoma dì che la probabilità che n'eletron a riva an 's la surfassa ΔA ant un temp Δt a l'é istéssa a la probabilità che a un dàit temp t_0 l'eletron as treuva ant ël volumet ΔV.
I ciamoma P_V la probabilità che l'eletron, al temp t a sia ant ël volum ΔV e i podoma scrive:

$$P_V=\frac{N(x)\Delta A}{N_{tot}}\cdot\Delta t=\frac{1}{v\,N_{tot}}N(x)\Delta V \qquad e\ \ donca \qquad P_V\propto\psi(x,t)\psi^*(x,t)\Delta V$$

As peul sempe trové na solussion tala che $P_V=\psi(x,t)\psi^*(x,t)\Delta V$, mersì a la linearità dl'equassion dl'ónda. Donca i podoma dì, second l'interpretassion ëd Born, che:

Se la fonsion d'ónda socià con l'eletron a l'é $\psi\,(x,y,z,t)$, la probabilità P_V ëd trové l'eletron and un cit volumet ΔV antorna al pont (x,y,z) a l'é dàita da

$$P_V(x,y,z)=\psi^*(x,y,z,t)\psi(x,y,z,t)\Delta V$$

Se peui n'eletron a-i é, antlora la probabilità che da quàich part as treuva a val 1. Donca as peul scrive 'dcò na condission ëd normalisassion che a arzulta:

$$\int\psi^*(x,y,z,t)\psi(x,y,z,t)dx\,dy\,dz=1$$

El fàit che sta probabilità a dipenda dal quadrà dla fonsion d'ónda a l'é 'dcò giustificà dal fàit che sta probabilità a venta ch'a sia un nùmer real. As peul noté na corispondensa fra probabilità e intensità dël camp elétrich. La distribussion dle probabilità a l'é responsàbil dle frange 'd difrassion con j'eletron, parèj coma l'intensità dël camp a pròvoca la difrassion con la lus. L'intensità dël camp a l'é proporsional al quadrà dël camp elétrich, parej coma la probabilità a l'é proporsional al quadrà dla fonsion d'ónda.

Interpretassion ëd Copenagen

I l'oma vist l'interpretassion probabilìstica second Born, e sì i giontoma un concét dovè a Heisemberg, che a dis che la fonsion d'onda a pòrta tuta l'informassion an slë stat ëd moviment ëd na partìcola, e che n'osservassion n sto moviment a fò "colassé " sto stat ant n'òutr ësrar.

A sto propòsit i podoma torna consideré l'rsperiment dlé doe filure. Se 'l moviment dla partìcola a l'é descrivù da la fonsion d'onda Ψ , antlora i l'oma che la densità ëd probabilità $P(x)$ ëd trovéla an x a sarà dàota da $P(x)=|\Psi|^2=\Psi\cdot\Psi^*$. Disoma peui che na partìcola che a passa da ja filura A a l'é desrivùa da la fonsion d'onda Ψ_A e che la partìcola che a passa da la filura B a l'é desrivùa da la fonsion d'onda Ψ_B.

Dal moment che la partìcola a passa ò d na part ò d l'àutra sensa dividse, a venta che a sia $\Psi(x)=\Psi_A(x)+\Psi_B(x)$.

Se i saroma la filura B , con A duverta, la fonsion Ψ a colassa ant la fonsion Ψ_A e la densità 'd probabilità a dventa $P_A(x)=|\Psi_A|^2=\Psi_A\cdot\Psi_A^*$

Se i saroma la filura A , con B duverta, la fonsion Ψ a colassa ant la fonsion Ψ_B e la densità 'd probabilità a dventa $P_B(x)=|\Psi_B|^2=\Psi_B\cdot\Psi_B^*$

Se i saroma an alternansala filura A , con B duverta, e la filura B com A duvertapër netà e metà dël temè la fonsion Ψ a colassa ant la fonsion Ψ_B e ant la onsion Ψ_A an alternansa e ant la fonsion e la densità 'd probabilità a dventa $P_A(x)+P_B(x)=|\Psi_A|^2+|\Psi_B|^2=\Psi_A\cdot\Psi_A^*+\Psi_B\cdot\Psi_B^*$

Se le filure A e B a son sempe duverte tute doe, antlora la fonsion d'onda a val $\Psi(x)=\Psi_A(x)+\Psi_B(x)$ e la densità 'd pronanilità a sarà

$$P(x)=|\Psi(x)|^2=|\Psi_A+\Psi_B|^2=|\Psi_A|^2+|\Psi_B|^2+\ \Psi_A^*\cdot\Psi_B\ +\ \Psi_A\cdot\Psi_B^*$$

andova a-i son doi termo d'interferensa.

Se le filure A e B a son tute doe duverte, ma i butoma un rivelator daré a la filura A, la fonsion d'onda Ψ_A a ven modiicà an manera casual da la misura e ij termo d'interferensa a sparisso. A-i é un colass ëd costa fonsion vers stat nen conossù. La misura midema a distruv l'esperiment.

Tit dòn a fa part ëd cola che a l'é dita "interpretassion ëd Copenagen ",. St'interpretassion a l'é 'ncora an discussion, ma a fonsion-a për lòn ch'an serv.

A propòsit ëd trajetòria

I arpijoma quaicòs che i l'oma acenà prima, e i continuoma a consideré l'esperiment dle doe filure, fàit con d'eletron. I l'oma già vist për ij foton un comportament pitòst dròlo, che a l'ha portàne a conclude che j'aspét ondulatòri e coj corpuscolar dij foton a son nen separàbij.

Ambelessì, però, da na mira concetual le còse a son pì complicà, dal moment che i savoma che l'eletron a l'é na partìcola con na massa e na dimension che a son stàite an quàich manera misurà, mentre 'l comportament a smija pròpi istéss a col dij foton.

An efét, për ël foton, a l'é pì fàcil anmaginé un comportament dobi, mentre a ven da ciamésse (la domanda a l'é dròla, lo sai) che fin a fà la massa dl'eletron mentre l'eletron as compòrta da ónda? As ëspatara coma un front d'ónda? (as dirìa pròpi che 'd nò). I soma abituà a pensé che n'ónda a peussa propaghésse un pòch da's për tut, contut che peui ël foton a riva ant un pont precis, ma che na partìcola che a và da un pòst a l'àutr a deubia passe ant na serie 'd dàit pont che, butà un dòp l'àutr, a faso na lìnia che i podoma consideré coma "trajetòria".

Se is butoma an condission ëd podèj osservé costa trajetòria, e i rivoma a félo, i podoma da bon stabilì che n'eletron a l'é passà da la prima opura da la sconda filura, ma a l'istéss temp a spariss ël fenòmeno dl'interferensa (as dirìa che l'eletron "a l'é ofendùsse"), përchè nòstra misura a ven alterà an manera completa. Për avèj l'informassion dël passagi a venta che i anteragìsso con l'eletron (che a venta almanch ch'a fasa devié un foton) e lòn a basta a dëstruve la misura. I l'oma gnun-e manere ëd podèj dì che l'eletron a l'ha na trajetòria an cost esperiment.

A venta cambié manera 'd pensé, e sòn a l'ha fàit tribulé ij fisich dël prinsìpi dël neuvsent.

I notoma sùbit che i soma stàit obligà a dëscrive j'arzultà dla misura dle doe filure con ëd fonsion che a dan la probabilità ëd trové l'eletron ant un dàit post. Costa probabilità a l'ha un caràter diferent da cola che i dovroma, pr'esempi, ant la teorìa cinética dij gas, andova la necessità ëd na dëscrission probabilìstica a ven da l'impossibilità ëd conòsse e ten-e cont dla situassion dinàmica e le condission inissiaj ëd milanta miliard ëd partìcole.

Ambelessì i termo dla situassion a son pòchi e conossù, e la nòstra a l'é na probabilità teorisà. A ven dal fàit che as dimostra (e i lo foma sì dapréss un pòch pì anans) coma a sia nen possìbil conòsse an manera determinìstica precisa la situassion. ***Donca a l'é nen ch'i soma nen bona félo , ma a l'é ch'as peul nen fésse***.

Nossion matemàtiche da ten-e present

Prima d'intré ant la Mecànica Quantìstica a conven pijé an considerassion coj concét che a peulo vnì a taj relativ ai nùmer compléss, a jë spassi a un nùmer qualonque ëd dimension, fina a l'anfinì. andova a son definì vetor e fonsio complésse. I parloma ëd prodòt intern e d'operator. An sto capìtol i vardoma ij concét prinsipaj e le definission, e i androma pì ant l'ancreus se e cand a sarò necessari. I giontoma donca quaicòs ëd pì spessìfich rispét a lòn ch'i l'oma dësgià vist ant la session dedicà a j' ***Utiss matemàtich*** për la Fìsica Sperimental, dont i arpetoma 'dcò quaicòs.

Ij nùmer compléss

I l'oma già parlà 'd costi nùmer ant la session dj' Utiss matemàtich. I l'oma vist che un nùmer compléss c a l'é l'adission d'un nùme real e un nùmer anmaginàri e a peul esse anmaginà coma arpresentà da un pont an s'un pian, dont la coordinà x a ìndica la part real *a*, mentre la coordinà y a ìndica la part anmaginària *b*. La part anmaginària a l'é cola moltiplicà për l'unità anmaginària $i = \sqrt{-1}$. I l'oma vist ant la session cità 'l significà ëd costa unità. Ant lòn ch'i disoma sì is arferima a la figura 20.

I arportoma le proprietà dl'unità imaginaria, che a derivo da soa definission. I l'oma che:

$$i^2 = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = -1 \quad ; \quad i^3 = -i \quad ; \quad i^4 = 1 \quad ; \quad i^5 = i \quad ; \quad \frac{1}{i} = -i$$

Un nùmer compléss a sarà donca scrit coma $c = a + i\,b$. As dis compless coniugà c* d'un nùmer compléss c , ël nùmer ch'as oten cambiand ël segn dla part imaginaria. Vis a dì che a □ i b a l'é compléss coniugà dël nùmer a □ i b .

Un nùmer compléss, anmaginà coma un pont an sel pian ch'i l'oma dit, a l'é caraterisà da soa distansa dal pont orìgin dël pian. Se as considera 'l nùmer compléss com un vetor an doe dimension, dont le component a son soa part real e soa part imaginària, as dis "mòdul " dël nùmer compléss $|c|$ la longhëssa dë sto vetor. Donca i l'avroma

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

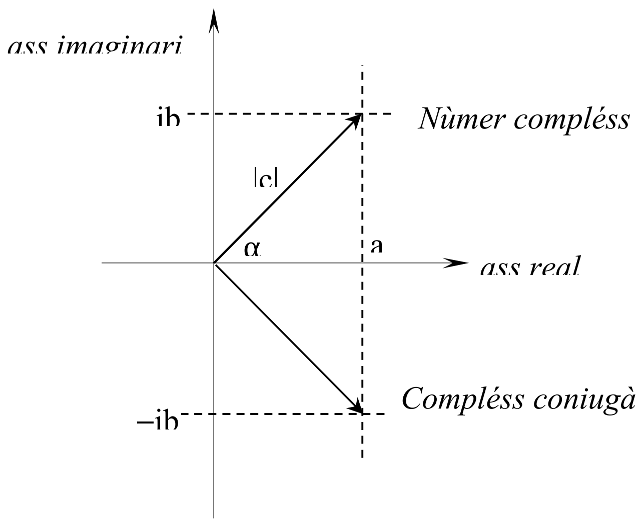


Figura 20 - Arpresentassion dij nùmer compléss

ma se i moltiplicoma fra 'd lor un nùmer compléss e sò coniugà i l'avroma

$$c \cdot c^* = (a + ib)(a - i\,b) = \left[a^2 - (i\,b)^2\right] = \left(a^2 + b^2\right) = |c|^2 \text{ e donca } |c| = \sqrt{c \cdot c^*}$$

Se i ciamoma α l'àngol che 'l vetor-nùmer compléss a fà con l'ass dij nùmer reaj i l'oma 'dcò le relassion che a ven-o motobin a taj:

$$a=|c|\cos\alpha \quad ; \quad b=|c|\sin\alpha \quad ; \quad c=|c|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

ma i l'oma vist an parland ëd série ant la session dj' Utiss matemàtich, che se i svilupoma an série 'd potense la fonsion $\cos\alpha$ e la fonsion $\sin\alpha$, e i adissionoma le série dòp avèj moltiplicà la sconda për *i*, i otnìma lë svilup an série 'd potense dla fonsion $e^{i\alpha}$. Vis-a-dì che i l'oma:

$$\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\alpha} \quad \text{e donca i l'oma} \quad c=|c|e^{i\alpha}$$

e se a a l'é la part real e b la part imaginària i l'avroma che a val la relssion $\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$

Qualonque nùmer ëd mòdulo unitàri ($|c|$ = *1*) a l'é arpresentà da $e^{i\alpha}$, cand α a vària da *0* a *2π.* Antlora, për $\alpha=0\rightarrow e^{i\alpha}=1$, për $\alpha=\pi/2\rightarrow e^{i\alpha}=i$, për $\alpha=\pi\rightarrow e^{i\alpha}=-1$, për $\alpha=3\pi/2\rightarrow e^{i\alpha}=-i$

J'operssion che as fan con ij nùmer compléss a son arpresentà sì sota.

$$\begin{aligned}
&(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)\\
&r\cdot(a+ib)=ra+irb\\
&(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)\\
&\frac{(a+ib)}{r}=\frac{a}{r}+i\frac{b}{r}\\
&\frac{(a+ib)}{(c+id)}=\frac{(a+ib)\cdot(c-id)}{(c+id)\cdot(c-id)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}
\end{aligned}$$

I notoma 'dcò che 'l compléss coniugà dël prodòt ëd doi nùmer compléss a echival al prodòt dij compléss coniugà. Vis-a-dì, se *A* e *B* a son doi nùmer compléss i l'oma: $(A\cdot B)^*=A^*\cdot B^*$. An efét i l'oma:

$$(a+ib)\cdot(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc) \quad \text{dont ël compléss coniugà a l'é} \quad (ac-bd)-i(ad+bc)$$
$$(a-ib)\cdot(c-id)=(ac-bd)+i(-ad-bc)=(ac-bd)-i(ad+bc)$$

La notassion esponensial

I l'oma vist che un nùmer compléss a peul esse arpresentà da n'esponensial compléss, e a val la relassion, motobin amportanta, $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ mentre che për esponensial negativ $e^{-i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha$, e sòn përchè i l'oma che *cos (–α) = cos α*, mentre *sin (–α) = –sin α.*

Da sòn a arzulta che se un nùmer compléss c a val $c=|c|e^{i\alpha}=|c|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, sò compléss coniugà a sarà $c^*=|c|e^{-i\alpha}=|c|(\cos\alpha-i\sin\alpha)$. Se i provoma a calcolé 'l mòdul $|c|=\sqrt{c^*c}$ i l'avroma:

$$\sqrt{|c|e^{-i\alpha}|c|e^{i\alpha}}=|c|\sqrt{e^{i(\alpha-\alpha)}}=|c|\sqrt{e^0}=|c|\sqrt{1}=|c|$$

J'operassion fàite an sto format a son pitòst imedià e, se c a l'é $c=re^{i\alpha}$ e d a l'é $d=se^{i\beta}$ i podoma scrivije:

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{re^{i\alpha}}=\frac{1}{r}e^{-i\alpha} \quad ; \quad cd=rse^{i(\alpha+\beta)} \quad ; \quad \frac{c}{d}=\frac{r}{s}e^{-(\alpha-\beta)}$$

I l'oma vist che $e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$ e che $e^{-i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha$. Da coste doe espression i podoma scrive che $e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}=2\cos\alpha$ mentre $e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}=2i\sin\alpha$. Da sòn i l'oma che:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right) \quad ; \quad \sin\alpha = \frac{1}{2i}\left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right)$$

Da 'ndova a ven costa notassion

Giusta për arciamé lòn ch'i l'oma già dit ant la session "***utiss matemàtich***" part set, a propòsit ëd série, i consideroma lë svilup an série 'd potense dle fonsion e^z ; $\cos x$; $\sin x$:

Ch'a sia $z = x + i\cdot y$ nòstra variàbil complessa:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \quad ; \quad \text{e i notoma che} \quad e^{x+i\cdot y} = e^x \cdot e^{i\cdot y}$$

Ma se adéss i scrivoma lë svilup dla fonsion $e^{i\cdot y}$ i l'oma :

$$e^{i\cdot y} = 1 + i\cdot y + \frac{i^2\cdot y^2}{2!} + \frac{i^3\cdot y^3}{3!} + \frac{i^4\cdot y^4}{4!} + \frac{i^5\cdot y^5}{5!} + \cdots$$

Arcordand che le potense pari dla i a valo -1, nòstra série 'd partensa a arzulta fàita da doe série 'd termo che a son antërcalà e che i podoma cheuje an manera separà. I otnoma lòn ch'i arportoma sì sota

:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i\cdot\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right)$$

Antlora a arzulta, arcordand j'arzultà djë svilup dle fonsion ëd cossen e sen, che :

$$e^{x+i\cdot y} = e^x \cdot \left[\cos(y) + i\cdot\sin(y)\right]$$

dal moment che le doe série indicà a son nen d'àutr che jë svilup an série 'd potense ëd $\cos y$ e ëd $\sin y$.

