Michele Castignani

ANALISI STOCASTICA DELLA STRUTTURA A TERMINE DEI TASSI D'INTERESSE SULLA BASE DEL MODELLO COX, INGERSOLL & ROSS

INTRODUZIONE

1. Questa tesina si propone di spiegare qual è l'influenza del tempo sui tassi d'interesse e, nello specifico, quale ne sia la dinamica nel mercato finanziario italiano.

2. Dapprima si illustreranno alcune nozioni fondamentali della matematica finanziaria classica, per poi presentare una succinta analisi teorica della struttura dei tassi d'interesse in condizione di certezza. Si proseguirà esaminando un modello stocastico della struttura per scadenza dei tassi e, infine, una sua verifica empirica sulla base delle serie storiche dei rendimenti dei titoli del mercato monetario (Bot) rilevati negli anni 1990-1995.

I. ALCUNI PRINCIPI DELLA MATEMATICA FINANZIARIA CLASSICA

I.1 INTRODUZIONE

Definiamo con v(x,y) [1] il valore da investire al tempo x, per ottenere con certezza a scadenza (y) un ritorno di Lire 1. In altre parole, la funzione "v" rappresenta il prezzo dell'attività finanziaria. Questa è una operazione semplice che registra due transazioni: una dall'agente che compra l'attività a quello che la vende (per un valore pari al prezzo v), e l'altra, a scandenza, dal venditore al compratore per un valore pari a 1 (ovvero v+interessi). Complichiamo l'operazione introducendo una nuova variabile temporale: u<=x. Essa rappresenta il momento in cui, prima della scadenza, si pattuisce il prezzo dell'attività finanziaria. La funzione v(u,x,y) [2] esprime il prezzo, fissato all'istante u e da pagare all'istante x, per ottenere, in cambio, un capitale unitario all'istante y. La funzione [1] è un caso particolare della funzione [2], in modo speciale quando in questa ultima vale u=x. La funzione v(u,x,y) indica nella matematica finanziaria i prezzi a termine, che evidentemente, da un punto di vista operativo, stanno dietro a un certo tipo di attività finanziarie: i contratti a termine. Mentre, la funzione v(x,y) è il prezzo spot (o prezzo a pronti) collegato al contratto a pronti. Se fissiamo u e x la funzione [2] dà la struttura per scandeza dei contratti finanziari. Cioè, un insieme di prezzi corrispondenti ad attività con scandeze (y) diverse, mentre i tempi di contrattazione (u) e di regolamento (x) sono costanti. In altre più autorevoli parole << the term structure of interest rates mesaures the relationship among the yields default-free securities taht differ only in their term of maturity. [...] the term structure embodies the market's anticipations of future events. >> (J.C.Cox, J.E.Ingersoll, S.A.Ross, "A Theory of the Term Structures of Interest Rates", Econometrica, Vol.53 N.2, 1985)

I.2 L'INTENSITA' ISTANTANEA D'INTERESSE

La definizione di tasso di interesse può essere estesa nel tempo continuo, così assumendo la denominazione di tasso istantaneo di interesse. Si definisca f(t) una generica funzione valore, ovvero l'andamento del valore di un contratto che garantisca la disponibilità di una lira alla scadenza t. Per ipotesi, tale funzione è non-negativa e non-decrescente. L'incremento della funzione f(t) è, per definizione, l'interesse. Il rapporto tra questo valore e il valore della funzione all'istante iniziale fornisce il tasso di rendimento. Mentre, l'intensità d'interesse, relativa allo stesso periodo, risulta dal rapporto fra il tasso di rendimento e l'incremento temporale. Estendendo tale rapporto all'infinito, otteniamo l'intensità istantanea d'interesse:

delta(t)=limdt->0 [df(t)/dt*f(t)]=f'(t)/f(t)=dlog(f(t))/dt

La forza d'interesse (o tasso istantaneo d'interesse) è, quindi, pari all'interesse prodotto nell'unità di tempo diviso un importo f(t). Geometricamente interpretabile come la sottotangente alla funzione valore f(t). Seguendo alcuni semplici passaggi matematici ricaviamo la legge di sconto:

v(t,s)= e-|delta(t,u)du (leggi: integrale di delta() da t a s) [1]

che si può ridefinire secondo la più generale formulazione della legge di sconto v(t,T,s) sotto l'ipotesi che v(t,s)=v(t,T)v(t,T,s) (cfr. prossimo paragrafo):

v(t,T,s)= e-|delta(t,x)dx (leggi: integrale di delta() da T a s)

