



Insegnare e apprendere la Matematica

Brunetto PIOCHI.

Dipartimento di Matematica dell'Università di Firenze

Introduzione

Fra gli argomenti della battaglia svolta agli inizi del XX secolo in Italia dai neoidealisti (fra cui Benedetto Croce e Giovanni Gentile) contro un movimento di filosofi e scienziati (fra gli altri il matematico F. Enriques) i quali cercavano di valorizzare la presenza della scienza nella filosofia e nella cultura italiana, si possono rintracciare alcuni stereotipi sulla Matematica (sulla scienza in generale) che tuttora sopravvivono più o meno inconsapevolmente nell'insegnamento e nell'apprendimento di questa materia e più in generale nella sua collocazione all'interno dei saperi. Ad esempio i neoidealisti sostenevano che:

- la scienza ha solo valore pratico per le applicazioni
- la matematica è sì una conoscenza perfetta, ma è una disciplina arida e morta
- gli scienziati si debbono occupare solo del proprio campo
- per insegnare basta conoscere i contenuti della propria disciplina.

Tali principi vengono applicati ancora oggi. La scienza è rispettata ma in quanto è "utile" (lo si percepisce anche dal tipo di interesse che suscitano i calcolatori). La matematica è ordinariamente presentata come un corpo di conoscenze stabilite una volta per tutte, da apprendere così com'è: la matematica viene percepita come pura forma e astrazione e le sue applicazioni come rigide risposte (di cui spesso non si comprende la motivazione) a situazioni standard.

L'idea della matematica come "scienza morta" è del resto molto diffusa nella cultura (e purtroppo anche in buona parte della didattica) attuale. Essa è però inevitabilmente destinata a produrre negli studenti convinzioni distorte sulla materia e di conseguenza, secondo quanto ormai abbondantemente dimostrato da più autori, distorsioni nell'apprendimento stesso.

Convinzioni e misconcetti

Citerò qui solamente alcuni esempi, riferiti ai diversi ordini di scuola, tratti dalla letteratura sulla ricerca in didattica della matematica.

- Alunni di scuola elementare sono stati invitati a scegliere fra le seguenti definizioni di "problema di matematica":
 - A) un testo in cui ci sono dei numeri e una domanda
 - B) una situazione da risolvere con l'aiuto della matematica

- C) un esercizio in cui bisogna decidere le operazioni da fare e poi farle
- D) un esercizio che si fa nell'ora di matematica" (Zan, 1991-92).

Essi hanno mostrato un forte grado di confusione sull'argomento. In particolare gli alunni "deboli" in matematica hanno distribuito la propria scelta con notevole equità fra le varie ipotesi (con una lieve prevalenza per la C e la D, a ciascuna delle quali è andato il 28,5% delle scelte). Fra gli alunni "forti" in matematica, il 76% hanno optato per la risposta B.

Il divario fra "deboli" e "forti" sotto l'aspetto delle convinzioni relative ai problemi è confermato da altre due domande della stessa ricerca. Fra i "forti" solo il 20% concorda con il fatto che "un problema con tante domande è più difficile che un problema con una domanda sola", mentre i "deboli" si dividono in due schieramenti quasi equivalenti fra il pro e il contro (leggera prevalenza comunque per coloro che sono d'accordo). Peggiora ancora il quadro se si chiede se è vero che "un problema con un testo corto è più facile di uno con un testo lungo": solo il 10% dei "forti", ma addirittura il 62% dei "deboli" concorda con questa affermazione.

- Studenti di scuola media inferiore (classe 2^a), invitati a "far finta di essere un maestro (o maestra) delle elementari [che vuole] spiegare ai suoi allievi di terza che l'area del rettangolo si trova *facendo* base per altezza" rispondono in diversi modi, da cui però emerge chiara una "immagine della matematica ... quella di una disciplina fatta non di idee significative, ma di un epidermico modo di fare" (D'Amore e Sandri, 1996). A titolo di esempio, riporto alcuni tentativi di spiegazione o (forse addirittura) di "dimostrazione":

- *Il rettangolo è formato da due triangoli rettangoli. Si chiamano così perché hanno un angolo di 90°. Dividiamo il rettangolo con una diagonale in due parti uguali. Siccome la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°, per trovare l'area del rettangolo si fa base per altezza.*

- *Prima di tutto per iniziare questa figura geometrica si chiama così perché ha tutti gli angoli di 90°, cioè retti. I suoi lati sono 2 a 2 uguali AB e CD e AD e BC. Quindi per trovare l'area si fa base x altezza.*

- *L'area del rettangolo si trova facendo base per altezza cioè*

[l'alunno disegna un rettangolo indicandone correttamente i vertici, con le lettere A,B,C,D]

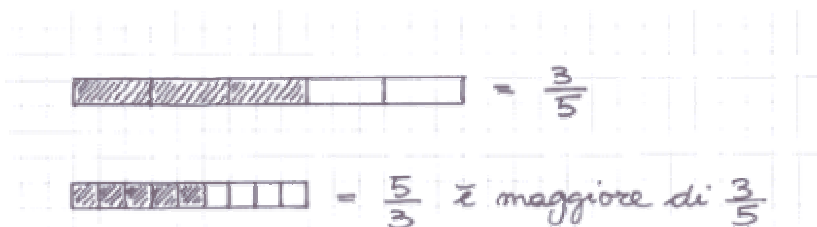
Prima disegno il rettangolo poi scrivo le lettere e l'ipotesi e dopo inizio a spiegare la regola cioè l'area di un rettangolo si trova facendo base per altezza, cioè AB per AD.

- Agli studenti del 1° anno di un Istituto tecnico professionale per il commercio in una cittadina della Lombardia (Piochi et al. 1998), all'inizio dell'anno nella lezione immediatamente successiva allo svolgimento del test di ingresso, l'insegnante è arrivata in classe con un pacco di volantini del supermercato e li ha distribuiti agli alunni divisi in gruppi, chiedendo di trovare gli enti matematici presenti in essi e farne una relazione. C'è stata un'impossibilità (letteralmente!) da parte degli allievi di realizzare un'attività di questo tipo. Una delle relazioni riconosceva tale

impossibilità, rilevando che gli studenti non sono assolutamente abituati se non ad un insegnante che spiega e dà esercizi per casa: la nuova proposta aveva creato sconcerto: "Io ero abituata a vedere la mia professoressa di matematica che spiegava, e noi a casa dovevamo studiare, ma a fare i gruppi e a interpretare un volantino non ero abituata".

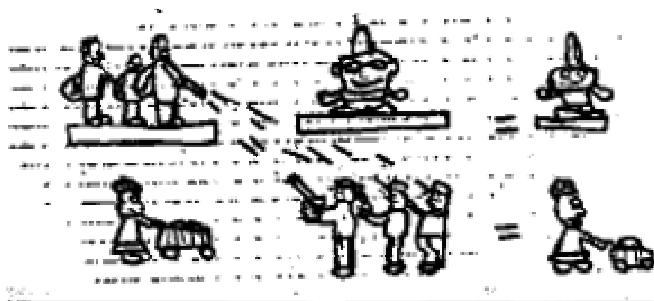
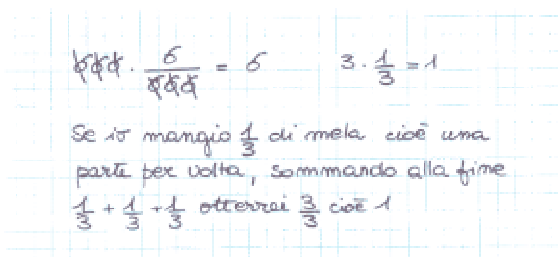
- Le immagini che seguono forniscono esempi di "rappresentazione grafica" prodotta da alunni di prima superiore con difficoltà di apprendimento (non dovute a disabilità) alle prese con quesiti relativi alle frazioni. Gli esempi sono tratti da (Longo, Di Carlo, Ambrosone, 1995) e si riferiscono ad una ricerca sui processi di rappresentazione formale.

- E' chiesto di confrontare $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{3}$ ad un allievo che esegue il compito in questo modo:



Il disegno, però non è significativo in quanto sono utilizzate due diverse unità. L'allievo sa che $\frac{3}{5} < \frac{5}{3}$, ma non si accorge dell'incongruenza della rappresentazione con la relazione esistente tra le due frazioni.