Complessa coniugà d'un nùmer e 'd na fonsion

I l'oma già dit còs a l'é ël compléss coniugà d'un nmer compléss e i l'ona 'dcò già dovralo. Anbelessì i vardoma giusta quàich proprietà dl'operassiom che a fà passé da c a c^* e che a l'é na fonsion ant ël camp C dij nùmer compléss. I l'oma che:

- $(c^*)^* = c$ e costa a l'é banal dal moment che as càmbia doe vire l'istéss segn.
- la fonsion a l'é bi-unìvoca e a valo le proprietà $(c_1 + c_2)^* = c_1^* + c_2^*$; $(c_1 c_2)^* = c_1^* c_2^*$, as trara donca ëd n'isomorfism.-
- la part real d'un nùmer compléss $c = a + ib$ a l'é dàita da $a = \frac{c + c^*}{2} = \frac{a + ib + a - ib}{2} = \frac{2a}{2} = a$ mentre soa part imaginària a l'é dàita da $ib = \frac{c - c^*}{2} = \frac{a + ib - a + ib}{2} = \frac{2ib}{2} = ib$
- se $c \neq 0$ antlora $\left(\frac{1}{c}\right)^* = \frac{1}{c^*}$
- i l'oma che $c = c^*$ se, e mach se, c a l'é real, vis-a-dì $c \in \mathrm{R}$
- se $c = -c^*$ antlora c a l'é n'imaginari pur, vis-a-dì $c \in i\mathrm{R}$

Parland ëd notassion esponensial i l'oma vist d'edempied fonsion complésse. A l'é ciàir che se ant na fonsion as treuva l'unità imaginària i , as trata ëd na fonsion complèssa.

La fonsion compléssa coniugà ëd na fonsion as oten sempe a l'istessa manera ëd com as fà ël compléss coniugà d'un nùmer compléss, cambiand el segn a j'unità anmaginàrie.

A l'é adiritura banal che la compléeea coniiugà ëd na fonsiom real a coincid con la fonsion midema.

Pr'esempi, se i consideroma la fonsion $\Psi = e^{x+i\cdot y} = e^{x}\cdot\left[\cos\left(y\right)+i\cdot\sin\left(y\right)\right]$, soa fosion complèssa coniugò a sarà $\Psi^{*} = e^{x-i\cdot y} = e^{x}\cdot\left[\cos\left(y\right)-i\cdot\sin\left(y\right)\right]$

Se i calcoloma ël prodòt $\Psi^{*}\cdot\Psi$ i l'avroma che $\Psi^{*}\cdot\Psi = e^{x-i\cdot y}\cdot e^{x+i\cdot y} = e^{2x}$ opura 'dcò $\Psi^{*}\cdot\Psi = e^{2x}\left[\cos\left(y\right)-i\cdot\sin\left(y\right)\right]\cdot\left[\cos\left(y\right)+i\cdot\sin\left(y\right)\right] = e^{2x}\left(\cos^{2} y + i\cos y\sin y - i\cos y\sin y + \sin^{2} y\right) = e^{2x}$

L'istéss a val për un vetor a n component: sò compléss coniugà a l'é ël vetor che a l'ha coma ògni soa component la compléssa coniugà dla corispondenta component del vetor ëd partensa.

Fonsion intèise cona vetor

N'idèja che a ven a taj an Mecànica Quantìstica a l'é che na fonsion a peul esse tratà com un vetor che a l'àbia un nùmer anfinì ëd dimension.

As costuma, ant lë spassi a doe ò tre dimension, arpresenté un vetor con na flecia, che a l'ha doe ò tre projession an sj'ass, che a son soe component. I podoma arpresenté nòstr vetor con un diagrama su doi ass dont j'assisse a pòrto l'indes dla component, e j'ordinà ël relativ valor. Na manera parèj d'arpresenté ij vetor a ven a taj, an particolar, cand as trata ëd vetor an n dinension, com i arpresentoma an figura 21.

Man man che i aumentoma ël n+mer dle dimension, ël profil ëd nòstr digrama a smija sempe ëd pì a l'arpresentassion ëd na fonsion An efét, a l'istessa manera i podoma pensé ël diagrama ëd na fonsion *f(x)* coma col ilustrù an figura 22 cona col d'un vetor ant në spassi a infinìe dimension, che an manera contìinua a quato tut ël camp ëd definission dla fonsion midema, che a peul ess 'dcò anfinì. La coordinà x a fa da ìndes dla dimension e ël corispondent valor *f(x)* a l'é ël valor dla relativa "component" dël vetor

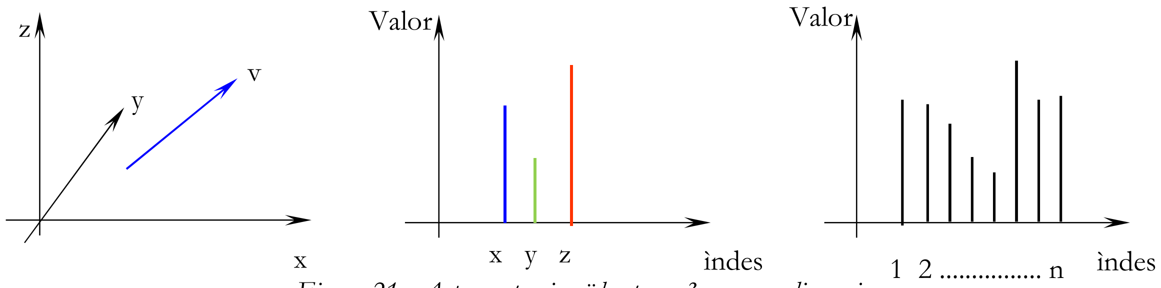


Figura 21 - Arpresentassion ëd vetor a 3 r an n dimension

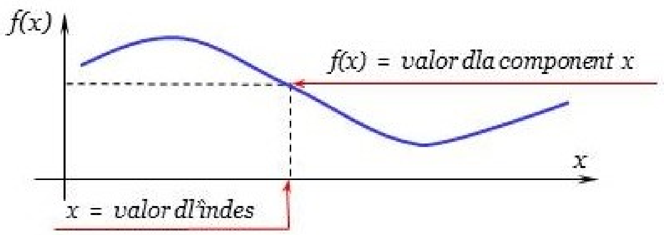


Figura 22 - Fonsion coma vetor

Sta manera ëd pensé la fonsion a përmet d'estende a le fonsion quàich proprietà dij vetor, I podoma, pr'esempi, parlé ëd fonsion ortogonaj fra 'd lor e "nòrma " ëd na fonsion, concét che a sostituiss la longhessa d'un vetor, na sòn i lo vëddroma pì tard.

Se as trata ed na fonsion contìnua definìa bele nach su n'interva da xa a xb as trara macass'a f n'anfinità conyìnua ëd coordimà. ça fondiom a peul edcò da $-\infty$a $+\infty$ -

A venta arcordésse che, contut che le dimension a sio anfinìe, ant l-e spassi a anfinìe dimennsion ch'i l'oma diyla fonsion a arpresenta sempe un pont. Sòn i lo vëddroma méj dòp.

Spassi vetoriaj

Në spassi vetorial, ëd coj che an anteresso ambelessì, a l'é n'entità motobin pì general ëd lòn chìi l'oma vist ant la session dj'utiss matamàtich ëd coste nòte.

I partoma disend che në spassi vetorial genérich V, rispét al camp ëscalar dij reaj R, ò dij compléss C (ciamand sto camp K ëd sòlit as comprendo ste doe possibilità) a l'é n'ansema d'ogét ò element che a son ciamà "vetor", andova a son definìe doe operassion ant la manera sì dapréss. J'ogét matemàtich a peulo esse reaj ò compléss, e i stoma nen a spessifichéje ambelessì, bastamach che a sodisfo le condission sì sota. I ciamoma donca K ël camp djë scalar , Donca ant l'ansema V a son definìe j'operassion:

- Adission + tala che l'adission ëd doi element ëd V a l'é n'element ëd V.
- Moltiplicassion për në scalar * tala che se $k \in K$ e $v \in V$ antlora $(k * v) \in V$

Oltra a sòn a venta che la strutura (V , +) a sia un grup abelian, vis-a-dì che a venta che - ***1)*** - a-i sia l'element neutr 0_V rispét a l'adission, e donca che për ògni element v ëd V a sia che $0_V + v = v$. - ***2)*** - për ògni element v ëd V a esista l'element invers $\overline{v}$ rispét a l'adission tal che $v + \overline{v} = o_V$ - ***3)*** - a val la proprietà associativa për l'adission, e donca se $u, v, w \in V$ antlora $(u+v)+w = u+(v+w)$. - ***4)*** - a val la proprietò comutativa për l'adission, e donca se $u, v \in V$ antlora $u+v = v+u$.

- A val la proprietà distributiva fra * e +, donca se $v, w \in V$ e $k \in K$ antlora $k*(v+w) = k*v + k*w$ e 'dcò se $v \in V$ e $h, k \in K$ antlora $(h+k)*v = h*v + k*v$
- Se 1_K a l'é l'element neutr për la moltiplicassion an K , vis-a-d' che për ògmi $k \in K$ a val che $1_K * k = k$, antlora a venta 'dcò che a vala che për ògni $v \in V$ a vala che $1_K * v = v$ -

I motoma che j'operassion definìe a peulo esse diferente da cole che as fan an aritmética, bastamach che a sodisfo le condission dàite.

Vetor ant lë spassi R^n

I tornoma un moment ai vetor ch'i l'oma vist amt la session dj'utiss matemàrich, ant në spassi R^3 , andova a l'é definìa na trien-a cartesian-a ortogonal, e i pensoma a vetor nen aplicà, arpresentà dal vetor echipolent aplicà a l'orì'gin. I podoma dì an sto cas, che nòstri vetor a son trien-e ordinà ëd nùmer. Costi nùmer a arpresento le coordinà dël pont andova a finiss la flecia che a part da l'orìgin e che a arpresenta ël vetor.

Sòn a supon che a-i sio tre diression definìe, che a son ij versor i, j, k ëd j'ass cartesian x, y, z . Se la trien-a 'd nùmer a l'é a, b, c , antlora ël vetor, che i disoma $\overline{v}$, a peul esse arpresentà coma:

$$\vec{v} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$$

A l'é ciàir che a, b, c , a son le longhesse dle projession ortogonaj dël vetor $\overline{v}$ an sj'ass cartesian e a son le component dël vetor.e a localiso un pontr ant l-e spassi f'sich a tre dimension che i conossoma per esperiensa e ch'i soma bon a arpresenté an maners graàfica.

I versor a son sempe vetor e donca a peulo esse arpresentà 'dcò lor coma trien-e 'd nùner, intèis coma valor dle component. Donca

$$\vec{i} = (1,0,0) \quad ; \quad \vec{j} = (0,1,0) \quad ; \quad \vec{k} = (0,0,1)$$

I notoma che sti tre versor a son na particolar "***base***" ant lë spassi R^3 che a l'é dita la "***base canònica***", e che a l'é suponùa coma nase cand costa a l'é nen spessificà, ma qualonque trien-a ëd vetor linearment andipendent a peul fé da base dlë spassi R^3 . A l'é ciàir che l'ansema dij vetor për esse spessificà a ciama che a si spessificà soa bse.

Na prima estension che i podoma fé a l'é ël supon--e che j' ogét che a formo ij vetor dl'amsema V a sio pì nen trien-e ma enupòe 'd nùmer, coma pt'esempi sinchen-e *a. b. c. d. e*, I soma pì nen bon a imaginé, e donca a disegné un vetor parèj coma na flecia.

Macassìa a ven natural pensé che costi nùmer a sio le misure dle compnent d'un vetor ant në spassi a n dimension R^n (an sto cas R^5), component arferìe a na sinchen-a ëd vetor unitàri $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3, \vec{\varepsilon}_4, \vec{\varepsilon}_5$ (***base canònica***) taj che ;

$$\vec{\varepsilon}_1 = (1,0,0,0,0) \quad ; \quad \vec{\varepsilon}_2 = (0,1,0,0,0) \quad ; \quad \vec{\varepsilon}_3 = (0,0,1,0,0) \quad ; \quad \vec{\varepsilon}_4 = (0,0,0,1,0) \quad ; \quad \vec{\varepsilon}_5 = (0,0,0,0,1)$$

an manera che tuti ij vetor dlë spassi a son combinassion linear ëd costi vetor. An efét l'element dl'ansema arpresentà da la sinchen-a (*a, b, c, d, e*) a l'é un pont ant lë spassi a sinch dimension andividoà dal vetor $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \vec{\varepsilon}_1 a + \vec{\varepsilon}_2 b + \vec{\varepsilon}_3 c + \vec{\varepsilon}_4 d + \vec{\varepsilon}_5 e$$

Base ant në spassi vetorial

I l'oma parlà ëd base e ëd base canònica, ma a l'é mej vardé un pòch pì da davzim ëd lòn che as trara e com a peul esse trovà na base.

Për definì na base i podoma dì che : Dàit në spassi vetorial V su un camp scalar K, n'ansena ëd vetor $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \subseteq V$ a l'é na base ëd V se : !) - a l'é un sistema ëd generaator ëd V, e 2) - i vetor $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ a son linearment andipendent.

Un sistema ëd generator a l'é n'ansema ëd vetor che a aparten-o a V, taj che tuti ij vetor $\vec{w} \in V$ a peulo esse esprimù con na combinassion linear dij vetor midem. An d'àutri termo, ant në spassi a n dimensiom a.i son n gré ëd libertà, e ògni pont a peul esse pensà coma dàit da në spostament ant na prima "diression", segoì da në spostanent ant na scknda "diression , e via fòrt. Un sistena ëd generator $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ a l'é tal che se $\vec{w} \in V$ a l'é un qulonque vetor dlë spassi V, antlora, ant ël còrp K a esisto sempe k scalar $a_1, a_2, \ldots, a_k$ taj che a s peussa scrive

$$\vec{w} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \ldots + a_k \vec{v}_k$$

andova i notoma che k a peul esse $k \geq n$. Se $k > n$ antlora nen tuti ij vetor dël sistema ed generator a son linearment indipendent. Se, pr'esempi i pensoma a lë spassi R^3, e i consideroma n'ansema ëd quat vetor. e i suponoma che costi vetor a sio nen tuti an sl'istéss pian.