Si definisce rendimento a scadenza: h(t,s)=-(1/(s-t))log v(t,s) [2] "h" ha dimensione d'intensità (1/tempo) e può rappresentare una media temporale delle forze a sceadenza. Data la [1] e la [2], h(t,s) può essere riscritta come:

h(t,s)= (1/(s-t))|delta(t,u)du (leggi: integrale di delta() da t a s)

Mentre il tasso di rendimento a scadenza, relativamente al valore in T, stabilito contrattualmente al tempo t, di una lira pagabile in s, è dato da:

h(t,T,s)= (1/(s-T))|delta(t,u)du (leggi: integrale di delta() da T a s)

I.3 LA RELAZIONE TRA PREZZI A PRONTI E PREZZI A TERMINE, UN CASO ESEMPLIFICATO

L'operatore finanziario, dato il suo orizzonte temporale t=2 (t=y-x), può scegliere fra diverse alternative di investimento (per ottenere lire 1 a termine):

- un unico contratto a pronti il cui prezzo v(0,2);

- stipulare pi contratti a pronti successiva- mente: v(0,1)v(1,2);

- stipulare un contratto a pronti e uno a termine: v(0,1)v(0,1,2);

In un mondo perfetto, dove non si possono avere arbitraggi, ognuno degli investimenti dovrà valere lo stesso prezzo: v(0,2)=v(0,1)v(0,2)=v(0,1)v(0,1,2) [1]

Così, per l'ipotesi di assenza di arbitraggi e partendo dai prezzi a pronti rilevati sul mercato, possiamo ricavare i prezzi a termine. La struttura a termine viene detta anche implicita, perché appunto si ricava dalla struttura a pronti. Tale circonstanza si esprime affermando che << se il mercato è perfetto, in equilibrio e in condizioni di certezza, allora dall'osservazione dei prezzi di oggi si acquisiscono tutte le informazioni su quello che accadrà in futuro nel mercato stesso. Nella realtà, proprio perché queste strutture non sono deterministiche, c'è spazio per studiare i fenomeni e prevederli razionalmente allo scopo di beneficiare dei vantaggi economici derivanti da una buona previsione. (Bortot, Magnani, Olivieri, Torrigiani, Matematica Finanziaria, Bologna, Monduzzi Editore, 1983, p.20)

I.4 LA STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI D'INTERESSE NEI MERCATI IN EQUILIBRIO

Nel mondo perfetto di cui si diceva, laddove non sono convenienti gli arbitraggi, si può derivare la struttura dei prezzi impliciti: i(t,t+k)=v(t,t+k)]1/k-1 [1]

Analoga derivazione può svolgersi considerando la struttura delle intensità d'interesse: h(t,t+k)=-(1/k)*log[v(t,t+k)] [2]

Come abbiamo visto, dalla semplice osservazione dei tassi spot (tassi che corrispondono ai titoli tipo zero-coupon-bond) si potrebbe ricavare l'intera struttura per scadenza dei tassi d'interesse. In generale, però << il funzionamento osservabile dei mercati conferma soltanto con un certo grado di significatività le ipotesi del mercato teorico (nda. perfetto) >>. (De

Felice e Moriconi, La teoria dell'immunizzazione finanziaria, Bologna, Il Mulino, 1991, pp.82-84) Insomma, il mercato è incompleto e imperfetto dove: la non efficienza del mercato offre un certo margine di lucro agli arbitraggisti. Ma anche in presenza di mercati perfetti:

- non agevole è identificare l'insieme dei titoli base che coprano un orrizonte temporale piuttosto lungo;

- la struttura a scadenza viene stimata utilizzando le obbligazioni che offrono flussi intermedi (coupon-bond). C'è così un << effetto cedola >> (Ibid.; Cfr. anche Bierwag [1987,232-252]) che provoca distorsioni nei risultati e che andrebbe, dunque, considerato.