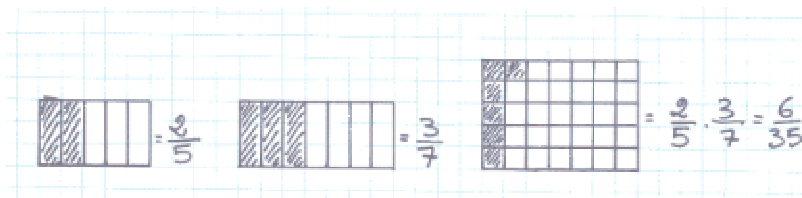
- Far capire con un disegno che $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$. Ecco due protocolli:



Da questi disegni si intende che la semplificazione resta una pura "cancellazione": non c'è nessun tentativo di risalire ad un significato. E' interessante notare che l'allievo che ha prodotto la rappresentazione più fantasiosa (chiaramente la seconda), è quello che ha raggiunto più facilmente buoni risultati con il recupero.

- Giuliano prende da un sacchetto di cioccolatini $\frac{2}{5}$ del contenuto e ne mangia

3/7. Quale frazione ha mangiato? Purtroppo i libri di testo sono ancora ricchi di esempi come questo, dove l'aspetto di ragionamento è praticamente nullo e prevale la forma del calcolo. Questo forse contribuisce a spiegare il comportamento di un alunno che esegue l'operazione $2/5 \cdot 3/7 = 6/35$ e solo successivamente tenta una rappresentazione in questo modo:



Anche in questo caso, i disegni non rappresentano la costruzione ragionata della "parte di una parte", quindi non servono per analizzare il problema e giustificare l'uso del prodotto, ma forniscono solo una simbolizzazione delle frazioni $2/5$, $3/7$, $6/35$ mediante figure geometriche.

- Studenti di Liceo Scientifico, in occasione dell'esame di Maturità (anno 1996) hanno espresso sulla Matematica opinioni del tipo che segue. Per l'origine di queste frasi si veda (Cattabriga e Di Paola, 1997); per un commento sul legame fra tali opinioni e l'apprendimento della matematica si può fare invece riferimento a (Piochi, 1998).

- *Per entrare nel linguaggio matematico è obbligatorio mettere da parte la creatività che non serve. La matematica... non lascia il minimo spazio alla fantasia e all'inventiva.*

- *La matematica non è creazione, è qualcosa che si basa su formule ben precise senza le quali non si può arrivare alla soluzione dei quesiti.*

- *La matematica ha un'importanza scientifica molto ridotta perché è soltanto calcolo numerico: non è importante per la formazione umana e può essere facilmente sostituita dal computer.*

Questi esempi non fanno che confermare "l'intreccio profondo fra fattori di diverso tipo: conoscenze, gestione delle conoscenze, convinzioni, emozioni, atteggiamenti [che viene messo in luce dai] tentativi di interpretare le difficoltà evidenziate in ambito scolastico da soggetti che non presentano deficit cognitivi" (Zan, 1995). E' infatti dimostrato come la capacità di utilizzare le proprie conoscenze sia fortemente influenzata da questi tre ordini di fattori:

- fattori metacognitivi, sia quelli che riguardano la conoscenza del proprio patrimonio cognitivo, sia i processi di auto-regolazione del lavoro
- le convinzioni, intese come "la conoscenza soggettiva che un individuo costruisce nel tentativo di interpretare il mondo che lo circonda" (Lester, 1987)
- fattori affettivi riguardanti sia le emozioni che il soggetto prova nei confronti dell'oggetto di studio, nel nostro caso della matematica (noia, paura, gioia...) sia gli atteggiamenti adottati nei confronti dell'apprendimento (motivazione, interesse, fiducia in se stessi, fatalismo,...).

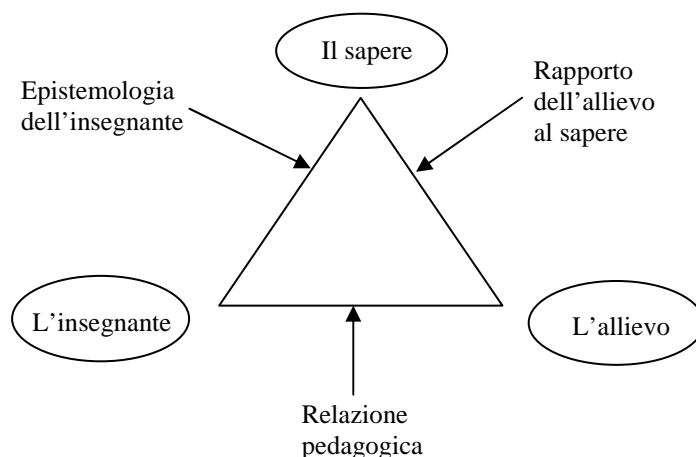
La "forma di fare" della matematica e il suo insegnamento

Alla ricerca di un modo efficace di proporre un apprendimento della materia, occorre sostituire a una "continuità didattica" basata sull'approccio alla matematica come scienza esaustiva, completa, trasmessa già univocamente e definitivamente strutturata, una continuità che trovi i suoi punti fermi in un approccio più significativo, costruttivo e coinvolgente.

Come fondamento del nostro modo di procedere, vogliamo porre una affermazione dei Programmi di Matematica della Spagna (relativi al livello del "Bachillerato"), secondo cui "partecipare alla conoscenza matematica consiste, più che nel possesso dei risultati finali di questa scienza, nel dominio della sua forma di fare" ("forma de hacer"; il corsivo è nostro). L'acquisizione della conoscenza matematica, l'apprendimento di questa "forma di fare" per potersi avvalere delle potenzialità della matematica, è un processo lento, laborioso, che deve avviarsi proprio nella scuola di base e il cui inizio non può che essere una prolungata attività su elementi concreti, esaminati, discussi, rappresentati in forme adeguate al livello di maturazione e conoscenza di ciascuno.

Citando un documento dell'Unione Matematica Italiana, "il bambino, e tanto più il giovane, non è una tabula rasa che acquisisce i concetti matematici per pura astrazione. Le ricerche più recenti hanno provato che sono le esperienze ad attivare gli opportuni circuiti cerebrali di cui l'essere umano già dispone. Non si tratta di imporre una matematica dall'esterno, ma di fare evolvere dall'interno la matematica che vive nel nostro corpo. Quindi le intuizioni, le metafore concettuali ecc. non sono un primo vago approccio ai concetti matematici, qualcosa di 'sporco' e scorretto da fare sparire al più presto, ma ne costituiscono un ingrediente fondamentale, che rimane anche a livelli estremi di rigore. Conseguentemente, la matematica deve essere insegnata come un'impresa umana (nel senso ampio di questo termine), non come qualcosa che va contro il nostro essere. Ciò ha conseguenze importanti sia rispetto a molte teorie didattiche sia rispetto al ruolo che i misconcetti e gli errori possono giocare nell'apprendimento" (UMI-CIIM, 2003).

Può essere utile richiamare qui alcuni concetti dovuti alla scuola francese di didattica della matematica (Chevallard, Ernest, Brousseau...). Una esposizione sintetica ma assai chiara degli argomenti qui riportati si può trovare in (Jacquet, 1993). Anzitutto bisogna rimarcare come il processo dell'insegnare si muova attraverso una relazione complessa che coinvolge non solo l'insegnante e l'allunno ma riguarda anche il sapere da trasmettere. Si tratta di considerare un triangolo in cui il lato allievo-sapere (l'apprendimento) si costruisce non solo attraverso la relazione (pedagogica) insegnante-allievo, ma anche attraverso la relazione (epistemologica) insegnante-sapere.



Questo ordine di considerazioni può apparire abbastanza originale per la matematica: di solito si suppone che ciò che si insegna sia "standard", mentre le difficoltà riguardano il come lo si insegna. Tuttavia non è così: ad esempio, l'insegnante laureato in Matematica ha sulla matematica idee diverse dall'insegnante laureato in Ingegneria in Economia. La materia che insegna è la stessa, ma le idee di fondo sono diverse: varia cioè l'asse epistemologico dell'insegnante. Per affrontare un qualsiasi argomento, occorre convincersi che il problema non riguarda (o almeno non riguarda solo) i "trucchi" più o meno efficaci che l'insegnante può usare per presentarlo, ma anche i contenuti dell'argomento stesso, la sua collocazione all'interno della materia, le difficoltà intrinseche ad esso. Contemporaneamente va considerato quale visione l'insegnante ha dell'argomento (cosa è importante, perché, a cosa serve...) e come si può aiutare lo studente a costruirsi una propria.