Sòn a dis ch'i l'oma pì che na manera d'esprime tuti ij vatordle spassi coma combinassion linear dij vetor generator,

Se però i ciamoma che ij vetor generator a sio linearment andipendent fra 'd lor, e che a sio tanti quanti a son ij gté 'd libertà dlë spassi vetorial consideràantlora i l'oma n vetor che a formo na "***base***" ant lë spassi vetorial, e tuti ij vetor a peulo esse esprimù coma combinassion linear dij vetor dla base.

Coma abresé ëd lòn ch'i l'ona dit i arcordoma

- N'ansema ëd n vetor nen nuj $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3, \ldots \vec{\varepsilon}_n$ as dis linearment indipendent se a-i son nen solussion a l'equassion $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i = 0$, gavà la solussion banal $\alpha_i = 0$.
- As dis che në spassi a l'é a *n* dimension se an col ëspassi as peulo trové al màssim *n* vetor che a sio linearment andipendent.
- Dàit nòstr ëspassi $V^n(R)$, ògni ansema ëd *n* vetor linearment andipendent a l'é dit na base an $V^n(R)$, e qualonque vetor a peul esse esprimù an cola base, moltiplicand ij vetor ëd base për ij giust coeficent (rapòrt fra la projession dël vetor an sij vetor dla base e ij vetor dla base midem), che as diso le component dël vetor an cola base. Ël vetor nul a peul nen esse ant l'ansema dij vetor che a formo na base, com as mostra fàcil.

- La base canònica antt më spassi vetorial Rn a l'éfàira dai vetor unitai $\vec{\varepsilon}_1,\vec{\varepsilon}_2,\vec{\varepsilon}_3,..\vec{\varepsilon}_n$, che a l'han tute le component a zero meno cola che a corispond a l'ìndes dël vetoe ch a val un. Ël vantagi ëd costa base a l'é che la enupla che a arpresenta ël vetor a l'é fàita da le component an cola base-

I notoma 'ncora che se i vetor ëd na base a ven-o scanbià fra 'd lor, as oten sempe na base, na diferenta, Donca na dàita base a l'é un "***amsema ordinà***" ëd vetor.

An nòstr but e për ël moment a-i é nen da manca d'andé pì ant l'ancreus- I lo faroma magara peui, se e cand a-i na sarà da manca.

Estension ai nùmer compléss

Se i pensoma che ij vetor ëd nòstr ëspassi vetorial a peusso esse emuple ëd nùmer compléss (che a comprendo ëdcò ij mùmer reaj) e che ël còrp djë scalar K a sia fàit daj nùmer compléss (che a comprendo 'dcò ij nùmer reaj), i podoma verifiché fàcil che le doe operassion d'adission ëd doi vetor e ëd moltiplicassion d'un vetor për në scalar a resto definìe a l'istessa manera ëd com i l'oma vist sì dzora, e donca i l'oma sempe në spassi vetorial K^n su un còrp djë scalar K, e donca tute le considerassiom ch'i l'oma fàit considerand mach ëd nùmer reaj, a contìnuo a valèj.

A venta però fé atension al fàit che un nùmere compléss a deriva da na cobia ëd nùmer reaj, e sòn a peul deneré un pòch ëd confusion, e antlora vardoma ë s-ciairìsse j'idèje.

Se i considerona ij nùner compléss coma definì da na cobia ëd nùmer reaj (a, b) e i definima j'operassion d'adission e ëd moltiplicassion coma sì sota:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) \quad ; \quad (a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

antlora i podoma dì che as trata ëd në spassi che a corispond a në spassi real, còpia ëd R^2, che donca su R a l'ha dimension 2..

Ma i podoma ëdcò dì che macassìa ij nùmer compléss a son un camp che su chiel nidem a l'ha për fòrsa dimension 1 .

Amt -el prim cas i podoma pensé al nùmer compléss coma a l'é definì da la figura 20, coma un pont localisà da doe coordinà ant ël camp dij nàmer reaj, dont la sconda a arpresenta la part imaginària e i dovoma pemsé a na base fàita da doi vetor che a peulo esse (1, 0) e (0, 1) . dont la combinassiom linear fòita con scalar che a aparten-o a R, a consent ëd produve la cobia che a arpresenta qualonque nùmer compléss.

Ant lë scond cas a venta che a basta un solvetor coma base, e i podoma serne ël vetor (1, 1). La costion a dventa banal, përchè ël canp djë scalar adéss a l'é C, equalonque element, moltiplicà për la base, a arproduv qualonque element.

Ël prodòt intern

An sto capìtol i definoma ël prodòt intern për vetor (ch'a sio reaj opura compléss) e për fonsion (che a peulo esse ò reaj ò complesse).

Un normal prodòt intern fra doi vetor reaj a peul esse fàit për component, giusta moltiplicand fra 'd lor le component con l'istéss indes e adissionand costi prodòt. I podoma fé n'esempi sempi ëd doi vetor an doe dimension $\vec{v}=\vec{i}a+\vec{j}b$ e $\vec{w}=\vec{i}c+\vec{j}d$ Ël prodòt intern $p=\vec{v}\cdot\vec{w}$, che a l'é pì nen un vetor ma në scalar, a sarà donca $p=\vec{v}\cdot\vec{w}=ac+bd$

I l'oma 'dcò vist, ant ël cas ëd vetor reaj an doe ò tre dimension, che l'istéss prodòt a l'é dàit dal prodòt dij doi mòduj moltiplicà për ël cossen dl'àngol fra ij doi vetor. Le doe espression a deuvo esse echivalente.

I suponoma che ël vetor $\vec{v}$ a fasa n'angol α con l'ass x e ël vetor $\vec{w}$ a fasa n'àngol β sempe con l'ass x. Le component ëd $\vec{v}$ a saran $a = |\vec{v}|\cos\alpha$ e $b = |\vec{v}|\sin\alpha$ mentre cole ëd $\vec{w}$ a saran $c = |\vec{w}|\cos\beta$ e $d = |\vec{w}|\sin\beta$, Se i fona el prodòt per component i l'oma:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}|\cos\alpha\cdot|\vec{w}|\cos\beta + |\vec{v}|\sin\alpha\cdot|\vec{w}|\sin\beta = |\vec{v}||\vec{w}|(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\ \sin\beta) = |\vec{v}||\vec{w}|\cos(\alpha-\beta)$$

Se i suponoma ëd vetor definì ant në spassi real a n dimension, e donca con vetor a n component ël prodòt intern ëd doi vetor $\vec{v}$ e $\vec{w}$ a resta definì da:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} v_i\, w_i$$

andova i a l'é l'ìndes dle component.

La "longhëssa" $|\vec{v}\ |$ d'un vetor $\vec{v}$ (an qualonque dimension) a l'é sempe dàita da

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i\, v_i}$$

Ant ël camp compléss, però, costa definission a và pì nen bin, dal moment che na "longhëssa" as supon che a sìa un nùmer positiv (un "mòdul"), mentre ël quadrà d'un nùmer imaginari l'é negativ. A-i é donca da manca ëd na neuva definission che a continua a 'ndé bim ant ël camp real e che a vada 'dcò bin an canp compléss. . Për oten-e sòn a basta che ël prim vetor a sia sostituì da sò compléss coniugà, mentre lë scond vetor a resta col ch'a l'era.

I dovroma le notassion $\vec{v}^*$ opura la notassion $\langle\vec{v}|$ për indiché ël compléss coniugà dël vetor $\vec{v}$, e i lo disoma "vetor ***bra***", mentre ël vetor normal a peul dovré la notassion $|\vec{v}\rangle$ e as dis "vetor ***ket***". Ël prodòt intern d'un vetor bra për un vetor ket a peul dovré la notassion scursà $\langle\vec{v}|\vec{w}\rangle$. Donca i l'oma:

$$\vec{v}^*\cdot\vec{w} = \langle\vec{v}|\vec{w}\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i^*\, \vec{w}_i$$

A l'istessa manera ël mòdul $|\vec{v}|$ d'un vetor a dventa $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}^*\cdot\vec{v}} = \sqrt{\langle\vec{v}|\vec{v}\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^*\, v_i}$ e an sta manera a l'é sicur che ël radicand a l'é sempe positiv tant con vetor reaj coma con vetor compléss,. An efét l'operassion ëd coniugassion complessa a l'ha gnun efét an sij vetor reaj mentre për ij termo imaginari i l'oma sempe n'unità imaginaria i moltiplicà për $-i$, ò al contrari, operassion che a dà sempe $+1$ coma arzultà.

A l'istéssa manera a ven definì ël prodòt untern ëd doe fonsion, che com i l'oma vist, a peulo esse intèise coma vetor ant në spassi a infinìe dimension. La somatòria as trasforma ant n'integral. Dàite antlora le fonsion f e g i definima:

$$f\cdot g = \langle f|g\rangle = \int f^*(x)\, g(x)\, dx$$

andova l'integral a l'é estèis a n'interval d'interesse da a a b , interval che a peul esse 'dcò anfinì. I arcordoma che, al moment, i stoma considerand fonsion contìnue, almanch ant l'interval considerà. L'iintegral a venta che a daga un nàmer finì, e donca le fonsion a venta che a sio dël tipo "***quadrà-integràbij***" ant l'interval ***(a, b).*** Lë spassi dle fonsion quadrà integràbij ant l'interval ***(a, b)*** a lé dit "***spassi*** L^2***(a, b)***".

A sta mirai notoma che për ël prodòt intern definì parèj a val pì nen la proprietà comutativa, e se as ëscambio fra 'd lor ij doi fator as oten ël compléss coniugà dl'arzultà. Pr'esempi:

$f = ax + ibx\,;\, g = cx + idx$

$f\,g = x^2(a - ib)(c + id) = x^2(ac + bd) + ix^2(ad - cb)$

$g\,f = x^2(c - id)(a + ib) = x^2(ac + bd) + ix^2(-ad + cb) = x^2(ac + bd) - ix^2(ad - cb)$

"Nòrma", distansa e àngoj

An general, la "***nòrma***" an 's në spassi vetorial V real ò compléss sul camp scalar K a l'é na fonsion, che indicoma con ël sìmbol $\|\cdot\|$ che a l'ha le proprietà che i mostrona sì sota:

- $\|\vec{v}\| \geq o \quad \forall \vec{v} \in V$
- $\|\cdot\| = 0$ se, e mach se $x = 0$
- $\|\alpha\vec{v}\| = \alpha\|\vec{v}\| \quad \forall \alpha \in K$
- $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\| \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$

Ël prodòt intern ch'i l'oma vist a induv ant lë spasso vetorial na nòrma che ant ël cas ëd vetor ant lë spassi real a doe ò tre dimension a corisèpnd a la longhëssa dël vetor (fra orìgin e pomta), mentre an tuti j'àutri cas a ven sempe ciamà (oltra che nòrma) sempe "***longhëssa***". Parland dë spassi ëd fonsion ëd sàlit as deuvra ël termo "***nòrma***".

Në spassi vetorial con na nòrma definìa as dis "***spassi normà***". Sto spassi a l'é 'dcò në "s***passi metrich***", vis-a-dì në spassi andova as peul definì na "***distansa***" fra doi pont andividoà da doi vetor..

Se V a l'é në spassi vetorial andova a l'é definìa na nòrma. amtlora a l'é 'dcò definìa na fonsiom "distansa" fra doi vetor $d(\vec{v}, \vec{w})$ con $\vec{v}, \vec{w} \in V$ coma $d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\|$ e le proprietà ëd costa fonsion a derivo sùbit da cole dla nòrma.

A l'é ciàir cheël vetor diferensa dij doi vetor as oten për diferensa dle component, e la radis quadrà dl'adission dël quadrà ëd coste diferensee a l'é la distansa(ò l'estension dl'idèja ëd distansa) fra ij doi pont andividoà dai doi vetor. An 2 ò an tre dimension sòn as verìfica fàcil

I l'oma vist coma na fonsion f a peussa esse considerà un vetor ant në spassi an anfinìe dimension. An sto spassi i l'oma vist coma i podoma estende ël prodòt intern ëd doe fonsion, e i podoma definì na ***nòrma*** $\|f\|$ indota da sto prodòt imtern, am costa manera

$$\|f\| = \sqrt{f^* \cdot f} = \sqrt{\langle f \,|\, f \rangle} = \sqrt{\int_{tuti\ j'x} f^*(x) f(x) dx}$$

Drfinìa parèj, costa nòrma a sodisfa tute le condission ch'i l'oma scrivù sì dzora. I l'oma già notà coma, ant në spassi con n'anfinì cont'nuo ëd dimension, la fonsion a l'é macassìa arpresentà d un pont, che i disoma Q, e la nòrma a l'é n0estension dël concét ëd distansa fra sto pont e l'orìgin O -

Tant com i l'oma fàit prima, për vetor a n dimension, i podoma 'dcò definì la "distansa" fra doe fonsion. I suponoma d'avèj, oltra a la fonsion f vista sì dzora, che a individoa ël pnt Q, ëdcò la fonsion g che a individoa n'àutr pont P. Për estension ëd lòn ch'i l'oma vist prima, la distansa a sarà cola fra ij pont P e Q, e a sarà domca dàita da

$$\|f(x) - g(x)\| = \sqrt{\left[f(x) - g(x)\right]^* \left[f(x) - g(x)\right] dx}$$

La nòrma, e la distansa a son nùmer reaj positiv, e na fonsion a l'é "***normalisàbil***" se a l'é "***quadrà-integràbil***" ant ël sens dla definission dàita. Lë spassi ëd le fonsion con coste caraterìstiche a l'é në "***spassi métrich***" e në "***spassi normà***".

I l'oma vist, an doe ò tre dimension, che ël prodòt ëscalar ëd doi vetor a corispond al prodòt dij mòduj moltiplicò për ël cossen ëd l'àngol fàit dai doi vetor. Donca për doi vetor, che a sio diferent da zero, ël prodòt ëscalar a peul valèj zero se, e mach se. ël cossen dl'àngol α che ij doi vetor a formo, a val zero e donca se ij doi vetor a son ortogonaj.

Pr'esempi, an doe ò tre dimension i l'oma che ël prodòt intern dij vetor $\vec{v},\vec{w}$ al'é:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}||\vec{w}|\cos\alpha \quad \text{e antlora} \quad \cos\alpha=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|} \quad \text{e donca} \quad \alpha=\arccos\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}$$

andova α a l'é n'àbgol dij sòlit che i conossoma da la geometrìa.

A parte da ol an manera nen intuitiva, e a smija che a-i sia nen ëd sust a parlé d'àngoj. Macassìa a l'é amportant manten-e quat dimension an sù, fin-a a rivé a l'infinità contìnua dle fonsion contìnue, i dovoma estende ël concét d'àngol e ël concétd'ortogomalità fra vetor a n dimension nen nùj e fra fonsion nen nule, anlià a l'anulésse dël prodòt intern.

Donca i disoma "***ortogonaj*** " doi vetor diferent da zero ò doe fonsion diferente da zero an meud udentich, dont ël prodòt scalar a val zero.

Fonsion e vetor normalisà e ortogonaj

Is arferima a la nòrma indota dal orodòt intern, com i l'oma vist sì dzora. I comensoma a consideré un vetor $\vec{v}=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ant në spassi real ò compléss a n dimension. Normalisé un vetor a veul dì déje nòrma ugual a 1 sensa cambié doa £diressiom". An pràtica as trara ëd trové sò vwesor, tal che, moltiplicà për la nòrma dël vetor ëd partena (che a corispond a soa "longhëssa"= a arproduv ël vetor ëd partensa.