I.5 LA RELAZIONE TRA TASSI A TERMINE E TASSI SPOT ATTESI

Le differenti teorie per la struttura per scadenza dei tassi nella matematica finanziaria possono essere enunciate formulando ipotesi sulle aspettative.

I.5.1 la teoria delle aspettative pure

Come si esprimono Cox, Ingersoll e Ross (op. cit. p.385) << in a world of certainty equilibrium forward rates must coincide with future spot rates >>. E proprio da questa ipotesi abbiamo potuto scrivere le funzioni [1] e [2] del paragrafo precedente. Che cosa si cela dietro un mondo perfetto? Si assume che gli investitori siano puri massimizzatori del profitto e che non vi siano costi di transazione e di informazione, cosicché essi effettueranno operazioni tali per cui i rendimenti delle varie durate si uguaglieranno. Sarà proprio il proce sso delle azioni degli operatori finanziari che porterà il tasso a lungo termine ad eguagliare la media geometrica dei tassi attesi a breve. Questa la teoria delle aspettative pure. Tutta l'analisi condotta fin qui è stata svolta, dunque, secondo l'impostazione di questa teoria. Essa ci spiega anche perché il segmento a lungo termine della curva relativa alla struttura a scandeza dei tassi, presenta una variabilità inferiore rispetto al segmento a breve. Ciò indica che << nelle scelte degli operatori non c'è alcun ruolo per il rischio e che quindi la scelta delle scadenze dipende esclusivamente dalle loro aspettative.>> (Bortot, Magnani, Olivieri, Torrigiani, Matematica Finanziaria, Bologna, Monduzzi Editore, 1983, p.24)

I.5.2 la teoria del premio per la liquidità: liquidity premium theory

Secondo i proponenti gli agenti finanziari sono soggetti a costi di transazione e di informazione, per cui << the risk aversion will cause forward rates to be systematically greater than expected spot rates, usually by an among increasing with maturity. This term premium is the increment required to induce investors to hold longer-term ("riskier") securities. >> (J.C.Cox, J.E.Ingersoll, S.A.Ross, "A Theory of the Term Structures of Interest Rates", Econometrica, Vol.53 N.2, 1985, p.385)

I.5.3 la teoria della segmentazione dei mercati

Qui viene asserito che gli "individui" hanno una forte preferenza alla maturity (scadenza). I titoli alle differenti scadenze vengono trattati in mercati diversi, sicché gli agenti opereranno "stabilmente" nei mercati dove sono scambiati i titoli da loro graditi. Ne deriva che i tassi d'interesse si distribuiscono secondo la domanda e l'offerta delle attività in ciasun mercato.

I.5.4 la teoria dell' habitat preferenziale

L'habitat preferenziale, in qualche modo, combina le precedenti teorie. Artefici di questa soluzione sono Modigliani e Sutch. Si afferma sostanzialmente che i mercati sono spezzettati (segmentati), e che in ognuno dei comparti sono presenti investitori abitudinari. Ma grazie a un liquidity-premium, gli investitori sono incentivati a spostarsi. Se un segmento del mercato non è in equilibrio (la domanda non è uguale all'offerta) gli investitori chiederanno un premio maggiore per muoversi. Il mercato si troverà in equilibrio quando i premi contenuti nella curva dei rendimenti a scadenza saranno sufficienti ad indurre un numero adeguato di investitori a uscire dal loro habitat preferenziale in modo da eguagliare domanda e offerta per ciascu na scadenza. Questa teoria è utile a spiegarci perché la curva dei rendimenti generalmente è crescente, dove i tassi a lunga superano quelli a breve. Dobbiamo notare due difficoltà in questo tipo di approccio (per i punti 1 e 2 vedi op. cit. p.386):

1. we need a better understanding of the determinants of the term premiums. The previous theories are basically only hypotheses wich say little more than that forward rates should or need not equal expected spot rates.

2. all of the theories are couched in ex-ante terms and they must be linked with ex-post realizations not differ systematically from ex-ante views, then statistical tests can be made on ex-ante propositions by using ex-post data.