D'altro canto la matematica è (come appare ovvio... almeno a chi ci lavora) una scienza viva che però, paradossalmente, tende a produrre, quando raggiunge il livello dell'insegnamento-apprendimento formale, delle teorie morte. "Le teorie [matematiche] nascono e crescono su cantieri di problemi, ed i concetti si formano intorno alle questioni che essi devono risolvere, ai ragionamenti nei quali essi intervengono. [...] Talvolta servono secoli di aggiustamenti prima che [la teoria] trovi il suo fondamento e la sua forma assiomatica deduttiva, quella che si vede nei trattati. A questo stadio la teoria ha spesso perduto ogni traccia della sua origine problematica, delle questioni che l'hanno motivata. Per di più i concetti sono introdotti nel punto loro assegnato dalla deduzione, e che è spesso lontano da quello nel quale si potrebbe riconoscere meglio la loro importanza. La teoria è, così, trasformata, per obbedire alle esigenze del pensiero razionale, in un monumento molto bello ma statico" (CREM 1999, pag. 15).

L'insegnante inoltre, in qualsiasi disciplina, viene a sua volta chiamato a trasmettere una versione di quello che si chiama "sapere sapiente" (quello elaborato,

scoperto, sistemato nel mondo universitario e della ricerca), ma filtrato e rielaborato attraverso manuali e libri di testo. L'allievo arriva solo alla fine di questa catena, invitato ad apprendere una "miscela" di quello che dice l'insegnante e di quello che contiene il libro. È però l'insegnante a scegliere gli obiettivi di insegnamento, le attività da proporre, la gestione della classe e a scegliere, all'interno dei programmi ministeriali, l'ordine di importanza degli argomenti proposti, i tipi di esercizi da fare, i modi di presentazione, i materiali, se far lavorare in gruppo, quando fare discussioni, ecc... Tutto questo fa parte del "contratto didattico": si tratta di un accordo, di solito implicito ma chiarissimo e molto forte, che stabilisce le mutue aspettative dell'insegnante e dell'alunno: "quello che l'allievo si aspetta che l'insegnante si aspetti" (Per fare un esempio molto banale l'insegnante che ha *sempre sistematicamente* valutato in base alle abilità di calcolo non può di punto in bianco mettersi invece a valutare l'abilità logica trascurando la correttezza del calcolo!). Queste scelte, e quindi in definitiva l'intero contratto didattico, sono determinate dai diversi assi del triangolo di cui parlavamo sopra ed è pertanto anche di essi che occorrerà tenere conto esaminando il modo migliore per attuare una proposta di apprendimento matematico ai diversi livelli.

La matematica come strumento di formazione culturale

"L'educazione matematica deve contribuire, insieme con tutte le altre discipline, alla formazione culturale del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica. Le competenze del cittadino, al cui raggiungimento concorre l'educazione matematica, sono per esempio: esprimere adeguatamente informazioni, intuire e immaginare, risolvere e porsi problemi, progettare e costruire modelli di situazioni reali, operare scelte in condizioni d'incertezza. La conoscenza dei linguaggi scientifici, e tra essi in primo luogo di quello matematico, si rivela sempre più essenziale per l'acquisizione di una corretta capacità di giudizio. In particolare, l'insegnamento della matematica deve avviare gradualmente, a partire da campi di esperienza ricchi per l'allievo, all'uso del linguaggio e del ragionamento matematico, come strumenti per l'interpretazione del reale e non deve costituire unicamente un bagaglio astratto di nozioni." (UMI-CIIM, 2003).

Se dunque lo scopo dell'educazione matematica è contribuire alla formazione culturale della persona, allora la matematica è vista come un aspetto della conoscenza e dunque l'insegnamento della matematica non è da considerarsi a sé stante, ma all'interno di un processo globale di crescita. Inoltre tema centrale della matematica è la realtà, con i suoi fatti e fenomeni, e scopo del lavoro matematico è interpretarla criticamente ed intervenire consapevolmente su di essa: è innegabile che si parli di un compito essenziale ai fini dell'inserimento come cittadini attivi in una società democratica complessa, nonché dello sviluppo e della realizzazione di una cultura personale. Le capacità matematiche da considerare essenziali a questo compito non possono essere apprese come fini a loro stesse, ma come sviluppo di concetti, metodi ed atteggiamenti: a questi ultimi dunque dovremo soprattutto dedicare spazio ed energie.

Tuttavia questo aspetto, che credo sia abbastanza chiaro all'insegnante elementare, rischia forse di essere trascurato a livelli scolastici superiori. Ad esempio da qui discende come la conoscenza di tecniche di calcolo (le tecniche delle operazioni, certi formalismi di calcolo letterale o di formule trigonometriche...) abbia meno peso rispetto all'abilità di modellizzare una situazione o simili. Le tecniche interessano in quanto strumento utile per i collegamenti, le connessioni, l'abilità mentale, ecc., all'interno di una visione dell'apprendimento che comprende l'esercizio ma soprattutto richiede la comprensione di concetti operativi non banali (le operazioni, la notazione posizionale, l'uso del calcolo letterale o le relazioni fra enti) e aiuta chi apprende ad integrare questi due aspetti.

Se dunque l'insegnamento della matematica va ben al di là della proposta delle pure tecniche da apprendere ed ha una profonda valenza culturale e sociale, ne segue che il modo di insegnare Matematica viene ad essere determinato non solo dalla struttura interna delle conoscenze matematiche, ma anche dalla necessità di contribuire a obiettivi educativi generali, vincolati allo sviluppo di capacità cognitive.

"La formazione del curricolo scolastico non può prescindere dal considerare sia la funzione strumentale, sia quella culturale della matematica: strumento essenziale per una comprensione quantitativa della realtà da un lato, e dall'altro un sapere logicamente coerente e sistematico, caratterizzato da una forte unità culturale. Entrambi gli aspetti sono essenziali per una formazione equilibrata degli studenti: priva del suo carattere strumentale, la matematica sarebbe un puro gioco di segni senza significato; senza una visione globale, essa diventerebbe una serie di ricette prive di metodo e di giustificazione. I due aspetti si intrecciano ed è necessario che l'insegnante li introduca entrambi in modo equilibrato lungo tutto il percorso di formazione. Dentro a competenze strumentali come eseguire calcoli, risolvere equazioni, leggere dati, misurare una grandezza, calcolare una probabilità, è, infatti, sempre presente un aspetto culturale, che collega tali competenze alla storia della nostra civiltà e alla complessa realtà in cui viviamo. D'altra parte, l'aspetto culturale, che fa riferimento a una serie di conoscenze teoriche, storiche ed epistemologiche, quali la padronanza delle idee fondamentali di una teoria, la capacità di situarle in un processo evolutivo, di riflettere sui principi e sui metodi impiegati, non ha senso senza i riferimenti ai calcoli, al gioco delle ipotesi, ai tentativi ed errori per validarle, alle diverse dimostrazioni che evidenziano i diversi significati di un enunciato matematico: essi costituiscono il terreno concreto e vivo da cui le conoscenze teoriche della matematica traggono alimento. Entrambi i tipi di competenze costituiscono, perciò, obiettivi di lungo termine, cui occorre dare compimento nel corso del ciclo secondario. La loro costruzione completa così un percorso iniziato già nella scuola primaria e nella scuola secondaria di primo grado, realizzando una didattica di tipo elicoidale, che riprende gli argomenti approfondendoli di volta in volta." (UMI-CIIM, 2003).

A conferma delle assonanze segnalate fra questa visione e quella dei Programmi spagnoli, riportiamo la seguente affermazione che appare nella parte di questi dedicata alla scuola secondaria obbligatoria: "Sicuramente la matematica deve contribuire a obiettivi educativi generali, vincolati allo sviluppo di capacità cognitive. Senza dubbio e unitamente a ciò occorre sottolineare anche il valore funzionale che

possiede, come insieme di procedimenti per risolvere i problemi in campi molto diversi, per porre in rilievo aspetti e relazioni della realtà non direttamente osservabili e per permettere di anticipare e prevedere fatti, situazioni o risultati. Entrambi gli aspetti, il funzionale ed il formativo, sono inscindibili e complementari.”