I comensoma antlora a calcolé la nòrma dël vetor $\|\vec{v}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}v_i^*v_i}$, e peui a basta divide ël vetor për soa nòrma, che a l'é në scalar, e a resta sò versor $\vec{u}=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, dont ël mòdul a val *1* .

La còsa as estens, com i l'oma fàit prima, a le fonsion contìnue intèise coma vetor. Na fonsion f a l'é dita "***normalisà*** " se, e mach se, soa mòrma a val *1* e donca se $\sqrt{\langle f|f\rangle}=\langle f|f\rangle=1$.

Partend da na fonsion *f(x)* , i calcolona soa nòrmacom i l'oma indicà sì dzora, e i podoma scrive;

$$\|f\|=\sqrt{f^*\cdot f}=\sqrt{\langle f|f\rangle}=\sqrt{\int_{tuti\ j'x} f*(x)f(x)dx}$$

L'interval ed definission a l'é col d'anterésse e a peul esse 'dcò da $-\infty$ a $+\infty$. As trara peui ëd divide la fonsion ër soa nòrma, e la costantreal positiva $A=\frac{1}{\|f(x)\|}$ a l'é la costant ëd normalisassion- Përchè sòn a l'òbia un sens a venta che la nòrma a sia un nùmer finì e che dobca la fonsion a sia "***quadrà-untegràbil*** ". I l'oma antlora che la fonsion normalisà *u(x) = c f(x)* andova c a l'ç na costant, a l'é:

$$u(x)=\frac{f(x)}{\|f(x)\|} \quad ; \quad \|u(x)\|=\sqrt{\int\frac{f^*}{\|f\|}\frac{f}{\|f\|}dx}=\sqrt{\int\frac{1}{\|f\|^2}f^*f\,dx}=\frac{1}{\|f\|}\sqrt{\int f^*f\,dx}=\frac{1}{\|f\|}\|f\|=1$$

I ciamoma peui "***ortogonaj***" doe fonsion (ò doi vetor) f e g che a sio nen nuj, se e mach se sò prodòt interm a val zero, vis-a-dì se $\langle f|g\rangle=0$. St'agetiv a ven da jë spassi a doe ò a tre dimension, andova costa a l'é la condission përchè doi vetor a formo n'àngol ëd π/2., com i l'oma vist.

N'ansema ëd vetor che a sio ortogonaj a doi a doi, e che a sìo normalisà a formo n'ansema ëd vetor ciamà "***ortonormaj*** ".

Donca i l'avroma che n'ansema ëd vetor ò fonsion $f_1, f_2, f_3, \ldots$ a l'é n'ansema ortinirmal se:

$$0 = \langle f_1 | f_2 \rangle = \langle f_2 | f_1 \rangle = \langle f_1 | f_3 \rangle = \langle f_3 | f_1 \rangle = \langle f_2 | f_3 \rangle = \langle f_3 | f_2 \rangle = \ldots$$
$$1 = \langle f_1 | f_1 \rangle = \langle f_2 | f_2 \rangle = \langle f_3 | f_3 \rangle = \ldots$$

N'ansema ëd vetor unitari e ortogonaj fra 'd lor $\{\vec{e}_1, \vec{e}_{1,} \cdots, \vec{e}_n\}$ a l'é donca n'ansema "***ortonormal***", che a sodisfa a la relassion: $\langle \vec{e}_i | \vec{e}_j \rangle = \delta_{i\,j}$ andova $\delta_{i\,j}$ a l'é la ***delta ëd Kronecker*** definìa coma

$$\delta_{i\,j} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}.$$

Se ant në spassi vetorial compléss che i suponoma a tre dimension i sernoma na base $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$ e an costa base i foma ël prodòt scalar dij doi vetor: $\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \boldsymbol{v_2} + \alpha_3 \boldsymbol{v_3}$ e $\boldsymbol{w} = \beta_1 \boldsymbol{v_1} + \beta_2 \boldsymbol{v_2} + \beta_3 \boldsymbol{v_3}$ i l'oma:

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{v} | \beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 + \beta_3 \vec{v}_3 \rangle = \beta_1 \langle \vec{v} | \vec{v}_1 \rangle + \beta_2 \langle \vec{v} | \vec{v}_2 \rangle + \beta_3 \langle \vec{v} | \vec{v}_3 \rangle = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \alpha_i^* \beta_j \langle \vec{v}_i | \vec{v}_j \rangle$$

ma se la base a l'é ortonormal, antlora ël tut as arduv a $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^* \beta_i$.

Spassi ëd Banach

Fim-a dì i l'oma parlà prima ëd në spassi vetorial genérich V su d'un camp ëscalar K, peui i l'oma vist je spassi métrich e spassi normà, con prodò intern, e spassi ëd fomsion con n'anfinità contìnua ëd dimension. Ambelessì i giontoma ël concét ëd "***completëssa***".

Ne spassi metrich, andova a-i é ël concét ëd distansa, as dis che a l'é ***complét*** se ab stospassi qualonque sucession ëd Cauchy a tend a n'element che a aparten a le spassi midem.

As dis "***sucession ëd Cauvhy*** ant un dàit ëspassi, na qualonque sucession dont j'element sucessiv, che i disoma ... a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ... as avzin-o an manera andefinìa e donca as peul sempe trové un N tal che, për $n, m > N$ i l'oma che $|a_n - a_m| < \varepsilon$ andova ε a l'é un nùmer cit com as veul- La sucession a venta che a tenda a un nùmer finì.

Nen tute le sucession convergente a van bin an tuti jë spassi. Pr'esempi, ant lë spassi dont l'element a son ij mùmer rassionaj, la sucession $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$ a l'é fàita da nùmer rassionaj. ma a tend a *ln 2* , che a l'é un nùmer dësrassional, e donca l-spassi a l'é nen complét.

Në spassi ëd Banach a l'é donca në spassi métrich, normà e complét. A l'é però nen necssari che distansa e nòrma a derivo, com i l'oma vist prima, da un prodòt intern, ma a peulo derivé da d'àutre fondion, che sì an anteresso nen. . Ant ël cas ch'i l'ma vist (nòrma e distansa indote dal prodot intern) lë spassi a dventa në ***spassi ëd Hilbert*** ".

Spassi ëd Hilbert

A la fin i podoma definì në ***spassi H ëd Hilbert*** coma në spassi vetorial V (real ò compléss) su d'un canp ëscalar K (real ò compléss) che a sia në spassi métrich e normà, complét e dont métrica e nòrma a son indote dal prodòt ëscalar definì ant lë spassi midem.

A-i son vàire spassi vetoriaj che a peulo esse definì coma spassi ëd Hilbert, e an particolar la Mecànica Quantìstica a dòvra tre diferent spassi ëd Hilbert, che a son:

- Spassi ëd vetor com un nùmer n finì ëd component
- Spassi ëd vetor che a l'han n'infinità numeràbil ëd component
- Spassi ëd fonsion a quadrà-integràbij

La notassion ëd Dirac

I l'oma già acenà ëd lòn ch'as trata, e ambelessì i la vardoma da na mira un pòch pì generalisà, ma is arferima giusta a spassi a n dimension.. L'estension a spassi a infinìe dimension a vnirà an manera natural. Dàita na base, un vetor a l'é definì al complét dai valor ëd soe component (v_1 , … , v_n) an cola base. Consideroma antlora na base ortonormal $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$, i l'avroma che ël vetor $\vec{v}$ a l'é:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \vec{e}_i \, v_i$$

e donca a ògni n-upla ëd nùmer a l'é an corispondensa bi-unìvoca con un vetor. Cand la base a l'é ortonormal, ël prodòt intern a l'é arpresentà coma prodòt ed doe matriss linear, dont un-a a l'é na matriss riga e l'àutra na matriss colòna

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \left(v_1^* \; v_2^* \cdots v_n^* \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i^* \, w_i$$

As generalisa ël sìmbol $|\vec{u}\rangle$, e a ven ciamà "vetor ***ket*** ", un vetor dont le component a son cole dël vetor ed partensa (an pràtica a l'é un vetor normal). A l'é un vetor colòna.

As generalisa ël sìmbol $\langle \vec{u}|$, e a ven ciamà "vetor ***bra***", un vetor dont le component a son le complésse coniugà ëd cole dël vetor ed partensa (an pràtica a l'é ël vetor compléss coniugà). A l'é un vetor riga.

Ant ël prodòt intern as deuvra ël sìmbol semplificà $\langle \; | \; \rangle$ anvece dij doi sìmboj $\langle \; | \cdot | \; \rangle$ unì con ël pont dël prodòt intern.

Vetor giontà - dualità

Le doe arpresentassion "***bra*** " e "***ket*** " a son duàj l'un-a 'd l'àutra. As peul passé da l'un-a a l'àutra con na trasposission riga-colòna ò al contrari, e con na coniugassion dj'element. St'operassion, che a fa passé da ket a bra e al contrari, a ven ciamà "***giontassion***", e a ven indicà con ël sìmbol " † ". I l'oma che :

$$\langle \vec{v}|^\dagger = |\vec{v}\rangle \quad ; \quad |\vec{v}\rangle^\dagger = \langle \vec{v}| \quad ; \quad \left(|\vec{v}\rangle^\dagger \right)^\dagger = |\vec{v}\rangle$$

Se na régola a val per ij vetor "ket", antlora na régola dual a val ëdcò për ij "bra". I podoma pr'esempi scrive che:

$$\alpha |\vec{v}\rangle = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix} \quad \text{antlora} \quad \left(\alpha^* v_1^* \; \alpha^* v_2^* \cdots \alpha^* v_n^* \right) = \alpha^* \langle \vec{v}|$$

e donca a valo 'dcò j'espression:

$$\left(\alpha |\vec{v}\rangle \right)^\dagger = \alpha^* \langle \vec{v}| \quad \text{e peui} \quad \alpha |\vec{v}\rangle = |\alpha \vec{v}\rangle \quad \text{e donca} \quad \left(\alpha |\vec{v}\rangle \right)^\dagger = \langle \alpha \vec{v}| = \alpha^* \langle \vec{v}|$$

A sta mira i podoma dì che n'equassion del tipo: $\alpha |\vec{v}\rangle = \beta |\vec{w}\rangle + \gamma |\vec{u}\rangle$ a ìmplica 'dcò l'equassion $\alpha^* \langle \vec{v}| = \beta^* \langle \vec{w}| + \gamma^* \langle \vec{u}|$.

Proprietà

Se i dovroma costa arpresentassion për ij vetor dla base ortonormal ch'i l'oma dit (che a corispondrìo, pr'esempi, ai versor dj'ass cartesian an tre dimension), i l'oma

$$\left|\vec{e}_i\right\rangle \equiv \left|\vec{i}\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{posission ch'a fà } i$$

e i l'avroma, për un ket $\left|\vec{v}\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \left|\vec{i}\right\rangle$, mentre për un bra $\left\langle\vec{v}\right| = \sum_{i=1}^{n} v_i^* \left\langle\vec{i}\right|$.

Për doi vetor qualonque *i* e *j* ëd na base ortonormal a arzulta donca che $\left\langle\vec{i}\,\middle|\,\vec{j}\right\rangle = \delta_{i\,j}$

Se un vetor a l'é arpresentà da $\left|\vec{v}\right\rangle = \sum_i v_i \left|i\right\rangle$ antlora as peul sùbit vëdde che na component *j* qualonque a l'é dàita dal prodòt intern dël vetor *j* dla base con ël vetor $\vec{v}$ midem. Vis-a-dì :

$$\left\langle\vec{j}\middle|\vec{v}\right\rangle = \sum_i v_i \left\langle\vec{j}\middle|\vec{l}\right\rangle = \sum_i v_i\,\delta_{i\,j} = v_j \quad \text{e ancora} \quad \left|\vec{v}\right\rangle = \sum_i \left|\vec{i}\right\rangle\left\langle\vec{i}\middle|\vec{v}\right\rangle$$

Dal dualism ch'i l'oma vist prima a ven-o 'dcò le relassion:

$$\left\langle\vec{v}\right| = \sum_i \left\langle\vec{i}\right| v_i^* \quad ; \quad \left\langle\vec{v}\middle|\vec{j}\right\rangle = \sum_i \left\langle\vec{i}\middle|\vec{j}\right\rangle v_i^* = v_j^* \quad ; \quad \left\langle\vec{v}\right| = \sum_i \left\langle\vec{v}\middle|\vec{i}\right\rangle\left\langle\vec{i}\right|$$

e i notoma che se i pijoma l'espression giontà dl'espression $\left|\vec{v}\right\rangle = \sum_i \left|\vec{i}\right\rangle\left\langle\vec{i}\middle|\vec{v}\right\rangle$, vis-a-dì $\left\langle\vec{v}\right| = \sum_i \left\langle\vec{i}\middle|\vec{v}\right\rangle^* \left\langle\vec{i}\right|$, cost a val $\left\langle\vec{v}\right| = \sum_i \left\langle\vec{v}\middle|\vec{i}\right\rangle\left\langle\vec{i}\right|$ com i l'oma vist. I derivoma che për scrive l'espression giontà ëd n'espression dàita a venta invertì ij brà e ij ket, edcò ant ij ptodòt intern.

Fonsion d'onda

I l'oma già acenà che la fonsion d'onda a l'é n'element sentral dla Mecànica Quantìstica. I l'oma vist che, ant l'interpretassiom ëd Born, la fonsion d'onda ha l'ha un significà probabilìstich, e sòn a ìmplica che sta fonsion a l'òbia caraterìstiche particolar. I vëddroma dàp coma costa fonsion a l'é arpresentativa dlë stat d'un sistema quantìstich, com a peul esse trovà e com a vemta dovréla për trové le "***variàbij dinàmiche***", che a corispondo a le diferente grandësse che a carateriso ël moviment an mecànica clàssica (posission, velocità, moment, energìa e via fòrt).

Ambelessì is limitoma a vëdde cole che a son le caraterìstiche ëd coste fonsion da na mira matemàtica. As trata ëd na fonsion compléssa dle variàbij reaj ëd posission e dël temp. Second lòn che Born a l'aha ipotisà (che an pràtica a l'é dimostrasse giust), laël mòdul dla fonsion d'onda al quadrà a l'é na densità ëd probabilità. . Se donca isuounoma che $\psi(x, y, z, t)$ a sia la fonsion d'onda ëd na part'cola, i l'oma che $\left|\psi(x, y, z, \mathrm{t})\right|^2$ a l'é la densità ëd probabilità ant un dàit pont e ant un dàit temp- Costa densità, moltiplicà për un volumet *dx, dy, dz* a dà la probabilità che la particola a sia ant ël vomet midem antorna a *x, y, z*.

Për podèj avèj sto significà. la fondion a venta che a l'àbia un mòdul real e positiv. A venta peui ëdcò che a sia;

- a un sol valor (la probabilità a venta ch'a sia bin determinà).
- contìnua e con derivà prima contìmua-
- a quadrà integràbil, vis-a-dì $\int \psi^* \psi \, d\vec{r} = \int |\psi|^2 d\vec{r} = n$, con $d\vec{r}$ che a ìndica ij diferensiaj dle variàbij spassiaj, andova n a l'é real e positiv. Për sòn a vebta ten.e cont dij lìmit d'integrassion. Pr'esempe la fonsion $f(x) = e^{ix}$ a va bin se a l'é definìa fra $x = 0$ e $x = 2\pi$ mentre a va nen bin se a l'é definìa fra $x = -\infty$ e $x = +\infty$

La condission d'esse a quadrà-integràbil a përmet ëd "normalisé " la fonsion d'onfa. I l'oma vist prima coma as normalia na fonsion, e ambeless' i notoma chela normalisassion a dipend nen dal temp, an manera che na fonsion normalisà a resta normalisà ant ël temp.