Tutte le stime empiriche sulla capacità dei tassi impliciti di prevedere i tassi di interesse futuri mostrano l'esistenza di residui, anche piuttosto ampi e irregolari, che non possono essere attribuiti solo al premio per la liquidità. I tassi impliciti restano comunque uno strumento utile alla comprensione dell'andamento futuro dei tassi. Come spiega il professore Mario Parisi ‹‹ appare verosimile che ognuna di esse [teorie] possa apportare un prezioso contributo a tale spiegazione [la struttura a termine dei tassi] e meriti pertanto di essere presa in considerazione . ›› (Mario Parisi, Dispensa ad uso degli studenti di teoria e matematica per le scelte di portafoglio, Macerata, anno acc. 1996/97, par.6.3).

Ebbene, ora, si è completata questa panoramica sulla struttura a termine dei tassi d'interesse che rientra nella cosiddetta matematica classica. Dagli anni settanta si sono sviluppate teorie alternative, e che si fondano sulla evoluzione stocastica del tasso d'interesse.

II. IL MODELLO STOCASTICO DELLA STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI D'INTERESSE

II.1 PREMESSA

I mercati finanziari sono caratterizzati da un alto grado di imprevedibilità. La formazione dei prezzi non risulta quindi nella realtà deterministica, e parimenti l'evoluzione dei prezzi non è con sicurezza calcolabile ex-ante. Nella formazione dei prezzi ‹‹ grande rilevanza ha il ruolo delle aspettative degli agenti sul futuro, ma solo in situazioni idealizzate si può assumere che queste aspettative risultino confermate ex-post. Pertanto ogni modello evolutivo [...] dovrà tenere conto correttamente del ruolo dell'incertezza, basandosi su opportune ipotesi probabilistiche sullo stato futuro del sistema economico. >> (Franco Moriconi, Matematica Finanziaria, Il Mulino, Bologna, 1994, pp.221-222)

Le teorie tradizionali non forniscono modelli in senso proprio, ma propongono ipotesi su cui elaborare modelli. Per combinare queste teorie con la condizione di incertezza, è necessario introdurre ciò di cui s'è appena detto: specifiche ipotesi sulle distribuzioni di probabilità in base alle quali le aspettative vengono formate. Un esempio fra questi viene offerto dal lavoro che segue. Esso spiega l'evoluzione della struttura per scadenza dei tassi d'interesse mediante il modello stocastico elaborato da Cox, Ingersoll e Ross.

II.2 LE IPOTESI A FONDAMENTO DELL'ANALISI

Il modello stocastico che viene esaminato si sviluppa su una serie di ipotesi:

a) costi di transazione nulli;

b) nessun costo fiscale;

c) titoli infinitamente divisibili;

d) l'operatore un massimizzatore del profitto le cui azioni non influiscono sui prezzi del mercato;

e) il mercato aperto con continuit;

f) impossibilit di arbitraggi non-rischiosi: cio, nessun atteggiamento vincolante degli agenti nei confronti del rischio. Questo requisito ci garantisce che i mercati possano raggiungere un qualche equilibrio.

II.3 LA CERTEZZA

Si definisce genericamente r(t) (tasso locale d'interesse, spot rate, ovvero un tasso non rischioso) l'intensità interna di rendimento caratteristica in t di uno zero-coupon-bond.
r(t)=h(t,t+h)= lims->t (1/(s-t))|delta(t,u)du (leggi: integrale di delta() da t a s)

L'investimento in titoli con scadenza infinitesima è non rischioso: r(t)=h(t+dt)=x*r(t)dt l'operazione di investimento di x lire effettuata in un istante (t,t+dt) garantisce sicuramente la remunerazione (l'interesse).