Nozioni comuni e concetti matematici

E' d'altra parte vero che c'è molta distanza fra le nozioni matematiche comuni e i concetti matematici sottostanti. Solo per citare due esempi, si pensi alla differenza che corre fra i numeri "ingenui", cioè i decimali (anche molto lunghi, fra cui i "numeri-macchina" trattati dagli elaboratori) e i "numeri reali" con tutto il loro apparato di assiomi definitivi; oppure a quella fra le formule per il calcolo dell'area delle superfici piane (più o meno elementari) e la teoria della misura o quella del calcolo integrale. Ora, dato che "la matematica non si può fare che per tappe", l'esistenza di una tale distanza richiede che chi insegna si ponga il problema del cammino necessario a compiere tali tappe. Un possibile approccio sarà partire da quelli che Freudenthal ha proposto di chiamare "oggetti mentali", distinguendoli dai "concetti". Se questi ultimi sono gli "oggetti tecnicamente definiti in una teoria assiomatica", gli oggetti mentali sono invece delle "nozioni di tipo matematico, che appartengono al pensiero comune e che sono intermedie fra questo e la matematica costituita. Sono oggetti mentali ad es. i numeri ingenui citati precedentemente, completati dagli stessi numeri dotati di segno, le frazioni (non i numeri razionali), le aree dei poligoni espresse in numeri ingenui, l'area πr^2 del cerchio dove $\pi=3,14$ e r è un numero ingenuo [...] Gli oggetti mentali sono gli strumenti del pensiero matematico in via di formazione. Essi servono a comprendere e organizzare la massa dei fenomeni che nascono dai problemi che ci poniamo nei contesti familiari.

"Non si può cominciare l'insegnamento dai concetti. Questi costituiscono un obiettivo (almeno per certi allievi) e gli oggetti mentali sono un cammino per arrivarci. Più frequentemente gli allievi ai quali si tenta d'insegnare i concetti senza passare attraverso gli oggetti mentali non capiscono ciò che vogliamo far loro comprendere. Essi arrivano alla fine dei loro studi con un bagaglio scarsissimo e la sensazione che la matematica sia una scienza arbitraria." Se è vero quanto sostiene Freudenthal, cioè che gli oggetti mentali "possono essere molto efficaci anche se non seguiti dalla costruzione di concetti", ne deriva immediatamente che "quelli che hanno lavorato seriamente a partire dagli oggetti mentali, lasciano la scuola con un bagaglio interessante e utile: [...] essi hanno osservato e compreso molti fenomeni e incontrato questioni che richiamano sviluppi matematici approfonditi; essi hanno accumulato fonti di intuizione per il seguito dei loro studi" (le citazioni fra virgolette di questa parte sono tratte da CREM, 1999, par. 2.3.1).

Sono due le principali forme in cui può essere trascurata la necessaria tappa dell'elaborazione degli oggetti mentali; entrambe molto insidiose, ma ben presenti nella didattica scolastica. Da un lato si può scegliere di trascurare gli oggetti mentali, come mal costruiti e poco significativi matematicamente, e puntare subito sui concetti matematici. E' la scelta della "matematica moderna" degli anni '70, ma anche di alcuni pretenziosi capitoli di libri di testo per la scuola secondaria (superiore in genere, ma

anche inferiore) dedicati all'Algebra e alla Logica formale. Dall'altro lato, pur consapevoli della difficoltà di presentazione rigorosa di concetti troppo astratti, si può non riuscire a resistere all'introdurre almeno le principali applicazioni, insegnando così "concetti importanti, dalla forte connotazione tecnica, in contesti poveri, in modo che gli allievi non possano cogliere le ragioni di questo tecnicismo". A titolo di esempio, ricordiamo come la classica "regola dei segni" del prodotto di numeri relativi si riduca assai facilmente a calcolo mnemonico di pura routine, dato che gli allievi non sono in grado al momento in cui essa viene introdotta di vederne né la necessità, né le potenzialità. Lo stesso avviene per la definizione di limite con i relativi calcoli, la quale solitamente precede (accompagnata da una buona quantità di esercizi) almeno di un mese o due l'introduzione del concetto di derivata o di retta asintotica, i quali mostrano invece le potenzialità e l'uso significativo del concetto di limite.

L'aspetto metacognitivo e l'apprendimento per problemi

Occorre dunque riuscire a realizzare una proposta, che soprattutto proponga un *metodo*, mettendo in primo piano la componente metacognitiva dell'apprendimento, accanto a quella cognitiva e che coinvolga l'allievo in una serie di scoperte e riflessioni collegate ai concetti e alle competenze proposte. Gli allievi devono essere incoraggiati, stimolati, invitati ad una continua verbalizzazione di idee, intuizioni e proposte: bisogna rimuovere la convinzione (erronea !) che fare matematica consista nel trovare l'*unica* soluzione corretta e che questa vada trovata, fuggendo (o comunque nascondendo col bianchetto) gli errori, mediante l'applicazione di procedimenti standard e formule di cui l'insegnante è depositario e padrone.

La classe deve vivere dunque a tutti gli effetti il clima di un "laboratorio" dove è lecito, anzi è apprezzato esporre a tutti le proprie idee, giuste o sbagliate che si rivelino, in una situazione di rispetto, condivisione e ascolto; lavorando così, non passa molto tempo prima che davvero si scopra come la frase o la proposta apparentemente stravagante di qualcuno (non di rado uno dei non-considerati, proprio perché dotato di una capacità di pensiero divergente) può essere davvero la chiave per far compiere a tutti un passo avanti. È chiaro come questo sia, fra l'altro, un modo ideale di superare nella pratica quotidiana il dilemma integrazione-differenza: piuttosto che guardare alle debolezze concentriamoci sulle forze e sfruttiamo il fatto che esse sono diverse in alunni diversi.

Una possibile via privilegiata per operare in questa direzione si può trovare nel cosiddetto "insegnamento per problemi", fondando le nozioni matematiche a partire da situazioni condivise, esaminate, discusse... alla ricerca del miglior modo di modellarle, rappresentarle, trarne indicazioni e informazioni. Ogni essere umano si pone continuamente dei problemi e cerca di risolverli: compito dell'insegnante sarà mettere questa capacità al servizio della crescita delle abilità matematiche. Davanti ad un problema (avvertito anche *soggettivamente* come tale) una persona reagisce facendo ricorso a tutte le proprie doti ed abilità per superare le difficoltà poste dal problema; si mobilitano dunque maggiori capacità, stimolando l'attenzione, l'uso delle competenze precedentemente acquisite, la richiesta di collaborazione in una situazione anche emotivamente coinvolgente, una ricerca personale dove trova spazio

anche l'intuizione. Assume inoltre il suo pieno significato l'apprendimento per prove ed errori, rivalutando questi ultimi in funzione di una collaborazione: si scopre l'idea che lo sbaglio di uno è lo stimolo di un altro a trovare la strada. Lavorando con i ragazzi su applicazioni che motivano si assiste ad un processo assai interessante, che si ripete costantemente: l'alunno prova, suggerisce, tenta, riprova ragionando su cosa succede, finché non trova una soluzione, costruisce uno schema riproducibile.

Polya (teorico di Didattica della matematica) sostiene che il pensiero umano è caratterizzato dalla capacità di risolvere i problemi. Che cosa vuol dire risolvere un problema? Vuol dire porre domande e cercare risposte. Da questo punto di vista è indifferente che si parli di attività manipolative o corporee alla scuola materna o elementare, o di attività concrete che possono riguardare un modello in scala di qualcosa, una ricerca statistica nel quartiere, la validazione di una congettura su un insieme geometrico o su una classe di figure.

Dal punto di vista psicologico "un problema nasce quando un essere vivente, motivato a raggiungere una meta, non può farlo in forma automatica o meccanica, cioè mediante un'attività istintiva o attraverso un comportamento appreso. L'esistenza di una motivazione e la presenza, nella situazione problematica, di un impedimento che non permette l'azione diretta creano uno stato di squilibrio e di tensione nel campo cognitivo di un individuo spingendolo ad agire per ricostruire l'equilibrio" (G. Kanisza).