La nòrma ëd na fonsion d'onda (che i suponoma a na sola variàbil) nen normalisà e che adéss i ciamoma *f(x)*, a val

$$\|f\| = \sqrt{\int_{tuti\ j'x} f^*(x) f(x) dx}$$

l'istessa fonsion d'onda normalisà i la ciamoma ψ e a val

$$\psi(x) = \frac{f}{\|f\|} = \frac{f(x)}{\sqrt{\int_{tuti\ j'x} f^*(x) f(x) dx}}$$

se i pensoma che $|\psi|^2$ a sia na densità ëd probabilitò ëd trové la partìcola ant un dintorn ëd x, antlora costa densità a val (asprimùa con la fonsion g ëd partensa):

$$|\psi|^2 = \frac{f(x)^*}{\sqrt{\int_{tuti\ j'x} f^*(x) f(x) dx}} \frac{f(x)}{\sqrt{\int_{tuti\ j'x} f^*(x) f(x) dx}} = \frac{1}{\int_{tuti\ j'x} f^*(x) f(x) dx} \left(f(x)^* f(x) \right)$$

ma costa densità, integrà su tut lë spassi, a venta che a daga la probabilità 1 përchè la partìcola a venta ch'a sia da quàich part amt lë spasso, e an efét, con la fonsion normalisà i l'oma:

$$\int_{tuti\ j'x} |\psi|(x)^2 dx = \frac{1}{\int_{tuti\ j'x} f^*(x) f(x) dx} \int_{tuti\ j'x} f^*(x) f(x) dx = 1$$

I podoma dì che ste fonsion a son element dlë spassi ë Hilbert.

Fonsion d'onda nen normalisàbij

Nen tute le fonsion d'onda a son normalisàbij ant la manera ch'i l'oma vist. An efét i l'oma che le fonsion normalisòbij a son cole che për $\vec{r} \to \infty$, a tendo a zero ampressa a basta.. Se, pr'esempe, i sercoma la posission ëd na partìcola dont lë stat a l'é dëscriv+ da ma fonsion d'onda che a sudisfa la cond'ssion $\int |\psi(\vec{r})|^2 dr = 1$, a veul d' che la partìcola a l'ha na probabilità trascuràbil d'esse lontan-a da un dàit pont $\vec{r}_0$, ma se anvece i consideroma la fonsion d'onda ëd na partìcola lìbera, che i vëddroma esse $\psi = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, i notoma che sò mòdul al quadrà a l'é na costant, pròpi përchè la partìcola a l'é lìbera e a peul esse da's oër tut con l'istéssa probabilità, e l'integral sì dzora a và a l'anfinì. An sto cas la fonsion $|\psi(\vec{r})|^2$ a l'é pì nen na densità ëd probabilità.

An sti cas, però, a peul vnì a taj na "***probabilità relativa***" , dal moment che l'integtal $\int_V |\psi(\vec{r})|^2\, dr$ estèis a un dàit volum V finì a resta bin definì,. N'espression dël tipo:

$$\frac{\int_{V_1} |\psi(\vec{r})|^2\, dr}{\int_{V_2} |\psi(\vec{r})|^2\, dr}$$

ha dà la probabilità ed tryé la partìcola an V_1 rispét a cola ëd trovéla an V_2 -

Operator

J'operator a son entità matemàtiche che a trasformo na dàita fonsion f ëd nnë spassi ëd fonsion H ant n'àutra fonsion g dl'istéss ëspassi. Ëd sòlit n'operator a ven indicà con na litra con un caplòt ansima (acsan sirconfléss. Donca:

$$\hat{\alpha} f = g$$

Për semplifiché le còse i pensoma a un sistema ëd na sola partìcola, che peui a podrà esse generalisà dòp. I disoma che n'operator a l'é "***linear***" se a val la relassion

$$\hat{\alpha}(a f + b g) = a \hat{\alpha} f + b \hat{\alpha} g$$

andova a , b a son nùmer compléss qualonque. A valo peui le proprietà arportà sì sota (andova i suponoma che f, g, h, p, q a sio fonsion dlë spassi H e a , b, c a son nùmer compléss qualonque):

- $(c\hat{\alpha}) f = c(\hat{\alpha} f)$
- $\hat{\alpha}\hat{\alpha} f = \hat{\alpha}^2 f = \hat{\alpha} g = h$
- $(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) f = \hat{\alpha} f + \hat{\beta} f = g + p$
- $\hat{\beta}\hat{\alpha} f = \hat{\beta} g = q$

An sto ùltim cas a-i son doi operator, un dòp l'àutr. A venta apliché prima col pì davzin a la fonsion, e ij doi, ëd sòlot, a peulo nen esse scambià. Sòn a val ëdcò se j'operator a son pì che doi. Son a l'é fàcil da vëdde: suponoma che f a sia giusta f = $2x$, che $\hat{\alpha} = \mathit{moltipliche} \times 3$ e che $\hat{\beta} = \mathit{fé\ la\ radis\ quadrà}$ - Antlora $\hat{\beta}\hat{\alpha} f = \sqrt{6x}$) $2{,}449489...\sqrt{x}$ mentre i l'oma $\hat{\alpha}\hat{\beta} f = 3\sqrt{x}$.

Cand, coma an sto cas $\hat{\beta}\hat{\alpha} \neq \hat{\alpha}\hat{\beta}$ "***as dis che j'operator a còmuto nen***". sòn a veul ëdcò d' che a-i son anvece d'operator che "***a còmuto***", cand i l'oma che $\hat{\beta}\hat{\alpha} = \hat{\alpha}\hat{\beta}$. Ant ël cas particolar andova $\hat{\beta}\hat{\alpha} = \hat{\alpha}\hat{\beta} = 1$ i l'ona che $\hat{\alpha}$ a l'é ël ressìproch ëd $\hat{\beta}$, e donca $\hat{\alpha} = \hat{\beta}^{-1}$; $g = \hat{\alpha} f \Rightarrow \hat{\alpha}^{-1} g$

I l'oma vist che an general a venta rispetç l'órdin dj'operator, e a sto propòsit a valo le proprietà:

- $(\hat{\alpha} + \hat{\beta})\hat{\gamma} = \hat{\alpha}\hat{\gamma} + \hat{\beta}\hat{\gamma}$; $\hat{\gamma}(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) = \hat{\gamma}\hat{\alpha} + \hat{\gamma}\hat{\beta}$
- $(\hat{\alpha}\hat{\beta})\hat{\gamma} = \hat{\alpha}(\hat{\beta}\hat{\gamma})$

Comutator e soe proprietà

As definiss "c***omutator***" ëd doi operator. $[\hat{\alpha}, \hat{\beta}]$, l'operator compòst $[\hat{\alpha}, \hat{\beta}] = (\hat{\alpha}\hat{\beta} - \hat{\beta}\hat{\alpha})$. As trata d'un concét motobin amportant ant la formulassion dla Mecànica Quantìstica.

As peul noté che ij conutator a l'han l'istéssa strutura dlr Parentesi ëd Poisson e ëd proprietà comun-e.

Sì dapréss i arportoma quàich proprietà dij comutator, che as dinostro an manera sempia, giusta aplicand la definission. Sì sota i ciamoma $A, B, C. D$ j'operator e c na costant.

$[A,A] = 0$, an efét i l'oma $[A,A] = AA - AA = 0$

$[A,B] = -[B,A]$, an efét i l'oma $[A,B] = AB - BA = -(BA - AB) = -[B,A]$

$[c,A] = 0$ andova c a l'é na costant. An efét $[c,A] = cA - Ac = 0$

$[A,BC] = B[A,C] + [A,B]C$

$[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B$

$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$

$[AB,CD] = A[B,C]D + AC[B,D] + [A,C]BD + C[A,D]B$

Autofonsion e autovalor

Aplicand m'operator $\hat{\alpha}$ a na fonsion f, com i l'oma vist, as oten na fonsion g, che, ëd sòlit, a l'é na fonsion linearment indipendenta da g, vis-a-dì che l'espression $a\,f + b\,g = 0$ se, e mach se, $a = b = 0$.

Ma a peul capité che për quàich particolar fonsion f_1 as verìfica la situassiom :

$$\hat{\alpha}\, f_1 = a\, f_1$$

andova $\hat{\alpha}$ a l'é l'operator

f_1 a l'é na "***autofonsion***" dl'operator

mentre a a l'é un nùmer compléss che a l'é ël corispondent "***autovalor***".

Sòn a veul dì che se i ciamoma g la fonsion che as oten aplicand l'operator, vis-a-dì $\hat{\alpha}\, f_1 = g = a\, f_1$, i l'avroma che g e f_1 a son linearment dipendent ($a\, f_1 - g = a\, f_1 - a\, f = 0$).

Ëd sòlit n'operator a l'ha vàire autofonsion, ognidun-a con sò autovalor. Se i pensoma a un n për adéss qualonque, antlora i podroma avèj, për i da 1 a n:

$$\hat{\alpha}\psi_i = a_i\, \psi_i$$

Ognidun-a dle autofonsion ëd n'operator a l'é linearment andipendenta da j'àutre e ognidun-a ëd lor a dëscriv në stat dël sistema che a l'é ciamà un "***autostat***" ëd l'operator.

A peul capité che a-i sio diverse autofonsion che a l'han l'autovalor istéss, An sto cas as dis che a-i é "***degenerassion***!, coma pr'esempi, com i vëddroma, cand a-i son diferent ëstat che a l'han la nidena energìa.

J'autofonsion ëd n'operator a peulo 'dcò esse anfinìe, e an sto cas a peulo formé n'ansema contìnuo opura n'ansema discrét-

Giontà ëd n'operator

Parland dla notassion ëd Dirac i l'oma acenà a l'operassion ëd ***giomta***, che a fà passé da un vetor ***bra*** a un vetor ***ket***, e al contrari. Ambelessì i vardoma còs a l'é ***n'operator giontà***.

I dovroma la notassion ëd Dirac, e i comsideroma le doe fonsion d'onda qualonque Φ e Ψ Dàit n'operator $\hat{\alpha}$, i ciamoma sò "***operator giomtà***" l'operator $\hat{\alpha}^+$ tal che a sia:

$$\langle \Phi | \hat{\alpha}^+ | \Psi \rangle = \langle \hat{\alpha}\, \Phi | \Psi \rangle \quad ; \quad \langle \Psi | \hat{\alpha}^+ | \Psi \rangle = \langle \hat{\alpha}\, \Psi | \Psi \rangle$$

Operator Hermitian

N'operator hermitian a l'é n'operator che a coincid con sò operator giontà. Se donca $\hat{\alpha}$ a l'é n'operator hermitian i l'avroma che $\hat{\alpha} \equiv \hat{\alpha}^{+}$. As trata donca ëd n'operator "***autogiontà*** ".

Antlora, se l'operator $\hat{\alpha}$ a l'* hermitian, i podoma scrive:

$$\langle \Phi | \hat{\alpha} | \Psi \rangle = \langle \hat{\alpha} \Phi | \Psi \rangle \quad ; \quad \langle \Psi | \hat{\alpha} | \Psi \rangle = \langle \hat{\alpha} \Psi | \Psi \rangle$$

e donca sòn a dis che ant l'integral d'un prodòt intern n'operator hermitian a òpera a l'istéssa manera tant a drita com a snìstra.

As peul ëdcò definì coma hermitian n'operator $\hat{\alpha}$ tal che, për n'ansema ëd fonsion Ψ_i a sia:

$$\left\langle \Psi_j \middle| \hat{\alpha} \Psi_i \right\rangle = \left\langle \Psi_i \middle| \hat{\alpha} \Psi_j \right\rangle^* = \left\langle \hat{\alpha} \Psi_j \middle| \Psi_i \right\rangle$$

$$\int \Psi_j^* \hat{\alpha} \Psi_i \, d\tau = \int \Psi_i \left(\hat{\alpha} \Psi_j \right)^* d\tau$$

L'ugualiansa $\left\langle \Psi_j \middle| \hat{\alpha} \Psi_i \right\rangle = \left\langle \Psi_i \middle| \hat{\alpha} \Psi_j \right\rangle^*$ a l'é dita la régola dël "***turn over***" opura, an manera pì nostran-a, la "***régola dlë scambi***".

L'esse hermitian ò manch a dipend tant da l'operator midem, coma da le fonsion e dal camp d'inyegrassion-

Coma esempi i podoma consideré l'operator $\hat{\alpha} = -i\hbar \frac{d}{dx} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$. I l'oma.

$$\left\langle \Phi \middle| -i\hbar \frac{d}{dx} \psi \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^* \left(-i\hbar \right) \frac{d}{dx} \Psi \, dx = \left(-i\hbar \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^* \frac{d}{dx} \Psi \, dx$$

e se i foma n'integrassion për oart i otnoma:

$$-i\hbar \left[\left| \Phi^* \Psi \right|_{-\infty}^{+\infty} - \int \frac{d}{dx} \Phi^* \Psi \, dx \right] \qquad \text{ma i l'oma che} \qquad \left| \Phi^* \Psi \right|_{-\infty}^{+\infty} = 0 \qquad \text{4 donca a resta}$$

$$-\left(-i\hbar \right) \int \frac{d}{dx} \Phi^* \Psi \, dx = i\hbar \int \frac{d}{dx} \Phi^* \Psi \, dx = \left\langle -i\hbar \frac{d}{dx} \Phi \middle| \Psi \right\rangle$$

I vëddroma peui che j0operator d'anteresse an Mecànica Quantìstica a son linead e hermitian.

Se $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ a son doi operator linear e hernitan che a còmuto, vis-a-dì che $\left[\hat{\alpha}, \hat{\beta} \right] = 0$, antlota ëdcò l'operator $\hat{\alpha} \hat{\beta}$ a l'é linear e hermitian.

pàgina veuida

Postulà e prinsìpi

La Mecanica Quantìstica a part da postulà e prinsìpi dont la giustificassion, pì che esse rigorosa an termo matemàtich a l'é dàita pitòst dal sucéss ant ël dëscrive ij fenòmeno sperimentaj. J'arzultà dle misure pràtiche e d0esperiment ideaj teòrich a cobio bin con la teorìa svilupà su costi postulà e costi prinsìpi.

Postulà dla fonsion d'onda

Sto postulà a dis che :

- *Lë stat d'un sistema fisich a l'é definì da na fonsion d'onda* Ψ *dle coordinà e del temp. Tute j'informassion an slë stat dël sistema a son contnùe am costa fonsion, dita 'dcò fonsion dë stat ò vetor dë stat.*

Com i l'oma vist sta fonsion $\Psi(q,t)$ a venta che a sia a un sol valor, contìnua e quadrà-integràbil. Ëd sòlit as supon che sta fonsion a sia 'dcò normalisà, an manera che $\langle\psi|\psi\rangle=1$.

Le fonsion d'onda a l'é n'element ëd në spassi ëd Hilbert. I l'ona vist che le fonsion a peulo esse considerà coma vetor, e na fonsion d'onda a ven arpresentà da un "*ket* " ant la notassion ëd Dirac.

I armandoma a lòn ch0i l'oma dit a propòsit dla notassion ed Dirac, e ambelessì i foma n'estension a le fonsion d'onda. N'ansema ëd fonsion ortonormaj a peul esse considerà na base ant lë spassi vetorial ëd Hilbert. Costi a son ket arpresentàcoma $|\Psi_i\rangle$ opura, coma vetor ortonormaj dla base, giusta con $|i\rangle$.

Un ket, moltiplicà për në scalat, a produv n' àutr ket con l'istéssa "diression" e con diferenta grandëssa. Vis-a-dì $k|\Psi_i\rangle=|c\Psi_i\rangle$.