II.3.1 che cosa succede in condizioni di certezza

Se v(t,s) corrisponde al prezzo del titolo zero coupon - noto, per definizione - al tempo t, allora: v(t+dt,s)-v(t,s)=dv(t,s)=v(t,s)r(t)dt, o, che è lo stesso, per dt->0:

dlogv(t,s)/dt=r(t)

che possiamo integrare (stando alla condizione v(s,s)=1) ottenendo così v(t,s) in funzione del tasso locale:

v(t,s)= e-|r(u)du (leggi: integrale di r() da t a s) [1]

Laddove c'è certezza e non si verificano arbitraggi, dato un certo orizzonte temporale dell'operatore, la strategia di successivi invetimenti a breve porta allo stesso risultato di una strategia unica condotta sul lungo periodo. Risulta cioè che delta(t,s)=r(s) per ogni s>=t. L'intensità istantanea d'interesse (delta) è stata definita « in riferimento ad un contratto stipulato in t che assicura la disponibilità di una lira in s, come funzione del tempo di stipula t e dell'istante di esigibilità s; in condizioni di certezza. Invece, il tempo contrattuale non è caratterizzante la forma di delta: è come se il mercato fosse costituito da un unico contratto che regola le operazioni finanziarie relative a un qualsiasi intervallo temporale [t1,t2], in base ai valori che nell'intervallo assume la funzione r(t), di forma assegnata ». De Felice e Moriconi, La teoria dell'immunizzazione finanziaria, Bologna, Il Mulino, 1991, pp.194-195

L'espressione [1] definisce la struttura dei corsi dei titoli presenti sul mercato sulla base della funzione r(t). La curva dei rendimenti dipende unicamente da r(t). Il problema pertanto si riduce alle ipotesi legate a r(t).

II.3.2 una definizioni di r(t) in condizione di certezza

Secondo l'ipotesi keynesiana « normal backwardation » è teoricamente espressivo ipotizzare che (per maggiori approfondimenti op.cit. p.196): dr(t)=ay-r(t)]dt, a>0, y>=0, dove "y" indica il tasso di lungo perido al quale tende r(t). Il parametro "a" misura la rapidità di aggiustamento.

II.4 L'INCERTEZZA

Eliminando la condizione di certezza che caratterizzava il modello precedente ci si ritrova in un mercato dove agli agenti sono sconosciuti i valori futuri dei contratti. In termini concreti, matematici, il modello presenta una variabile r(t) aleatoria. Essa, cioè, è definita da un processo stocastico.

II.4.1 l'ipotesi del modello stocastico

r(t) è un processo di Markov (op.cit p.198-200; v. anche Mario Parisi, Dispensa ad uso degli studenti di teoria e matematica per le scelte di portafoglio, Macerata, Anno Acc. 1996/97, cap. 2 e Appendice Cap. 5), cioè la distribuzione di probabilità dei valori futuri di r(t) determinata unicamente in base al valore che il processo assume nell'istante corrente e non dipende invece dall'intera storia del processo. Si suppone che tale processo sia a traiettorie continue, ovvero che r(t) sia funzione del tempo priva di punti di discontinuità. De felice e Moriconi evidenziano che « in termini finanziari, l'ipotesi di continità equivale a supporre che il mercato dei titoli, pur seguendo una dinamica di tipo aleatorio, non subisca shock » (ibid.). r(t) assume la definizione di processo diffusivo.

II.4.2 il modello stocastico

In questo paragrafo si introdurrà il modello stocastico elaborato da Cox, Ingersoll e Ross (1978, 1985a, 1985b). Questo è un modello univariato che ipotizza:

dr(t)=alpha*[gamma-r(t)]dt+ro*r1/2(t)*dZ(t)   con alpha,gamma,ro>0   [1]

Il parametro gamma esprime il tasso di lungo periodo (analogo al parametro del modello in condizione di certezza, v. paragrafo precedente) e 1/alpha la costante di tempo del processo di richiamo. Da notare che il coefficiente di diffusione [ro*r1/2(t)]2 realizza gereralmente ampie fluttuazioni del tasso d'interesse per valori alti di r(t). Inoltre, cosa che tra l'altro rende maggiormente significativo questo modello, r(t) è non negativo.