Questo è l'ideale di problema: il soggetto ha una motivazione e su questa base attiva una serie di capacità che sono nuove, fa delle scoperte. Un'insegnante di una 3^a media di ragazzi molto difficili ha proposto loro la costruzione di un ipertesto (Borromeo, 1997). I ragazzi hanno effettivamente realizzato un ipertesto, che ha poi vinto un premio; ma soprattutto gli alunni di questa 3^a media ormai "condannati" alla situazione di drop-out hanno recuperato una spinta all'apprendimento utilissima per il proseguimento degli studi. L'insegnante aveva creato la motivazione: ha proposto una sfida, ha spiegato che era una cosa seria e impegnativa, ha messo a disposizione il suo tempo, ha proposto loro una cooperazione nell'apprendere a realizzare un ipertesto ed ha finalizzato il lavoro ad un obiettivo, il concorso. Nei ragazzi è nata una motivazione, è nato il problema e il problema ha costruito nuove conoscenze e soprattutto ha scardinato certi atteggiamenti precedenti.

Se riflettiamo su questo esempio alla luce della frase di Kanisza, viene spontaneo chiedersi che motivazione può esserci nello scoprire quanto ha speso (scuola primaria) un'ipotetica mamma che compra 8 uova a 0.35€ l'uno o quanto ha guadagnato (scuola secondaria di I grado) un oste che "spilla il vino dalla botte in modo tale che..." o (forse peggio ancora... scuola secondaria di II grado) quale sia "il numero tale che i suoi $\frac{3}{5}$ sommati ai suoi $\frac{8}{15}$ danno lo stesso risultato che si otterrebbe raddoppiandolo e togliendone $\frac{13}{3}$ " ! L'unica reale motivazione può consistere nel dare la risposta per far contenti l'insegnante o i genitori, prendendo un buon voto, ma non è una motivazione dell'ordine del sapere o di un interesse personale.

Tuttavia il termine "problema" nella prassi didattica ha assunto una connotazione "ambigua". Solitamente infatti i testi scolastici designano con questo nome una serie di esercizi (standard, spesso molto simili fra loro, costruiti in serie). Così, per superare

l'ambiguità, si usa distinguere fra "situazioni problematiche" (i problemi nel senso di Kanitza) ed "esercizi" (quelli normalmente proposti dai libri di testo)¹. Ma questa distinzione si presta a due fraintendimenti:

- da un lato le "situazioni problematiche" vengono identificate in blocco con situazioni concrete e attività complesse; da qui una serie di critiche che enfatizzano la difficoltà di tale approccio: troppo difficile sembra riuscire a proporre situazioni problematiche realmente significative anche soltanto su tutti i principali nodi concettuali.
- dall'altro sembra che vengano sviliti (se non addirittura sconsigliati) gli "esercizi"; non apportando comprensione di concetti, ma solo fatica e spesso noia, essi sembrano perdere importanza.

Entrambe queste opinioni tuttavia non sono assolutamente fondate. Indubbiamente lavorare su problemi veri da organizzare a partire da situazioni concrete (eventualmente date in forma ludica, ma anche collegati alla realtà²) da analizzare, modellizzare, strutturare, risolvere, è il metodo principe per guidare all'apprendimento, ma non crediamo che sia l'unico: quello che infatti è essenziale è soprattutto riuscire a realizzare un diverso metodo di proposta. Si tratta di puntare su un approccio che metta in primo piano la componente metacognitiva dell'apprendimento, accanto a quella cognitiva, coinvolgendo l'allievo in una serie di scoperte e riflessioni collegate ai concetti e alle competenze che desideriamo offrirgli, proponendogli al contempo occasioni significative per provare a pensare autonomamente.

Analogamente, affinché il concetto scoperto con il lavoro appena svolto, gli esercizi di consolidamento e rinforzo sono fondamentali. Va quindi trovato un meccanismo per cui in certi momenti si attiva la motivazione per la ricerca e successivamente, una volta scoperto che esistono strumenti per raggiungere lo scopo, ci si dedica allo studio e all'esercizio sistematico di essi.

Pertanto anche i quesiti matematici in forma verbale (i cosiddetti *word-problems*) possono acquistare grande rilevanza, purché l'insegnante sappia utilizzarli nell'ottica opportuna. Ricordiamo anche che molte ricerche hanno messo in luce l'importanza di una "esposizione di tutti gli allievi a prestazioni significative avanzate" (Boero, 1990; dallo stesso articolo saranno riprese le citazioni fra virgolette del presente paragrafo) proprio ai fini di un recupero degli alunni della fascia debole, accanto a strategie quali:

- verbalizzazione delle strategie risolutive dei problemi,
- "utilizzo sistematico di campi di esperienza non solo per costruire (o ricostruire) i concetti di base, ma anche per abituare gli allievi a fare ipotesi, ad argomentare, ecc.",
- spazio al confronto fra le diverse strategie seguite dagli alunni nella risoluzione dei problemi,

¹ Per una discussione esauriente e puntuale della differenza fra queste due categorie, si invita a consultare il capitolo 9 del volume "Elementi di Didattica della Matematica", di B. D'Amore, Pitagora Ed., 2000

² classici da questo punto di vista alcuni problemi di minimo o massimo: trovare la forma ideale di una lattina che, a parità di volume, utilizzi la minima quantità di metallo o il percorso di minor costo per il tracciato di un oleodotto... Si veda (Piochi, 1993) per una trattazione elementare di tali problemi che prescinda dall'uso delle derivate ma coinvolge invece il concetto di grafico di una funzione.

- attenzione continua alla comprensione da parte dell'alunno di "ciò che l'insegnante pretende da lui e dei modi più adatti (di volta in volta diversi !) per far fronte a tali richieste".

E' proprio nella discussione libera che gli alunni (in particolare i più deboli) possono prendere contatto con, ed imparare ad usare, termini e argomentazioni altrimenti astratti e distanti. "Il bambino che in casa e nelle sue precedenti esperienze scolastiche non è stato abituato a discutere deve trovare delle occasioni autentiche di dibattito per essere poi a sua volta in grado, su argomenti alla sua portata, di dire la sua avendo gradualmente imparato il meccanismo (tutt'altro che scontato) della discussione".

Non basta tuttavia possedere un vocabolario o un repertorio di espressioni linguistiche per poter argomentare, dialogare e sostenere un dibattito. Queste capacità dipendono da un fattore psicologico: la sicurezza in se stessi e la fiducia di essere ascoltati e di riuscire ad esprimersi. Inoltre è necessario esercitare questa abilità e soprattutto possedere degli argomenti da discutere. Questo dipende "dal bagaglio di conoscenze che man mano un giovane acquisisce nonché dallo sviluppo di una fondamentale capacità logica, quella di individuare connessioni fra argomenti e problemi che hanno dei punti di contatto non immediatamente evidenti" (Oliverio Ferraris, 1995).

Per poter esercitare in pieno i propri diritti di cittadinanza, come pure per poter costruire ed esercitare una propria cultura, è indispensabile acquisire tale competenza argomentativa. E sembra innegabilmente un compito primario della scuola offrire le occasioni perché tale acquisizione avvenga: non certo solo in matematica (pensiamo ad esempio alle Scienze) ma questo ambito offre una quantità di problemi atti a sperimentare e dibattere, problemi intuitivamente trattabili anche da un ragazzo di scuola elementare o media, ma spesso suscettibili di generalizzazioni e complicazioni di notevole livello. Vale inoltre la pena notare come proprio l'acquisizione di una tale competenza permetterà di sottoporre a vaglio critico non solo le affermazioni di vita quotidiana, ma anche (anzi soprattutto) le successive "piste" di apprendimento che l'individuo incontrerà nel proseguo della sua esistenza, sia tecnologiche o pratiche che teoriche.

Gli stessi insegnanti devono porsi come modelli di apprendimento metacognitivo, abituandosi a mettersi in gioco "senza rete", forti di un atteggiamento personale, di un metodo di lavoro, più che di conoscenze acquisite e memorizzate una volta per tutte. L'insegnante che voglia operare secondo queste linee non dovrà aver timore di dire 'ho sbagliato', 'non lo so neppure io', 'forse hai ragione tu' ma soprattutto dovrà imparare a dire 'cerchiamo insieme', ognuno dell'ambito del proprio ruolo e delle proprie conoscenze e competenze, ma in ottica di 'ricerca filologica' nel senso etimologico del termine, cioè di ricerca per il piacere di capire, scoprire, sapere, in un collegamento continuo con le altre discipline e con la stessa storia della matematica. "Il nesso profondo tra aspetti strumentali e culturali potrà in particolare essere colto dagli alunni attraverso opportune riflessioni storiche, introdotte gradualmente. Essendo per sua natura di carattere critico, la riflessione storica dovrà attendere che i concetti relativi si siano consolidati, in modo da non generare confusione e quindi

incertezza negli studenti. È, infatti, importante che non si operino delle forzature, o peggio si inventi una storia inesistente, per adattare le problematiche storiche alle conoscenze degli alunni: la narrazione storica potrà e dovrà essere semplificata, ma non falsata” (UMI-CIIM 2003)

A conclusione di queste riflessioni, riportiamo qui di seguito alcune pagine integralmente riprodotte dal documento (UMI-CIIM, 2003) a cui più volte abbiamo fatto riferimento. Si tratta delle pagine dedicate alla metodologia didattica e al Laboratorio di Matematica propriamente detto.