Cand n'operator a agiss an s'un ket, l'arzultà a l'é sempe n'àutr ket. Vis-a-dì $\hat{\alpha}|\Psi\rangle=|\hat{\alpha}\Psi\rangle=|\Phi\rangle$,

Le fonsion d'onda a son fonsion complesse e donca edcò le spassi ëd Hilbert d'interesse a l'é në spassi compléss. An sto spassi as antroduvo ij vetor compléss coniugà dij ket, che a son dit ij "***bra***", che i arpresemtoma coma a $\langle\Psi_i|$ opura, se as trataa ed vetor ortonormaj dla base, giusta con $\langle i|$

Un vetor bra a l'é ël vetor giontà dël corispondent vetor ket : $\langle\psi|=|\Psi\rangle^{+}$ e $|\Psi\rangle=\langle\psi|^{+}$

Postulà dj'osservaàbij e operator

J'osservàbij a son le variàbij dinàmiche che a peulo esse nisurà, e a corispondo a le grandësse dla fisica clàssica. Syo postulà a dis che a ògni osservàbil a l'é socià n'operator linear e hernitian che, aplicà a la fonsion d'onda, Donca, an general, i l'oma che a ògni fonsion dla posission e dël moment dla fisica clàssica, a corispond n'operator linear hermitian dla fisica quantìstica, vis-a-dì:

a la fonsion $A(\vec{r},\vec{p})$ a corispond n'operator linear hermitian $A(\vec{r},-i\hbar\nabla)$

Cola che i dovroma ambelessì a l'é ciamà ***l'arpresentassiom dle posission*** ma as peul ëdcò dovré n'arpresentassion dij moment, chr sì i lassoma da part për nen complichésse la vita,

Ant l'arpresentassion ch'i l'oma sernù la corispondensa fra la grandëssa clàssica e l'perator quantistich a l'é cola sì dpréss. Costa associassion a fa part ëd lòn ch'a l'é postulà-

Corispondensa fra variàbij clàssiche e operator

Lë schema a l'é ***variàbil clàssica*** $\Rightarrow$ ***operator*** Ël pont ëd moltiplicassion daprçss a l'operator a dis che l'operator midem a ven moltiplicà për la fonsion d'onda.

- ***Variàbij ëd posission :*** $x\Rightarrow x\cdot$; $y\Rightarrow y\cdot$; $z\Rightarrow z\cdot$

- ***Variàbij ëd moment :*** $p_x \Rightarrow \frac{\hbar\partial}{i\partial x} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$; $p_y \Rightarrow \frac{\hbar\partial}{i\partial y} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}$; $p_z \Rightarrow \frac{\hbar\partial}{i\partial z} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}$
- ***Posission e moment al quadrà :*** $x^2 \Rightarrow (x\cdot)(x\cdot) = x^2\cdot$; $p_x^2 \Rightarrow \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) = -\hbar^2\frac{\partial^3}{\partial x^2}$ ..etc..
- ***Energia cinética :*** $T = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \frac{1}{2n}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) \Rightarrow \hat{T} = \frac{-\hbar^2}{2n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$

  donca $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$
- ***Energia potensial :*** A dipend dal problema fisich. Sempe fonsion dla posission , *V(x, y, z)* a peul esse 'dcò fonsion dël temp *V(x, y, z, t)*. Amt l'ossilator (elastissità) l'energìa potensial a l'é fomdiom dël quadrà dlë spostament $V = \frac{1}{2}kx^2$ e via fòrt. A peul ëdcà esse na costant *V = cost.* an tuti ij cas i l'oma $V \Rightarrow \hat{V} = V$ -
- ***Energia total :*** Adission dl'energìa cinética e dl'energìa potensial $E_{tot} = V + T = H$, che a l'é l'Hamiltonian.

  I l'oma che $H \Rightarrow \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \hat{V}$
- ***Moment angolar :*** I arcordoma che ël moment angolar clàssich a l'é : $\vec{M} = \vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$ e

  svilupand: $\vec{L} = \vec{i}\left(y p_z - z p_y\right) + \vec{j}\left(z p_x - x p_z\right) + \vec{k}\left(x p_y - y p_x\right) = \vec{i}\,L_x + \vec{j}\,L_y + \vec{k}\,L_z$

  e donca : $\vec{L} \Rightarrow \hat{L} = -i\hbar\left[\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) + \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) + \left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] = -i\hbar\left(\hat{L}_x + \hat{L}_y + \hat{L}_z\right)$

Postulà dj'autovalor

I l'oma vist che j'autovalor d'un operator linear hermitian a son sempe nùmer reaj. Le variàbij dinàmiche a l'han un sens fisich se a son nùmer reaj. Sto postulà a dis che:

- *Ant un sistema j'ùnich valor che na variàbij dinàmica a peul avèj a son dàit da j'autovalor dl'operator corispondent.*

I l'oma vist che n'operator a peul avèj vàire autofonsion e donca vòire autovalor. J'autofonsion a arpresento jë stat possìbij për ël sistema, mentre j'aytovalor a son ij corispondent valor dla variàbil dinàmica socià a l'operator.

Pr'esempi ant un dàit sistema as podrìa avèj :

$$\hat{T}\Psi = T_i\Psi_i \quad \text{andova} \quad i = 1,\dots n \quad ; \quad T_i = \text{scalar reaj (autovalor)} \quad ; \quad \Psi_i = \text{autofonsion}$$

Ij valor possibij për l'energìa cinética dël sistema a son ij T_i. .Se ël sistema as treuva amt m'autostat)dëscrit da n'autofonsion= ògni misura, am sto cas) dl'energìa cinética a dà ël corispondent autovalor.

Se anvece ël sistema a l'é dëscrivù da na genérica fonsion Ψ , se as fà na midurs as treuva un dij valor T_i. e ël sistema a passa ant lë stat dscrivù da la relativa autofonsion Ψ_i .

La misura ëd na variàbil dinàmica ant un sistema a fà sempe passé ël sistema midem ant n'autostat dl'operator dla variàbil ch'as misura.

Postulà dël valor medi

I suponoma che $a(\vec{r})$ a sia na qualonque variàbil dinànica fonsion dla posission ëd na partìcola dont lë stat a l'é dëscrivù da la fonsion d'onda (as treuva ant lë stat dinàmich) Ψ .

Ël valor medi dla varià bil $a(\vec{r})$ an slë stat Ψ a l'é dàit da la média aritmética dle misure ëd $a(\vec{r})$ fòite su un dùmer N gròss ëd sistema echivalent e indipendent l'un da l'àutr, dëscrivù da la midema fonsion Ψ.

Ël valor ëd $a(\vec{r})$ a l'é determinà precis na vira che as conòss $\vec{r}$, ma un dàit valor ëd $\vec{r}$ a l'é conossà mach con na dòita probabilità $P(\vec{r})$. I podoma definì ël valor medi ëd $a(\vec{r})$ coma:

$$\langle a(\vec{r})\rangle = \int a(\vec{r})P(\vec{r})d\vec{r} = \int a(\vec{r})|\Psi(\vec{r})|^2 d\vec{r} \; = \int \Psi(\vec{r})^* a(\vec{r})\Psi(\vec{r})d\vec{r}$$

I notoma che a-i é nen da manca che Ψ a sia n'autofonsion. Sòn a giustìfica ël postulà che a dà për ël valor medi $\langle a\rangle$ ëd na varià bil dinàmica a, dont l'operator a l'é $\hat{a}$, l'espression:

$$\langle a\rangle = \langle\psi|\hat{a}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{a}\psi\rangle$$

èr'esempi ël valor medi dl'energìa total d'un sistema dëscrivù da la fonsion d'onda Ψ a l'é:

$$\langle H\rangle = \langle\Psi|-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V|\Psi\rangle = \langle\Psi|\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V\right)\Psi\rangle$$

Ël valor medi a l'é 'dcò dit Valor spetà, valor atendìbil, valor dë spetansa. I motoma che ògni misura a dà, nacass'a, n'autovalor dl'operatorr

Prinsipi ëd Ehrenfest

Se $\{q_i, p_i\}$ a son coordinà generalisà e moment d'un sistema mecànich, ël prinsìpi ëd Ehrenfest a dis che j'equassion dël moviment ëd Hamilton a valo coma valor spetà an Mecànica Quantìstica.

Sòn a echival a scrive:

$$\frac{d}{dt}\langle q_i\rangle = \left\langle\frac{\partial H}{\partial p_i}\right\rangle \quad ; \quad \frac{d}{dt}\langle p_i\rangle = -\left\langle\frac{\partial H}{\partial q_i}\right\rangle$$

An particolar i podoma consideré un pont ëd massa m che as bogia ant na dimension e ant un potensial $V(x)$. I l'oma:

$$\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \left\langle\frac{p}{m}\right\rangle \quad ; \quad \frac{d}{dt}\langle p\rangle = \left\langle-\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle$$

e i vardoma se coste equassion a son sodisfàite da l'equassion për j'onde ëd De Broglie ant na dimension:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

I podoma antlora scrive, partend da $\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \left\langle\frac{p}{m}\right\rangle$, che:

$$\langle p\rangle = m\frac{d}{dt}\langle x\rangle = m\frac{d}{dt}\int\psi^*(x,t)x\psi(x,t)dx$$

$$\langle p\rangle = m\int\left\{\frac{\partial\psi^*}{\partial t}x\psi+\psi^* x\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\}dx$$

Da l'equassion ëd De Broglie i arcavoma che $\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$, e donca i podoma scrive:

$$\langle p\rangle = m\left(\frac{i\hbar}{2m}\right)\int\left\{-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi^*\right)x\psi+\psi^* x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi\right\}dx$$

e integrand për part, e dòp

tuti ij passagi, as treuva che $\langle p\rangle = \int\psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\,dx$ e costa espression a peul esse intèisa coma valor spetà dël moment cand a sia dàit lë stat quantich $\psi(x, t)$. Sòn a sodisfa ël prinsìpi ëd Ehrenfest.

Se adéss i pijoma la derivà rispet al temp dë sto valor spetà $\langle p\rangle$ i dovrìo oten-e la sconda equassion ëd Hamilton. $\frac{d}{dt}\langle p\rangle = \frac{d}{dt}\int\psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi\,dx$.

Se i foma ij cont i podoma vëdde, con ij cont che i stoma nen a fé ambelessì, che da la derivà sì dzora as oten zero.

Ël prinsìpi ëd Ehrenfest a l'é sodisfàit mach se ël potensial a val zero. Son a dis che l'equassion d'onda ëd De Broglie a venta ch'a sia generalisà an manera d'andé bin con qualonque potensial.

Sta generalisassion a pòrta a na forma dl'equassion d'onda dë Schrödinger, com i vëddroma pì anans sì dapréss.

Postulà dla dipendensa dal temp

La dipendensa dal temp dl'equassion dë stat Ψ a l'é dàita da l'equassion diferensial :

$$\hat{H}\Psi = \hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

che a l'é l' ***equassion dë Schroedinger dipemdemt dal temp***.

Për na partìcola costa equassion a dventa:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(x,y,z,t)\right]\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

Consegoense ëd costi postulà (1)

Antant i disoma che costi a son nen tuti ij postulà dla Mecànica quantìstica, e a sò temp i veddroma lòn ch'a manca- As trata ëd lòn ch'as arferiss a lë ***spin*** , un problema che an Fisica Clàssica a-i é nen.

Adéss i vaedoma lòm ch'a ven dai postulà ch'i l'oma vist.

Quantità misuràbij reaj

I l'oma ciamà variàbij dinàmiche ò osservàbij, le quantità che a peulo esse misurà. I lìpma vist che ògni bariàbil dinàm9vca a l'é socià a m'operator. I l'oma vist che le nisure che a peulo esse fàite a dan, com arzultà, j'autovalor ëd costi operator. che a venta ch'a sio linear e Hermitiaan. Costi autovalor, com i l'oma vist, a son sempe nùmer reaj, e donca a peulo arpresenté grandëssa fisiche.

An efét n'operator $\hat{\alpha}$ a l'é Hermitian se, com i l'oma vist, a val la relassiom

$$\int\Psi^*(\vec{r})\left(\hat{\alpha}\Psi(\vec{r})\right)d\vec{r} = \int\left(\hat{\alpha}\Psi(\vec{r})\right)^*\Psi(\vec{r})\,d\vec{r}$$

e se i aplicoma costa relassion a n'autofonsion F e a n'autovalor a dl'operator $\hat{\alpha}$, arcordand che $\hat{\alpha}\,f = a\,f$:

$$\int f^*(\vec{r})\,a\,f(\vec{r})\,d\vec{r} = \int a^*\,f^*(\vec{r})\,f(\vec{r})\,d\vec{r}$$

e da sì a ven che $a^* = a$ e donca a a l'é real.

Autofonsion ortogonaj

Se ψ_1 ; ψ_2 a son doe autofonsion andipendente dl'operator $\hat{\alpha}$, antlora a son ortogonaj.- An efét se le doe autofonsion a l'han autovalor diferent λ_1 ; λ_2 antlora, da la definission d'operator Hermitian as arcava che

$$\int \psi_1^*(\vec{r})\left(\hat{\alpha}\psi_2(\vec{r})\right)d\vec{r} = \int \left(\hat{\alpha}\psi_1(\vec{r})\right)^* \psi_2(\vec{r})\,d\vec{r} \quad \text{na} \quad \hat{\alpha}\psi_1 = \lambda_1\psi_1 \quad ; \quad \hat{\alpha}\psi_2 = \lambda_2\psi_2$$

$$\text{e donca} \quad \lambda_2 \int \psi_1^*(\vec{r})\psi_2(\vec{r})\,d\vec{r} = \lambda_1 \int \psi_1^*(\vec{r})\psi_2(\vec{r})\,d\vec{r} \quad \text{na} \quad \lambda \neq \lambda_2$$

$$\text{e donca} \quad \int \psi_1^*(\vec{r})\psi_2(\vec{r})\,d\vec{r} = 0$$

Se anvece aài son autofonsion (degenerà) con l'istéss autovalor, antlora coste fobsion a peulo esse combinà linearment an manera da oten.e fonsion ortogonaj che a son ancora d0autofonsion. Ambeless' i stoma nen a dëscrive sto procéss, che i vëddrona se e cand a-i na sarà da manca.

Equassion dë Schroedinger

Pont ëd base dla Mecànica Quantìstica, i tornroma vàire vire su costa equassion, che i l'oma già ancontrà ant ël postulà dla dipendensa dal temp.

Se l'energìa potensial d'un sistena a dipend nen an manera esplìssita dal temp, antlora i livéj d'energia total possìbij për ël sistema midem a son dàit da l'equassion a j'autovalor, ëdcò ciamà ***equassion dë Schroe dinger indipendenta dal temp*** :

$$\hat{H}\Psi(q) = E\Psi(q)$$

I vardoma la situassion ant ël cas ëd na partìcola. Per arzolve l'equassion dë Schroedinger dipendenta dal temp $\hat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi$ i suponoma che la fonsion d'onda complessiva *f(x,y,z,t)* a peussa esse esprimùa ant la forma

$$f(x,y,z,t) = \Psi(x,y,z)\Phi(t)$$

vardand se i podoma separé le variàbij.- An costa ipòtesi i sacrivoma:

$$\hat{H}f = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}f \quad \text{donca} \quad \hat{H}(\Psi\Phi) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\Psi\Phi) \quad \text{e 'ncora} \quad \Phi\hat{H}\Psi = i\hbar\Psi\frac{\partial}{\partial t}\Phi$$

e dividend ij doi member për $\Psi\Phi$ i otnoma:

$$\frac{1}{\Psi}\hat{H}\Psi = i\hbar\frac{1}{\Phi}\frac{\partial}{\partial t}\Phi$$

dont ij doi member a son fonsion ëd variàbij andipendente, ël prim a l'é fonsion dla posission e lë scond a l'é fonsion dël temp.