Per giungere alla specificazione della struttura per scadenza dei tassi d'interessse sulla base del processo r(t) qui definito, si rende necessaria la definizione della funzione prezzo di mercato del rischio. Cox, Ingersoll e Ross introducono questa funzione:

q(r(t),t)=[¶*r1/2(t)]/ro   ¶=costante (reale)   [2]

per cui il termine di aggiustamento risulta proporzionale a "r":

q*g=¶*r(t)   con g(r(t),t)=ro*r1/2(t)   [3]

II.4.3 l'equazione della struttura per scadenza in condizione di incertezza

Si definisca un processo di diffusione generico (equazione differenziale stocastica di Ito) (cfr. Ito [1951;1961]):   dr(t)=f(r(t),t)dt+g(r(t),t)dZ(t)   [1]

f=media infinitesima (drift) del processo; g2=varianza infinitesima (coefficiente di diffusione); Z(t) un processo di Wiener con varianza istantanea unitaria (moto browniano standard) (Per una interessante considerazione sul moto browniano Z(t): De Felice e Moriconi, La teoria dell'immunizzazione finanziaria, Bologna, Il Mulino, 1991, p.202, v. "Osservazione". Per maggiori dettagli sui moti browniani si veda: Karlin e Taylor [1981]; Da Prato [1980]; v. anche Mario Parisi, Dispensa ad uso degli studenti di teoria e matematica per le scelte di portafoglio, Macerata, Anno Acc. 1996/97, Appendice cap. 5).

Abbiamo introdotto in precedenza in condizioni di certezza una equazione dr(t) piuttosto simile a questa. Ma la [1] oltre a essere caratterizzata da un fattore certo (f) in comune con l'equazione "keynesiana", contiene un elemento di disturbo aleatorio (g*dZ). Poiché la distribuzione di probabilità dei valori futuri di r(t) è determinata unicamente in base al valore che il processo assume nell'istante corrente, « anche il prezzo all'istante t di qualsiasi titolo disponibile sul mercato dipenderà da r(t) » (op.cit. p.203), allora si avrà: v(t,s)=v(r(t),t,s) ipotizzando che "v" sia differenziabile due volte rispetto a r(t). Se vale la relazione precedente si può pure scrivere "v" come un'equazione differenziale stocastica del tipo:

dv(r(t),t,s)=v(r(t),t,s)u(r(t),t,s)dt-v(r(t),t,s)o(r(t),t,s)dZ(t)   [2]

dove u e o rappresentano la media e la varianza istantanea, per unità di tempo, del tasso di rendimento dv/v, relativo all'intervallo di tempo infinitesimo, di uno zero-coupon-bond con scadenza in s. La [2], a sua volta, può essere trasformata, mediante semplici artifici matematici, in: dv/(v*dt)= u-o*B(t) dove B(t)=dZ(t)/dt. L'intensità istantanea d'interesse (u) relativa a uno zero-coupon-bond corrisponde così a:

u=Et[dv/(v*dt)],   E=valore atteso

dove per brevità si è evitata l'ingombrante scrittura delle variabili funzionali. Risolvendo tale espressione (u=v-1(r(t),t,s)*limh->0(1/h)*Etv(r(t+h),t+h,s)-v(r(t),t,s)])   e utilizzando il lemma di Ito si otterrà (omettendo per brevità ancora le dipendenze funzionali) in termini impliciti:

vt+f*vr+(1/2)g2vrr-u*v=0   [3]

che esprime la generica equazione della struttura per scadenza.

Mentre (o2=v-2 *limh->0(1/h)*Et[v(r(t+h),t+h,s)-v(r(t),t,s)]2):

o=v-1g*(dv/dr)   [3']

Ora supponiamo che al tempo t un operatore finanziario venda allo scoperto "a1" unità di uno zero-coupon-bond unitario che scade in t1 (si impegni cioè a versare "a1" lire in t, incassando a1*v(r,t,t1) lire in t), e compri, sempre in t, "a2" unità di uno zero-coupon-bond con scadenza in t2. Il valore del portafoglio sarà:

W(r,t)=a1*v(r,t,t1)-a2*v(r,t,t2) [4]

Questa equazione può essere riformulata, data la [2] ed evitando di scrivere la variabile r(t): dW(t)=a1*dv(t,t1)-a2*dv(t,t2)=

= a1*v(t,t1)u(t,t1)-a2*v(t,t2)u(t,t2)]dt-a1*v(t,t1)o(t,t1)-a2*v(t,t2)o(t,t2)]dZ(t)   [5]