Indicazioni metodologiche (UMI-CIIM, 2003)

In continuità con i precedenti livelli scolari, anche nel ciclo secondario è opportuno sviluppare i concetti matematici in attività didattiche significative, in cui l'alunno possa essere attivamente coinvolto e stimolato ad affrontare e risolvere problemi. Un'attività didattica può essere considerata significativa se consente l'introduzione motivata di strumenti culturali della matematica per studiare fatti e fenomeni attraverso un approccio quantitativo, se contribuisce alla costruzione dei loro significati e se dà senso al lavoro riflessivo su di essi. Lo sviluppo in classe di attività didattiche con tali caratteristiche dovrà avere come fine la costruzione delle capacità di esercitare un controllo sulla realtà secondo i modelli della razionalità scientifica. Le attività didattiche potranno essere realizzate tramite vari approcci metodologici, che coinvolgano in varia misura studenti e insegnanti, ma che dovranno dare al processo di insegnamento-apprendimento prevalentemente una caratterizzazione di tipo collettivo, impostata sull'interazione tra gli studenti e tra insegnante e studenti.

La *lezione frontale* si presenta come la tecnica più sicura per gli insegnanti, i genitori, gli allievi, i capi d'istituto, in quanto garantisce che si "finisca il programma". Consiste nella spiegazione, da parte dell'insegnante, di - non sempre tutte le - varie parti del programma, alla cattedra o alla lavagna; è seguita da una serie di attività applicative (gli esercizi ripetitivi, in classe e a casa). Tale tipo di *lezione*, pur avendo una sua valenza didattica, nell'abituare gli studenti a prestare attenzione a una spiegazione, a imparare a prendere appunti in maniera autonoma, quando una persona parla, a sviluppare competenze di sintesi e di organizzazione dell'informazione, a comprendere un discorso fatto da un esperto su un argomento matematico, non è (e non deve essere) l'unica metodologia di insegnamento/apprendimento in classe. Essa andrebbe affiancata, integrata, alternata ad altre metodologie, che sviluppano altre competenze negli studenti.

Per esempio, *l'insegnamento per problemi* è assolutamente fondamentale come approccio alla costruzione del sapere, non solo nella matematica. Consiste nel porre problemi agli studenti, facendoli loro risolvere singolarmente, a gruppi, a casa o in classe, in tempi lunghi o brevi. Per problema non intendiamo solo la richiesta di ottenere un risultato a seguito di una serie di calcoli, ma la proposta di riconoscere una situazione problematica di ampia natura, formulata da altri: può trattarsi di un classico problema che ha caratterizzato la storia della matematica, o di un problema sorto da un contesto scolastico, oppure da un contesto extrascolastico, ambientale per esempio, o sportivo, o di vita quotidiana.

Risolvere problemi posti da altri è certamente una competenza ambiziosa e a lungo termine ed è anche per questo che dovrebbe essere perseguita fin dalla scuola dell'infanzia. In questo ambito metodologico altrettanto fondamentale è il *porsi problemi*, ovvero acquisire a poco a poco l'abitudine a porsi criticamente nei confronti della matematica, della scuola, del mondo, per diventare cittadino che utilizza la matematica da persona consapevole, che ne domina le tecniche e non si fa dominare, invece, da esse. Ed acquista di conseguenza una capacità critica che gli sarà utile ben oltre la lezione di matematica o l'ambiente scolastico. Per questo, l'insegnamento dei contenuti di tutti i nuclei deve poggiarsi sulla problematicità, quindi non perseguire solo il raggiungimento di abilità tecniche ma anche di ragionamento.

Gli studenti possono imparare a porsi e risolvere problemi sia in gruppo sia singolarmente. Pur perseguendo la stessa finalità, il lavoro di gruppo, rispetto a quello individuale, si prefigge anche altre finalità di tipo comportamentale, come il saper stare con gli altri, discutere in gruppo, rispettare l'opinione dell'altro e anche saper difendere la propria opinione, argomentando e dibattendo.

È fondamentale quindi, come metodologia di classe, il *lavoro in piccoli gruppi* (a seconda dei casi, possono essere di due, tre o quattro persone). La scelta dei raggruppamenti da parte dell'insegnante può essere di vario genere, e oscilla tra le due polarità: gruppi eterogenei o gruppi omogenei. Il criterio dell'equi-eterogeneità, cioè di avere in una classe tutti i gruppi ugualmente ripartiti per livello e competenze, consente di avere gruppi che si equivalgono, all'interno dei quali sono presenti forze eterogenee: per esempio uno studente di livello alto, uno di livello basso, ecc. Lo svantaggio può essere nel lavoro all'interno del gruppo, in cui può capitare che lo studente di livello più basso, o quello più timido, non partecipino alla discussione e rimangano in disparte. I gruppi omogenei hanno il vantaggio di avere, all'interno del gruppo, studenti con pari livello, e quindi consentire discussioni alla portata di tutti; ma, se il lavoro di gruppo è seguito da un momento di *intergruppo*, in cui si confrontano gli esiti dei vari gruppi, l'eterogeneità fra i risultati raggiunti potrebbe avere risvolti psicologici non positivi.

C'è di più: il lavoro di gruppo finalizzato al raggiungimento di un obiettivo comune sviluppa la capacità di mettere in gioco e coordinare le competenze di ognuno, di riconoscere una *leadership*, di dividersi i compiti e finalizzare il proprio operato all'obiettivo da raggiungere. Nel lavoro a gruppi si stabilisce uno spirito di interdipendenza positiva, in cui il successo di uno è strettamente collegato al successo di tutti. Agli studenti viene richiesta una responsabilità anche individuale nell'acquisizione delle competenze e delle conoscenze utili ad affrontare il compito proposto. Può essere utile distinguere, a grandi linee, almeno due differenti modalità: quella del *cooperative learning*, e quella del *collaborative learning*. Per *cooperative learning* si intende un gruppo di individui che lavora a un problema complesso, nel quale i compiti di ciascuno sono ben individuati e definiti, ma nel quale ogni individuo è aiutato dai suoi compagni di gruppo nell'affrontare i temi e problemi che sono oggetto e spunto di apprendimento. Per *collaborative learning* si intende un gruppo di individui che lavorano insieme su un compito o un problema che è stato posto al

gruppo e che si prevede debba essere affrontato e risolto insieme, attraverso lo strumento della discussione e della condivisione delle strategie risolutive.

I fattori che influenzano sia il *collaborative*, sia il *cooperative learning* possono essere: la volontà di chi apprende di partecipare al lavoro di gruppo; la presa di coscienza, da parte di chi apprende e dai tutor (siano essi compagni o docenti), dei benefici di forme di apprendimento collaborative o cooperative; un sistema di valutazione che favorisca cooperazione e collaborazione e coinvolga lo studente nella propria valutazione; la presa di coscienza del fatto che chi apprende può controllare e gestire il proprio apprendimento.

Accanto al lavoro di gruppo, come in altri momenti del lavoro scolastico, è importante dedicare opportuni spazi alla *discussione matematica*. In essa, l'insegnante ha un ruolo di guida nel senso che inserisce una particolare discussione nel flusso dell'attività della classe e influenza la discussione in modo determinante, inserendosi con interventi mirati nel suo sviluppo, in quanto ha presenti gli obiettivi generali e specifici dell'attività proposta. È anche possibile far intervenire nella discussione voci di persone che non fanno parte della classe, come per esempio voci dalla storia, attraverso la lettura di un testo storico, oppure voci dalla realtà esterna, attraverso un testo scritto, una audio-registrazione, una videoregistrazione o una tele-conferenza. La discussione si struttura quindi come una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.) all'interno del progetto didattico ed educativo.