Ij doi member a venta donca che a sio uguaj a l'istessa costant. I l'oma che

$$\frac{1}{\Psi}\hat{H}\Psi = \text{costant} = i\hbar\frac{1}{\Phi}\frac{\partial}{\partial t}\Phi \quad ; \quad \hat{H}\Psi = \text{costant}\,\Psi \quad ; \quad \text{costant} = i\hbar\frac{1}{\Phi}\frac{\partial}{\partial t}\Phi$$

Se i paragonoma la prima ugualiansa con l'equassion dë Schroedingert indipendenta dal temp i podoma noté che la costant a l'é nen d'òutr che n'autovalor E dl'energìa.

I l'oma donca otnù doe equassion dont la prima, equassion dë Schroedingert indipendenta dal temp a l'é cola già trovà $\hat{H}\Psi = \mathrm{E}\Psi$. mentre la sconda a l'é $\mathrm{E} = i\hbar \frac{1}{\Phi}\frac{\partial}{\partial t}\Phi \quad ; \quad \frac{d\Phi}{\Psi} = \frac{E}{i\hbar}dt$

Arzolvend costa equassion diferensial rispét a $\Phi(t)$ i otnoma:

$$\Phi(t) = A e^{\frac{Et}{i\hbar}} = A e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

La fonsiom d'onda completa a arzulta donca:

$$f(x,y,z,t) = \Psi(x,y,z)\Phi(t) = \Psi(x,y,z) A e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$$

andova A a val 1 për che f a sia normalisà. I suponoma, an eféf, che la fonsion Ψ a l'àbia na soa costant ëd normalisassiom , e A a arzulta anglobà an costa costant. As nòta che $|f|^2 = f f^* = \Psi\Psi^*$

An generak i l'oma:

$$\hat{H}\Psi_i = E_i\Psi_i$$

$$f(x,y,z,t) = \sum_i c_i \Psi_i(x,y,z) e^{-\frac{iE_i f}{\hbar}}$$

andoca c_i a son costant complésse arbitràrie.An efét tute le solussion a peulo esse esprimàecoma adission dje stat stassionari.

Densità ëd corent e equassion ëd continuità

I l'oma vist che $|\Psi|^2$ a l'é la densità ëd probabilità per la posission ëd na partìcola. I consideroma adéss un volum finì V ant lë spassi, e i consideroma la dipendensa dal temp dla grandëssa $\frac{d}{dt}\int_V |\Psi|^2 d^3\vec{r}$. I l'oma :

$$\frac{d}{dt}\int_V |\Psi|^2 d^3\vec{r} = \int_V \left(\Psi^* \frac{\partial}{\partial t}\Psi + \frac{\partial}{\partial t}\Psi^*\Psi\right) d^3\vec{r}$$

e se i consideroma l'equassion dë Schrödinger dipendenta dal temp ch'i l'oma vist prima $\hat{H}\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi$, i arcavoma che $\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \frac{\hat{H}\Psi}{i\hbar}$ e, për la dualità vista a sò temp, a val ëdcò la relassion $\frac{\partial}{\partial t}\Psi^* = -\frac{\hat{H}\Psi^*}{i\hbar}$ complessa coniugà. L'espression sì dzora, considerand ëdcò $\hat{H} = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}$ a dventa:

$$\frac{1}{i\hbar}\int_V \left[\Psi^*\left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\Psi\right) - \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\Psi^*\right)\Psi\right] d^3\vec{r}$$

A l'é fàcil vëdde (a basta fé ij cont) che costa espression a peul esse scrivùa coma

$$\frac{1}{i\hbar}\int_V \left[\nabla\left\{\Psi^*\left(-\frac{\hbar^2\nabla}{2m}\Psi\right)\right\} + \nabla\left\{\left(\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\Psi^*\right)\Psi\right\}\right] d^3\vec{r}$$

A sta mira i ciamoma " ***densità ëd corent (ëd probabilità)*** " e indicoma con $\boldsymbol{j}$ ël vetor:

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m}\left[\left(\nabla\Psi^*\right)\psi - \Psi^*\nabla\Psi\right]$$

e an definitiva i l'ona che nòstra espression ëd partensa a dventa:

$$\frac{d}{dt}\int_V |\Psi|^2 d^3\vec{r} = -\int_V \nabla\vec{j}\, d^3\vec{r} = -\oint_S \vec{n}\cdot\vec{j}\, dS$$

andova l'ùltima ugualiansa a ven dal teorema ëd Gauss . A l'é evident ël paralçl con ël fluss d'un flùid-

I notoma che tut sòn a val p-er qualonque volum finì considerà, e donca a val ëdcò për ël volumet ekementar infinitésim local, e donca i podoma scrive che:

$$\frac{d}{dt}|\Psi|^2 = -\nabla\vec{j} \quad \text{vis-a-dì} \quad \frac{d}{dt}|\Psi|^2 + \nabla\vec{j} = 0$$

e costa a l'é l' ***equassion ëd continuità***.

Prinsìpi d'indeterminassion ed Heisemberg

I stoma sempe tratand dle consegoense dij postulà, na i butoma an particolar evidensa costa consegoensa, che a l'é un prinsìpi 'd base dla Mecànica Quantìstica.

A l'é possibil conosse a l'istéss temp e con precision doe variàbij dinàmiche mach se ij corispondent operator a còmuto.

I consideroma doe variàbij a e b dont j'operator a sio $\hat{\alpha};\hat{\beta}$. Se le doe variàbij a deuvo esse conossùe com precision e ant l'istéss temp, a venta che a-i sia na fonsion d'onda Ψ tala che:

$$\hat{\alpha}|\Psi\rangle = a|\Psi\rangle \;\Rightarrow\; \hat{\beta}\hat{\alpha}|\Psi\rangle = \hat{\beta}a|\Psi\rangle \quad \text{ma} \quad \hat{\beta}a|\Psi\rangle = a\hat{\beta}|\Psi\rangle = ab|\Psi\rangle$$
$$\hat{\beta}|\Psi\rangle = b|\Psi\rangle \;\Rightarrow\; \hat{\alpha}\hat{\beta}|\Psi\rangle = \hat{\alpha}b|\Psi\rangle \quad \text{ma} \quad \hat{\alpha}b|\Psi\rangle = b\hat{\alpha}|\Psi\rangle = ba|\Psi\rangle$$

e donca as peul vëdde che

$$\hat{\alpha}\hat{\beta}|\Psi\rangle = \hat{\beta}\hat{\alpha}|\Psi\rangle \Rightarrow \hat{\alpha}\hat{\beta} = \hat{\beta}\hat{\alpha} \Rightarrow \hat{\alpha}\hat{\beta} - \hat{\beta}\hat{\alpha} = 0 = \left[\hat{\alpha},\hat{\beta}\right]$$

e donca ël comutator dij doi operator a val zero e ij doi operator a còmuto. Nen tuti jìoperator a còmuto, e për sòn a basta vardé j'operator dla posissiom e dl'impuls.I lìoma:

$$\hat{x}\,\hat{p}_x\,\Psi = -i\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\Psi$$

$$\hat{p}_x\,\hat{x}\Psi = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x\Psi) = -i\hbar\Psi - i\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\Psi$$

$$[\hat{x}.\hat{p}_x]\Psi = (\hat{x}\,\hat{p}_x - \hat{p}_x\,\hat{x})\Psi = i\hbar\Psi \quad \text{donca} \quad [\hat{x}.\hat{p}_x] = i\hbar$$

A-i son donca ëd conie 'd variàbij che a- diso Coniugà, e cobie che anvece a son nen coniugà.

Formulassion dël prinsìpi

Ant un sistema che as treuva ant në stat arbitrari Ψ, doe osservàbij fisiche qualomque a e b a peulo nen esse misurà ant l'istéss moment e con precision se ij corispondent operatoe $\hat{\alpha};\hat{\beta}$ a còmuto nen.

La variansa a l'é na grandëssa che a dà n'idèja dla precision ëd na misura. Butoma che $\sigma_a;\sigma_b$ a sio le varianse dj'arzultà dle misure dle variàbij a e b. As peul dimostré che:, se $\hat{\alpha};\hat{\beta}$ a son ij corispondent operator:

$$\sigma_a\,\sigma_b \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle \Psi \left| \left[\hat{\alpha} . \hat{\beta} \right] \right| \psi \right\rangle\right| = \frac{1}{2}\left|\left[\hat{\alpha} . \hat{\beta} \right]\right|$$

e fonca se ël comutator a val sero, ël prodòt dle varianse a peul esse cit con as veul e, an teorìa, rivé a zero. Se anvece ël comutator a l'ha un valor diferent da zero. antlora a-i é un lìmit inferior finì al prodòt dle varianse.

Se i suponoma che a a sia la posission x e che b a sia la component dl'impuls p_x i l'oma

$$\sigma_x\,\sigma_{p_x} \geq \frac{1}{2}|i\hbar| = \frac{1}{2}\sqrt{-i\hbar \cdot i\hbar} = \frac{\hbar}{2}$$

I arportoma un pàira ëd manére teòriche ëd verifiché sto prinsìpi.

Eletron localisà da na filura.

Un-a dle manere clàssiche 'd verifiché sto prinsipi a lé col dl'eletron localisà da na filura, com arportà an figura 23.

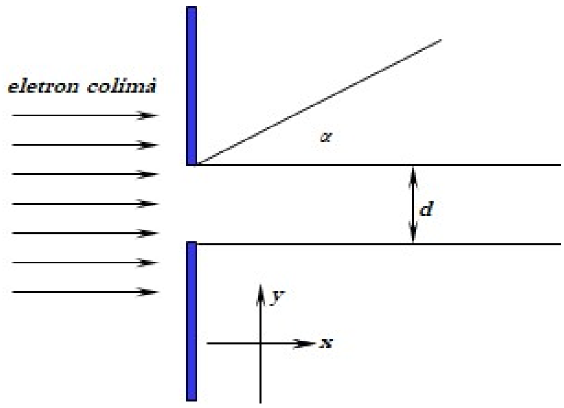


Figura 23 - Prinsìpi d'indeterminassion, n'esempi

Suponoma che l'impuls a sia nen modificà coma mòdul, l'eletron a l'avrà na component dl'impuls ant la diression y che a sarà $p_y \approx p \cdot \sin\alpha$. Për misuré quant a val p_y a venta conòsse l'àngol α. Se as cheuj l'eletron an 's në scherm daré dla filura as peul trové sto àngol α.

Ël problema a l'é che an sle scherm as forma na figura 'd difrassion, e la màssima precision che as peul oten-e an costa misura a corispond a n'àngol che a l'é $\alpha \approx \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{pd} = \frac{h}{p\Delta y}$ antlora i l'oma $\Delta p_y \approx p\alpha \approx \frac{h}{\Delta y}$ e da sì as treuva che $\Delta p_y \Delta y \approx h$.

Microscòpi ëd Heisemberg

I suponoma un sistéma ëd misura teòrich coma col arpresentà an figura 24, andova i l'oma n'ipotétich microscòpi bon a fé vëdde j'eletron. Për podej vëdde e localisé l'eletron, un foton a riva normal a l'ass ëd l'obietiv, e a ven difondù da l'eletron andrinta a l'obietiv. Da l'òtica i savoma che la risolussion orisontal a l'é dàita da la fòrmola $\Delta x \approx \frac{\lambda}{\sin\alpha}$, andova λ a l'é la longhëssa d'ónda dla lus dovrà, e α l'overtura angolar dl'obietiv.

Ma ant la misura l'eletron a arsèiv n'impuls dàit da la lus devià ant l'obietiv. La diression dël foton a l'é conossùa mach con l'aprossimassion dàita da l'àngol α, e donca la component orisontal dl'impuls a l'avrà 'dcò chièl n'indeterminassion $\Delta p \approx \frac{h\nu}{c}\sin\alpha = \frac{h}{\lambda}\sin\alpha$.

Se antlora i foma 'l cont dl'indeterminassion i l'oma $\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\lambda}{\sin\alpha}\frac{h}{\lambda}\sin\alpha = h$

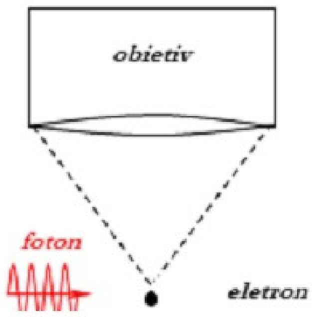


Figura 24 - Microscòpi ëd Heisemberg

Variàbij compatìbij

A ven-o ciamà variàbij ***compatìbij*** cole che a peulo esse misurà ant l'istéss moment e an manera precisa (donca as trata ëd variàbij nen coniugà). A son compatìbij, pr'esempi, le component dla posission, opura le component dl'impuls, opura combinassion coma pr'esempi (x, y, p_z) e via fòrt.

N'ansema 'd variàbij compatibij misurà su un sistema as dis ***complét*** se tute j'àutre variàbij compatibij con ognidun-a con le variàbij dl'ansema a peul esse trovà coma fonsion ëd cole conossùe. Sòn a l'é 'l màssim ëd lòn che as peul savèj su col sistema.

As diso anvece variàbij ***complementar*** doe variàbij nen compatìbij, ant ël sens che a peulo nen esse misurà da l'istéss dispositiv sperimental. A son complementar variàbij coma x e p_x, che a son dovrà an fisica clàssica, pr'esempi, da j'equassion canòniche.
Se un sistema a l'é isolà e as conòss soa fonsion d'ónda ant un dàit temp, as peul trové la fonsion d'ónda a un temp sucessiv, e as peul dì che 'l comportament a l'é determinìstich, ma se as preuva a fé na misura, lë strument ëd misura a introduv na përturbassion che a pòrta 'l sistema ant në stat pì nen conossù. Com i l'oma vist prima, sòn a val ëdcò për la conossensa dle condission inissiaj.

Indeterminassion arcavà da na fonsion d'onda

I podoma consideré na partìcola dëscrivùa da la fonsion d'onda, $f(\mathbf{r}, t)$ compléssa, dont ël quadrà a l'é integràbil e normalisàbil, $\int |f(\vec{r},t)|^2 d\vec{r} = 1$. Sta fonsion a l'é 'dcò ciamà "*pachet d'onde*", e a dëscriv l'aspét ondulatòri dla partìcola, mentre l'aspét corpuscolar a l'é descrivù da l'interpretassion ëd Born dla fonsion d'onda. Cand as fa na misura ed posission ëd na partìcola, i la trovoma ant un precis pont, ma prima dla misura i l'avìo la probabilità ëd trovela an qualonque pont $\mathbf{r}$ con na probabilità $|f(\vec{r},t)|^2$.

Vardoma antlora com as peul arcavé, sensa intré ant le dimostrassion e an manera teòrica, da la fonsion d'onda midema l'indeterminassion an sla misura ëd doe variàbij coniugà coma x e p_x (is butoma ant na sola dimension). I consideroma na fonsion d'onda teòrica che a dipenda mach da la variàbil x.

$$f(x) = A e^{-x^2/4a^2}$$

andova A a l'é la costant ëd normalisassion che a val $A = \left(2\pi a^2\right)^{-1/4}$. La densità ëd probabilità $|f(x)|^2$ a arzulta na gaussian-a sentrà an sl'orìgin.

I pijoma lë scart quadràtich medi Δx coma indeterminassion dla x. Fasend ij cont, che ambelessì i stoma nen a fé, i trovoma che $\Delta x = a$.