Se per ipotesi vale (a1/a2=[v(t,t1)o(t,t1)]/[v(t,t1)o(t,t2)] allora il termine stocastico della dW(t) è uguale a zero, e il portafoglio è istantaneamente non rischioso. Si può scrivere, tenendo conto del rapporto a2/a1, che:

W(t)=a1*v(t,t1)*[1-(o(t,t1/o(t,t2)]   [6]

dW(t)=a1*v(t,t1)*[u(t,t1)-(o(t,t1/o(t,t2)*u(y,t2)]dt   [7]

Il fatto che non possano realizzarsi arbitraggi non rischiosi significa che il valore del portafoglio in dt dovrà essere uguale all'interesse prodotto dall'investimento in titoli nella stessa scadenza; vale cioè (questa relazione vale solo in t.) dW(t)=W(t)*r(t)dt [8]

Sostituendo la [6] e la [7] nella [8] si ottiene:

[u(t,t1)-r(t)]/o(t,t1)=[u(t,t2)-r(t)]/o(t,t2)

Più in generale si può scrivere:

q(r(t),t,s)=[u(r(t),t,s)-r(t)]/o(r(t),t,s)=q(r(t),t)

che indica il taste dependent, ovvero le preferenze del mercato di fronte alla liquidità. Essa è indipendente dalla scandenza "s". Dunque, definito che q=(u-r)/o, ricaviamo: q*o=u-r, da cui ancora: u=r+q*o.

La [3'] ci offre il valore di "o" che può sostituirsi nella precedente relazione: u(r,t,s)=r(t)-q(r,t)*g(r,t)*vr(r,t,s)/v(r,t,s)]   [9]

Applicando la [9] nella [3], che qui riscriviamo per comodità vt+f*vr+(1/2)g2vrr-u*v=0, otteniamo: vt+f*vr+(1/2)g2vrr-v*(r-q*g*(vr/v))=0.

Ne segue poi che: vt+(f+q*g)*vr+(1/2)g2vrr-rv=0   [10]

Questa è l'equazione della struttura per scadenza specifica alle nostre ipotesi, definita da:

- f(r(t),t)

- g(r(t),t)

- r(t)

- q(r(t),t)

II.4.4 specificazione del modello stocastico

Nel paragrafo II.4.2 si erano definite implicitamente alcune relazioni del modello Cox, Ingersoll e Ross:

(A) (v. II.4.2 relazione N.1)   f=alpha*(gamma-r(t))

(B) (v. II.4.2 relazione N.1)   g=ro*r1/2(t)

(C) (v. II.4.2 relazione N.3)   q*g=¶*r(t)

Sulla base di queste e di:

(D) (v. II.4.3 relazione N.10) vt+(f+q*g)*vr+(1/2)g2vrr-rv=0

si può riscrivere l'equazione della struttura a termine dei tassi come:

vt+[alpha*gamma-(alpha-¶)*r]*vr+(1/2)ro2vrr-rv=0   [1]

Risolvendo questa equazione (si rimanda a Castellani [1988c]) , data l'ipotesi v(r(t),s,s)=1, si ha:

v(r(t),t,s)=A(t,s)*e-r(t)*B(t,s)

con (per l'espressione completa si veda De Felice e Moriconi, La teoria dell'immunizzazione finanziaria, Bologna, Il Mulino, 1991, p.227):

A(tau)=A(alpha,gamma,ro2,¶,d,tau)

B(tau)=B(alpha,¶,d,tau)

d=[(alpha-¶)2+2*ro2]1/2

dove tau=vita a scadenza=s-t; mentre alpha, gamma, ro2 e pi-greco sono i parametri da stimare.

Considerando la relazione 2 del paragrafo I.2, dalla struttura per scadenza dei corsi si ricava la struttura per scadenza dell'intensità di interesse:

h(r,t,s)=(s-t)-1r*B(T)-logA(T)]   [2]

dove T=s-t. Ne discende, in ultimo, la struttura per scadenza dei tassi: i=eh-1

E' interessante valutare il limite all'infinito di h rispetto alla variabile s (scadenza):

lims->infinito h(r(t),t,s)=(2*alpha*gamma)/(d+alpha-¶)

per cui la funzione h() rispetto a "r" ha un asintoto orizzontale che dipende dai parametri strutturali del modello.