Il lavoro di gruppo o individuale finalizzato alla risoluzione di un problema, o la spiegazione stessa dell'insegnante possono servirsi del *laboratorio* per avere strumenti o ambienti o metodi utili all'espletamento di un compito o all'introduzione di concetti nuovi, o alla costruzione sociale del sapere. A tale scopo, le indicazioni relative al laboratorio di matematica sono particolarmente significative non solo per l'interazione con gli strumenti, ma soprattutto per l'impianto metodologico. Tale impianto si dovrebbe basare su quello che viene chiamato *apprendistato cognitivo*. L'apprendistato cognitivo coinvolge abilità e processi sia cognitivi sia metacognitivi: l'esperto modella e struttura l'attività del principiante, che osserva l'esperto e confronta e valuta il suo operato rispetto alle proprie attività intellettuali. È un metodo variegato e flessibile che si contrappone all'*apprendistato pratico* che, invece, si identifica con uno specifico metodo di apprendimento basato esclusivamente sull'osservazione dell'attività dell'esperto, sulla strutturazione graduale e crescente delle abilità e, soprattutto, su una particolare attenzione all'acquisizione di abilità di carattere pratico. L'apprendistato diventa cognitivo in quanto riesce a bilanciare la dialettica tra l'azione strutturatrice e facilitatrice dell'intervento dell'esperto e la sfida che un problema da risolvere rappresenta per il principiante, che non si limita a riprodurre i comportamenti dell'esperto ma diviene consapevole dei motivi che portano l'esperto a scegliere certe strategie e non certe altre. La metafora che può ben descrivere l'apprendistato cognitivo è quella della bottega d'arte del Rinascimento, in cui l'allievo impara facendo, vedendo altri che fanno e riflettendo sul perché fanno così, il tutto sotto la guida di uno più esperto di lui. Un'altra analogia si può trovare con l'apprendimento dei linguaggi di programmazione nel laboratorio di

informatica. L'apprendistato cognitivo richiede la costruzione di un ambiente di apprendimento aperto alla discussione, alla condivisione del sapere, che favorisca la produzione personale, ma anche l'osservazione ragionata dell'esperto al lavoro; un ambiente che potremmo chiamare "bottega della matematica".

In generale, le attività didattiche dovranno essere caratterizzate dalla pratica della verbalizzazione, dalla produzione e dalla verifica di ipotesi argomentate e dal ruolo di mediazione dell'insegnante in tutte le fasi dell'attività. L'insegnante eserciterà il suo ruolo di mediazione sia in modo diretto, attraverso l'introduzione degli strumenti matematici necessari in relazione alle diverse situazioni didattiche, sia in modo indiretto, utilizzando le produzioni individuali degli alunni (da confrontare e discutere in classe) e attraverso la valorizzazione dei contributi degli alunni durante le discussioni in classe e il lavoro di gruppo.

La matematica infine si caratterizza come una disciplina che ha bisogno di tempi lunghi di apprendimento, sia per la necessità di affrontare ed assimilare le strette connessioni tra i diversi concetti, sia per la loro caratterizzazione epistemologica. È consigliabile quindi sviluppare attività nell'ambito di progetti didattici di medio-lungo periodo. I tempi mediolunghi costituiscono la condizione che può garantire a tutti gli studenti di compiere il consolidamento tecnico, l'approfondimento operativo e la riflessione necessari per giungere ad una piena padronanza delle competenze matematiche coinvolte nell'attività. L'insegnante cercherà di trovare un equilibrio tra le attività più costruttive e formative e quelle di consolidamento tecnico e operativo, tenendo conto delle necessità della classe in cui opera.

Laboratorio di Matematica (UMI-CIIM, 2003)

Il laboratorio di matematica [...] si presenta come una serie di indicazioni metodologiche trasversali, basate certamente sull'uso di strumenti, tecnologici e non, ma principalmente finalizzate alla costruzione di significati matematici.

Il *laboratorio* di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di *significati* degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni).

L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti. La costruzione di significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività. È necessario ricordare che uno strumento è sempre il risultato di un'evoluzione culturale, che è prodotto per scopi specifici e che, conseguentemente, incorpora idee. Sul piano didattico ciò ha alcune implicazioni importanti: innanzitutto il significato non può risiedere unicamente nello strumento né può emergere dalla sola interazione tra studente e strumento. Il significato risiede negli scopi per i quali lo strumento è usato, nei piani che vengono elaborati per usare

lo strumento; l'appropriazione del significato, inoltre, richiede anche riflessione individuale sugli oggetti di studio e sulle attività proposte.

Gli strumenti del laboratorio di matematica

Gli strumenti possono essere di tipo tradizionale oppure tecnologicamente avanzati; ne citiamo, a scopo esemplificativo, alcuni.

- *I materiali "poveri"*

Il lavoro con fogli trasparenti, la piegatura della carta, l'uso di spilli, fogli quadrettati non dovrebbe essere considerata un'attività esclusivamente riservata ad allievi del ciclo primario; potrebbe invece costituire, per allievi del primo biennio, un significativo avvio allo studio delle isometrie, esplorate attraverso i movimenti che le determinano. Inoltre, l'uso di strumenti poveri, magari fatti costruire da gruppi di studenti, è un'attività particolarmente significativa e consona a rinforzare quell'atmosfera da bottega rinascimentale, nel senso prima detto.

- *Le macchine matematiche*

La possibilità di manipolare fisicamente oggetti, come per esempio le *macchine* che generano curve, induce spesso modalità di esplorazione e di costruzione di significato degli oggetti matematici differenti ma altrettanto interessanti e, sotto certi aspetti, più ricche di quelle consentite dall'uso di software di geometria dinamica.

- *I software di geometria*

Nell'insegnamento della geometria vengono ormai sempre più utilizzati i software di geometria (detti comunemente software di *geometria dinamica*), veri e propri micromondi, nei quali gli studenti possono fare esperienze, compiere esplorazioni, osservare, produrre e formulare congetture e validarle con le funzioni messe a disposizione dallo stesso software.

In questo modo lo studente entra in contatto con il sapere geometrico incorporato nel software, impara a osservare e riconoscere "fatti geometrici" e può essere avviato a un significato di dimostrazione come attività che consente di giustificare, all'interno di una teoria più o meno ben precisata, *perché* una certa proprietà osservata vale.

- *I software di manipolazione simbolica*

Nell'insegnamento dell'algebra, della geometria analitica e dell'analisi può rivelarsi particolarmente opportuno l'uso di software di manipolazione simbolica, detti comunemente CAS (Computer Algebra System), che mettono a disposizione diversi ambienti integrati, in genere quello numerico, quello simbolico, quello grafico e un linguaggio di programmazione.

Il loro uso consente di limitare il calcolo simbolico svolto con carta e penna ai casi più semplici e significativi, affidando al CAS i calcoli più laboriosi. Il vantaggio è duplice, perché da una parte consente di concentrarsi sugli aspetti concettuali, dall'altra permette di affrontare problemi più complessi, più ricchi e, sicuramente, meno artificiosi di quelli che è possibile affrontare senza l'ausilio di un potente strumento di calcolo.

I CAS inoltre presentano ambienti in cui poter effettuare esplorazioni, osservazioni, validazioni di congetture; si tratta di ambienti che, per loro stessa natura, aiutano a pianificare e costruire attività volte al conseguimento di quei significati degli oggetti di studio che costituiscono l'obiettivo fondamentale del laboratorio di matematica.

Infine, ma non meno importante, la programmazione in un linguaggio CAS è particolarmente utile per consolidare il concetto di *funzione*, di *argomenti* di una funzione (*numero* degli argomenti, *ordine* degli argomenti nella definizione della funzione ...), di *input* e *output*. È altresì utile per arricchire la padronanza delle più importanti *strutture dati* (liste, vettori, matrici, ...).

- *I fogli elettronici*

I fogli elettronici, pur non essendo software specifici per la didattica, permettono svariate applicazioni, in particolare quelle relative alla rappresentazione e all'analisi dei dati e hanno la non trascurabile caratteristica di essere al momento ancora i software più utilizzati nel mondo del lavoro.

- *Le calcolatrici grafico-simboliche*

Tutte le potenzialità prima indicate e offerte dai software di geometria dinamica, dai CAS e dai fogli elettronici si trovano oggi disponibili su calcolatrici tascabili che hanno il vantaggio di poter essere utilizzate con molta flessibilità e agilità, sia per quel che riguarda gli spazi (utilizzo in classe), sia per quel che riguarda i tempi (di trasferimento in laboratorio, di accensione dello strumento...). Molte calcolatrici offrono anche la possibilità di collegamenti con sensori fisici, ossia rilevatori di misure di grandezze fisiche, aprendo interessanti e nuove prospettive nella costruzione di concetti matematici legati alla rappresentazione dei dati e all'analisi della loro variabilità.