La fonsion *f(x)* a peul esse svilupà ant l'integral ëd Fourier second la fòrmula:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx}\, dk$$

che a dis che la fonsion d'onda che i l'oma suponù a peul esse considerà na combinassion linear contìnua d'onde con ampiëssa $F(k)$ e nùmer dìonda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Mersì a la fòrmula ëd Parseval, i podoma interpreté $\left|F(k)\right|^2$ coma la densità ëd probabilità ëd trové la partìcola con nùmer d'onda k vis-a-dì, second la relassion ëd deBròglie, con n'impuls $p_x = \hbar k$.

La fonsion *F(k)* a l'é la trasformà ëd Fourier dla *f(x)* e a arzulta, a cont fàit :

$$F(k) = \sqrt{2}\, A a e^{-k^2 a^2}$$

che a l'é torna na gaussian-a sentrà an sl'orìgin e che a l'avrà coma scart quadràtich medi $\Delta k = \frac{1}{2a}$. Donca i l'oma che $\Delta p_x = \hbar \Delta k = \frac{\hbar}{2a}$ e, a la finitiva, $\Delta x \Delta p_x = a \hbar \Delta k = \frac{\hbar}{2}$.

As conòss che na fonsion coma costa a dà ël mìnim dl'indeterminassion. për j'òutre fonsion a venta scrive che $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$, contut ch'i l'oma vist prima d'esempi ëd misure con indeterminassion pì gròssa.

Consegoense dël prinsìpi d'indeterminassion

Comensoma a noté che, fin-a a cand la costant ëd Planck a peul esse considerà cita, a venta che le lèj dla Mecànica Quantìstica a coincido con cole dla Mecànica Clàssica, a meno ëd quantità ch'a sio d'autut trascuràbij. An termo matemàtich i podoma scrive , për el prinsìpi d'indeterminassion:

$$\begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta p_x &\geq \hbar/2 \\ \Delta y \cdot \Delta p_y &\geq \hbar/2 \\ \Delta z \cdot \Delta p_z &\geq \hbar/2 \end{aligned}$$

andova la costant $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05457 \cdot 10^{-34} \left[J \cdot s\right]$ a l'é la "***costant tajà ëd Planck*** ". An realità la disugualiansa $\Delta q \cdot \Delta p \geq \hbar/2$ a val për qualonque cobia ëd variàbij canòniche complementar, nen misuràbij ansema con precision.

Fra le cobie che a peulo nen esse conossùe con precision a-i é ël valor dl'energìa ëd në stat e 'l temp ëd permanensa an col ëstat. I l'oma donca 'dcò che $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$. A-i é 'dcò posission angolar e moment angolar, e via fòrt. Sòn i lo vëddroma dòp.

Ant le misure macroscòpiche la përturbassion provocà da la misura midema a l'é sens'àutr trascuràbil. Ant ij procéss microscòpich a val ël determinism clàssich se 'l sistema a l'é lassà nen disturbà, mentre con na misura as càmbia la situassion dël sistema. As podrìa dì che ël prodòt $\Delta q \cdot \Delta p \geq \hbar$ a arpresenta na surfssa ideal ant ël pian (ancora pì ideal) $q\,,\ p$ con un valor costant. Se con na precisa misura as riva a strenze l'incertëssa *Δq*, l'incertëssa *Δp* a venta ch'a chërsa . përchè ël prodòt $\Delta q \cdot \Delta p$ a peul nen andé sota ij valor ch'i l'oma dit. Sòn a l'é schematisà an figura 25.

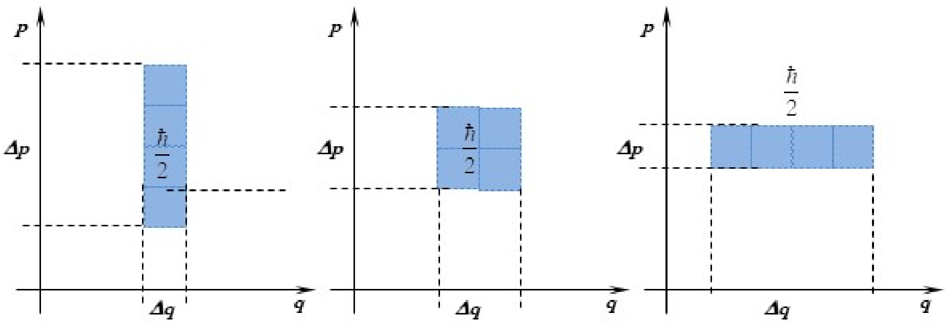


Figura 25 - Prinsìpi d'indeterminassion

An mecànica clàssica na grandëssa fisica A as dis "***variàbil dinàmica***" e as esprim coma fonsion dle coordinà canòniche q e p , vis-a-dì $A(q, p)$. A l'é ciàir che, an mecànica quantìstica, dal moment che q e p a son nen compatìbij, costa espression dla variàbil a peul nen avèj l'istéss significà. Na variàbil parèj a peul mach esse misurà an manera diréta.

Se peui i consideroma j'equassion canòniche $\begin{cases} \dot{q}_i(t) = \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i(t) = \dfrac{\partial H(q,p)}{\partial q_i} \end{cases}$ i podoma vëdde che coste equassion a peulo esse integrà, e an costa manera a sarìa conossù ël moviment con precision, bastamach che a sio conossùe le condission inissiaj $q_i(0)$ e $p_i(0)$. Coste però a peulo nen esse conossùe për ël prinsìpi d'indeterminassion, e ël moviment a resta indeterminà.

L'istéss discors a val për la trajetòria, che a l'ha equassion paramétriche $q_i = q_i(t)$, ma che a l'ha da manca dle condission inissiaj për esse determinà. A venta peui ten-e cont che se as fa na misura për determiné la posission as pèrd l'informassion an sl'impuls.

An efét, i podoma consideré coma esempi l'àtomo d'idrògen second ël modél ëd Böhr, ant lë stat fondamental.

Ël modél a l'ha sens se i soma bon a anmaginé d'osservé l'eletron an sl'òrbita ëd ragg r . I suponoma ëd podèj determiné la posission x an manera che $\Delta x \ll r$. Se i lassoma p_x indeterminà, an manera che se p a l'é 'l mòdul dl'impuls, i l'avroma che $\Delta p_x \cong p$. L'indeterminassion ëd Heisemberg a dis che $\Delta x \Delta p \cong \Delta x\, p \geq \hbar/2$, e donca a ventrìa che a podèissa esse $p r \gg \hbar$. Ma i l'oma che $p\, r$ a l'é ël moment angolar dl'eletron, che a val $p r = n\hbar$, e a ventrìa che a fussa $n \gg 1$, ma i savoma che n a l'é ël nùmer quàntich prinsipal, che ant lë stat fondamental a val 1, e donca la condission a peul nen esse sodisfàita, e donca l'òrbita a l'é nen osservàbil, e donca a l'ha nen un sens fìsich ël parlene.

Indeterminassion Energìa-Temp

Costa a l'é n'indeterminassion che a peul esse indicà coma $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$. As trata però ëd na còsa bin diferenta da l'indeterminassion ch'i l'oma vist prima. An efét as trata nen ëd doe variàbij dinàmiche dël sistema, përchè ël temp a l'é un paràmeter.

Costa indeterminassion a l'é da ten-e an considerassion an vàire soget dla mecànica quantìstica, e fra costi col dle përturbassion dipendent dal temp. As fà sente cand a venta determiné un livél d'energìa dël sistema e 'l temp ëd permanensa an col livél, e via fòrt.

A sta mira sti studi a son fòra ëd nòstr but, i tornroma an sël sogét se e cand a sarà necessari, e ambelessì i foma giusta n'esempi sempi che a peul buté an evidensa costa indeterminassion.

I suponoma donca un pachet d'onde $\psi(x)$, socià a na partìcola lìbera, che a l'àbia n'estension ëd Δx e na velocità ëd grup $v = \partial E/\partial p$. I podoma dì che ël temp ëd passagi ant un pont a l'é determinà con n'incertëssa $\Delta t = \Delta x/v$. Sto pachet a l'ha 'dcò na dàita estension ant lë spassi dj'impuls che a sarà Δp, e donca i l'avroma

$$\Delta E \cong \frac{\partial E}{\partial p}\Delta p = v\,\Delta p \cong \frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta p$$

ma i l'oma che 'l prinsìpi d'indeterminassion a dis che $\Delta x\,\Delta p \geq \hbar/2$ r donca

$$\Delta E \cong \frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} \quad \text{e donca} \quad \Delta E\,\Delta t \geq \hbar/2$$

An spetroscopìa, andova as misura na frequensa che a derìva dal passagi da un livél ecità d'energìa al livél fondamental, l'indeterminassion a l'é anlià a la permanensa ant lë stat ecità. Për adéss i andoma nen pì an là ant ël probléma.

St'indeterminassion a dipend motobin da la situassion fisica considerà. I podoma pr'esempi vëdde la còsa an costa manera. I suponoma d'esse ant në stat che a l'ha un dàit temp ed vita Δt. I arscrivoma la relassion sì dzora coms $\sigma_E\,\Delta t \geq \hbar/2$, andova σ_E a l'é l'incertëssa dl'energìa dlë stat midem.

An spetroscopìa as misura un sàut d'energìa fra un livél àut e un livél bass, travers la frequensa dij foton emëttà. second la relassion $E = h\nu$.

I l'avroma donca che l'incertessa dl'energìa as arbat an sl'incertëssa dla frequensa second la relassion $\sigma_E = h\sigma_\nu = 2\pi\hbar\sigma_\nu$. La relassion ch'i l'oma scrivù për l'energìa e ël temp a dventa :

$$2\pi\hbar\sigma_\nu\,\Delta t \geq \hbar/2 \quad ; \quad \sigma_\nu\,\Delta t \geq \frac{1}{4\pi}$$

Pì la permanensa ant lë stat ecità a l'é curta e manch a sarà la precision dla misura.

Consegoense dij postulà (2)

I arpijoma la lista dle condegoense dij postulà e dij prinsìpi ch'i l'ona vist fin-a adéss

Ansema complét e ortonormal dj'autofonsion

J'autofonsion d'ògni oprtator socià a na variàbil osservàbil a fan un sistema conplét e ortonormal.

Për nòstr but i disoma che un sistema ëd fonsion Ψ_i con dàite caraterìstiche a l'é complét se qualonque fonsion f che a l'àbia j'istesse caraterìstiche a peul esse esprimù coma combinassion linear dle fonsion dël sistema midem. Vis-a-dì che

$$f = \sum_i c_i\,\Psi_i$$

andova ij c_i a son scalar.

Sòn a veul dì che çgni combinassion linrar ëd n'ansema d'autofonsion degenerà a l'é 'ncora autofonsion con l'istésse autovalor.

I podoma vëdde col ch'a l'é l'efét ëd n'operator aplicà a na fonsion d'onda che sia nen n'autofonsion dl'operator nidem, Për sòn i consideroma ël valor spetà dl'operator.

I l'oma un sistema fisich che a l'é dëscrivù da na fonsion d'onda Ψ_i che a l'é nen n'autofonsion dl'operator $\hat{\alpha}$ che a soa vira a l'ha n'ansema complét e ortonormal d'autofonsion Φ_i.

Da lòn ch'i l'oma vist s' dzora, i podoma dì che $\Psi = \sum_i c_i \Phi_i$, e ël valor spetà dla variàbil a socià a $\hat{\alpha}$ a sarà dàit da :

$$\overline{a} = \langle \Psi | \hat{\alpha} | \Psi \rangle = \left\langle \sum_i c_i \Phi_i \middle| \hat{\alpha} \middle| \sum_i c_i \Phi_i \right\rangle = \sum_i \sum_j c_i^* c_j \langle \Phi_i | \hat{\alpha} | \Phi_j \rangle =$$

$$= \sum_i \sum_j c_i^* c_j \langle \Phi_i | a_j \Phi_j \rangle = \sum_i \sum_j c_i^* c_j a_j \langle \Phi_i | \Phi_j \rangle = \sum_i \sum_j c_i^* c_j a_j \delta_{ij} =$$

$$= \sum_i c_i^* c_i a_i = \sum_i |c_i|^2 a_i$$

- I l'oma che ògni misura dla variàbil corispondenta a l'operator $\hat{\alpha}$ a darà un dj'autovalor a_i-
- Ël valor medi dla misura a l'é na media peisà su ij $c_i^* c_i$ dj'autovalor a_i -
- Ògni $|c_i|^2$ a dà la peobabilità ëd trové, ant na misura, ël corispondent autovalor a_i.
- $|c_i|^2$ a l'é la probabilità ëd trové ël sistéma ant lë stat Φ_i .

I soma partì conossend la fonsion d'onda Ψ dël sistema e j'autofonsion Φ_i dl'operator $\hat{\alpha}$ .A sya mira ij valor c_i a venta che a sio trovà. I l'oma :

$$c_i = \langle \Phi_i | \Psi \rangle \quad \text{an efét a l'é}$$

$$\langle \Phi_j | \Psi \rangle = \left\langle \Phi_j \middle| \sum_i c_i \Phi_i \right\rangle = \sum_i c_i \langle \Phi_j | \Phi_i \rangle = \sum_i c_i \delta_{ji} = c_i$$

Sòn a dis che la fonsion d'onda Ψ a peul esse "spantià" an sle autofonsion Φ_i , che a son ij sò vetor component, che a son dit "***stat pur***".

Prinsipi ëd dzorposission

Lòn ch'i l'oma dit sì dzoa a giustifica col che a ven ciamà el ***prinsipi ëd dzorposission*** che a dis che ***se un sistema quantistich a peul trovésse ant jë stat fisich dëscrivù da le fonsion d'onda*** Ψ_1 ***e*** Ψ_2 ***, antlora a peul ëdcò trovésse an tuti jë stat fisich dëscrivà da le combinassion linear*** $\lambda_1 \Psi_1 + \lambda_2 \Psi_2$ ***andova*** λ_1 ***e*** λ_2 ***a son costant complésse***.

La fonsion d'onda Ψ , ch0i l'0ma vist prima, a peul esse considerà coma na dzorposission dë stat possìbij për ël sistema quantìstich.

Operator che a còmuto

Se doi operator $\breve{\alpha}$ e $\breve{\beta}$ a còmuto, antlora as peultrové un sistema complét ëd fonsion che a sio autofonsion ëd tuti doi j'operator

Al contrari, se se un sistema complét ëd fonsion a l'é un sistema complét d'autofonsio tant dl'operator $\breve{\alpha}$ coma dl'operator $\breve{\beta}$, antlora j'operator $\breve{\alpha}$ e $\breve{\beta}$ a còmuto.

Prinsipi ëd corispondensa ëd Bohr

Sto prinsipi a dis che cand la costant ëd Planck $\boldsymbol{h}$ a dventa motobin pì cita rispét al valor dle grandësse an gieugh, sò efét a dventa trascuràbil. An pràtica, pasand dal livél nuclear e atò,ich a dimension sempe pì macroscòpich j'arzultà dla tratassion quantìstica a tendo a coincide con j'arzultà dla tratassiom clàssica.

I podoma 'dcò dì che un pachet d'onda bin definì as bogia second le lèj dla mecànica clàssica, relative a la partìcola che a arpresenta. An efét i lìoma:

Second ël teorema ëd Ehrenfest ël valor medi ò valor spetà dl'impuls ëd na partìcola a l'é:

$$\left\langle p\right\rangle = m\frac{d\left\langle x\right\rangle}{dt} \quad ; \quad \frac{d\left\langle p\right\rangle}{dt} = -\left\langle\frac{dV}{dx}\right\rangle = \left\langle F\right\rangle$$

che a son na generalisassion ant l'anviron quantìstich dle espression clàssiche.