La storia della matematica e il laboratorio di matematica

La storia della matematica, pur presentando contenuti suoi propri e possibilità di sviluppi su vari fronti (pensiamo soprattutto agli aspetti interdisciplinari con la filosofia, con l'arte e con molte altre discipline), va vista, in questo contesto, come un possibile ed efficace strumento di laboratorio (inteso nel senso largo esposto prima) adatto a motivare adeguatamente e ad indicare possibili percorsi didattici per l'apprendimento di importanti contenuti matematici.

Rinviando alle note presenti nei diversi temi per una più ampia esemplificazione e lasciando comunque al docente la scelta dei contenuti della storia della matematica che ritiene più significativi, è indubbio che, ad esempio, una trattazione storica dei problemi inerenti alla sezione aurea può costituire una efficace introduzione ai problemi di secondo grado; la trattazione storica dei rapporti tra algebra e geometria può gettare luce sugli stretti rapporti tra geometria sintetica e analitica; l'evolversi di alcuni aspetti della geometria euclidea può fornire un'introduzione alla problematica della dimostrazione e al significato di sistema assiomatico; molti episodi storici riguardanti la storia di singoli problemi aritmetici possono motivare lo studio di procedure e algoritmi altrimenti troppo astratti; le motivazioni del calcolo delle probabilità e della statistica si colgono in modo illuminante attraverso la loro storia, ecc.

In questo quadro, quindi, la storia della matematica può dare al singolo docente l'opportunità di scegliere, se le condizioni lo consentono, un percorso didattico aperto alle connessioni interdisciplinari e generalmente capace di suscitare l'interesse degli allievi; è quindi ovvio che il contesto del laboratorio esclude la determinazione di contenuti disciplinari specifici relativi alla storia della matematica.

Le interazioni tra le persone nel laboratorio di matematica

La costruzione di significati è strettamente legata alla comunicazione e condivisione delle conoscenze in classe, sia attraverso i lavori in piccoli gruppi di tipo collaborativo o cooperativo, sia attraverso lo strumento metodologico della *discussione matematica*, opportunamente gestito dall'insegnante. Ci soffermiamo, a scopo esemplificativo per quel che riguarda la gestione delle interazioni sociali in classe, sulla discussione matematica. Un primo livello di discussione è quello che, per esempio, si sviluppa dopo la lettura del testo di un problema. Un secondo livello di discussione matematica si sviluppa al termine della soluzione (individuale o in piccoli gruppi) o, talvolta, in un momento cruciale della soluzione stessa. Tale discussione è centrata sul confronto delle soluzioni realizzate dagli alunni e si sviluppa attraverso la presentazione delle proprie soluzioni, oltre che sull'interpretazione e sulla valutazione di quelle realizzate dai compagni. Un terzo livello di discussione matematica riguarda la correttezza e la ricchezza delle soluzioni proposte, la coerenza e l'attendibilità, il livello di generalizzazione adottato. Quest'ultima fase dovrebbe condurre alla costruzione di significati che vanno oltre quelli direttamente coinvolti nella soluzione del compito, per consentire agli studenti di entrare in contatto con nuovi aspetti della cultura matematica, favorendo in particolare, un approccio, graduale ma sistematico, al pensiero teorico.

Conclusioni

Sulla traccia delle considerazioni esposte fin qui, si dovrebbe muovere il lavoro degli insegnanti che vogliano ricercare e sperimentare un concreto curriculum di Matematica per l'insegnamento-apprendimento di questa materia nell'ottica della continuità e che si pongano contemporaneamente il problema delle diverse esigenze e individualità degli studenti coinvolti. Occorre da un lato riuscire a comprendere, o meglio aiutare gli stessi alunni a comprendere e verbalizzare, le convinzioni che essi hanno sulla matematica e sui vari concetti (o pseudo-concetti) che stanno apprendendo o hanno appreso nel corso degli anni. E dall'altro occorre centrare in tutti gli ordini di scuola la proposta di apprendimento della matematica a partire dal ruolo della disciplina nello sviluppo delle capacità di pensiero dei ragazzi e dalla sua utilità di essa nell'affrontare la realtà.

Occorre inoltre operare costantemente in ottica e con attività di tipo interdisciplinare; questo non soltanto per superare i "vincoli" di tempo e spazio, ma soprattutto al fine di far comprendere che la matematica nasce per rispondere a bisogni dell'uomo all'interno di una comunità di persone che condividono problemi e conoscenze, al fine di migliorare la qualità della vita di tutti e di ciascuno.

E' bene essere consapevoli della difficoltà di questo lavoro e dei tempi lunghi che esso richiede, ma anche della sua indispensabilità per riuscire finalmente a rispondere alle reali esigenze dei nostri studenti, soprattutto di quelli fra loro (e non sono pochi, come è noto), che per vari motivi vivono la matematica soltanto come una scienza vaga e lontana, o peggio ne sono terrorizzati come di fronte a un fenomeno assolutamente estraneo ed incontrollabile.

Riferimenti bibliografici

- P. Boero, 1990, "Allievi con difficoltà di apprendimento: che fare?", *L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 13 (12), pp. 1172-1189
- E. Borromeo, 1997, Realizzazione di un ipertesto multimediale sulla genetica nella scuola media per il recupero di abilità scientifiche, in Andronico, A., Piochi, B. & Sacerdoti, S., (eds.), 1997, *Atti DIDAMATICA '97: Informatica per la Didattica*, Siena 8-10 maggio 1997, vol I (Lavori e Note Brevi), 125-132
- U. Cattabriga e V. Di Paola (a cura di), 1997, *Matematica e poesia: un tema difficile ?*, IRRSAE Toscana, Firenze
- CREM, 1999, *La matematica dalla materna ai 18 anni*, (ed. ital.), Pitagora Ed., Bologna
- B. D'Amore e P. Sandri, 1996, *Fa' finta di essere...*, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, n.3, 223-246
- F. Jacquet, 1993, *Dalla ricerca in didattica alla pratica in classe*, *L'Educazione matematica*, s. III, 4 (2), 50-66
- F.K. Lester, 1987, *Why is problem solving such a problem ?*, Proceedings PME XI
- P. Longo, A. Di Carlo, M. Ambrosione, 1995, *Didattica della matematica contro la dispersione scolastica: esperienze di recupero nell'inserimento di allievi in prima superiore*, in C. Caredda, P. Longo, B. Piochi (a cura di), *Il ruolo della matematica nella conquista dell'autonomia*, Pitagora Ed., Bologna, pp. 123-131
- A. Oliverio Ferraris, 1995, *TV per un figlio*, Laterza, Bari
- B. Piochi, *Problemi di minimo risolvibili con metodi elementari*, in B. Micale e G. Pluchino (a cura di), *Atti XV Convegno sull'insegnamento della matematica: Aritmetica, informatica, logica nell'educazione matematica*, Grosseto, 29-31 ottobre 1992, *Notiziario U. M. I.*, suppl. n. 5, maggio 1993, pp. 137-140
- B. Piochi, M. Pertichino & M.P. Bianchi Janetti, 1998, *Recupero di concetti di base nel primo anno di scuola superiore attraverso la proposta di situazioni a-didattiche*, *L'Educazione matematica*, s. V, 3 (1), 30-43
- B. Piochi, 1998, "La matematica non è un'opinione, la poesia sì. La matematica è fredda e razionale, la poesia no", in I. Aschieri, M. Pertichino, P. Sandri, P. Vighi (a cura di), *Matematica e affettività*, Pitagora Ed., Bologna, pp. 107-114
- R. Zan, 1995, *L'approccio metacognitivo*, *Le Scienze e il loro insegnamento*, 4/5, ottobre 1995, p 96-99
- R. Zan, 1991-92, *I modelli concettuali di "problema" nei bambini della scuola elementare*, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 14, n. 7 e n. 9, 1991; 15, n. 1, 1992
- UMI-CIIM, *Matematica 2001, Materiali per il XXVII Convegno Nazionale sull'Insegnamento della matematica*, Ischia, 15-17 Novembre 2001
- UMI-CIIM, *Matematica 2003, Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica. Ciclo secondario*, Liceo Vallisneri, Lucca, 2003