III. UNA STIMA DEI PARAMETRI DEL MODELLO STOCASTICO DELLA STRUTTURA PER SCADENZA DEI TASSI D'INTERESSE

III.1 PREMESSA

Il numero relativamente ridotto di variabili rende questo modello piuttosto flessibile per il calcolo dei paramteri. Sono state effettuate stime diverse dei parametri, utilizzando metodi alternativi tra loro. Il vero problema della stima la non linearità della funzione v() rispetto ai quattro parametri. In questa sede ci si propone di replicare il lavoro di Castellani e Moriconi [1987] (La stima proposta da Castellani e Moriconi è fatta sulla base delle serie storiche dei rendimenti dei Bot per gli anni 1981-85. Essa è riportata in De Felice e Moriconi, La teoria dell'immunizzazione finanziaria, Bologna, Il Mulino,1991, pp.233-240), riaggiornandolo e muovendoci pertanto da una serie storica mensile dei rendimenti dei Bot a 3,6 e 12 mesi dal 1992 al 1995.

III.2 IL METODO DI STIMA

Si è usato un metodo detto « a due stadi ». Esso prevede due fasi successive di lavorazione:

FASE_1) stima dei parametri caratteristici del processo r(t);

FASE_2) stima di mediante una regresione non lineare della yield curve.

Una ricerca a se stante poteva svolgersi per la idetificazione del migliore tasso locale. In questa sede, senza alcuna remora ma affidando a qualcun altro l'ipotesi di un successivo studio, considereremo espressivo come spot rate il rendimento dei Bot a 3 mesi.

III.2.1 fase n.1

Riscriviamo la funzione differenziale del modello stocastico (v. II.4.2 relazione N.1):

dr(t)=alpha*[gamma-r(t)]dt+ro*r1/2(t)*dZ(t)   con alpha,gamma,ro>0

Si può dimostrare che i parametri, con approssimazione (la misura dell'approssimazione è un altro argomento che potrebbe essere oggetto di approfondimento), sono deteterminati da:

ro2=(8*omega2*logB1)/(B12-1)   [1]

alpha=-2logB1-(B0*logB1)/[r1/2*(B1-1)]   [2]

gamma=alpha-1*(r1/2*[(B0*logB1)/(B1-1)]+ro2/4)   [3]

avendo indicato con beta0 e beta1 i coefficienti del modello lineare:

(rt)1/2=B0+B1*rt-1+et

dove omega2 e (rt)1/2=N-1*S(da t=1 a N)(rt)1/2   (S=sommatoria)   sono rispettivamente la varianza dell'errore e la media campionaria della radice di r(t).

Rimane da rilevare i rendimenti dei Bot a 3 mesi (dal 1990 al 1995); introdurli in un software specifico di analisi statistica (TSP), e programmare la stima dei parametri: beta1, beta0 e omega2. Questi, a sua volta, dovranno essere sostituiti nelle precedenti [1], [2] e [3], così ricavandone: alpha, gamma, ro2, ovvero i parametri del processo r(t).

III.2.2 fase n.2

Ci rimane da stimare il parametro pi-greco. Come sostengono De Felice e Moriconi (ibid.) « la stima di pi-greco può essere ottenuta con procedura di regressione (non lineare) delle funzioni h*(t,s) sui valori dei rendimenti dei Bot con diversa maturity (tau), osservati in uno stesso istante t, eventualmente per più istanti t; il valore stimato pi-greco* sarà quindi tale da minimizzare le somme:

StStau [h0(t,t+tau)-h(r(t),t,s;¶)]2

dove h0 è il valore osservato per l'intensità di rendimento (fissati t e tau) e h è il valore teorico ottenuto in corrispondenza delle stime alpha*, gamma*, ro2 [nda. sono i parametri discussi precedentemente] ».

Si deve così compiere una regressione non lineare nel parametro ¶ della funzione h(r(t),t,s).

Si è colà (v. II.4.4 relazione 2) definita la funzione h(), che qui si riscrive per t=0: h=(1/s)*(r*B-logA) dove:

A(s)=[[2d*e(alpha-¶+d)(s/2)]/[(alpha-¶+d)*(eds-1)+2d]](2*alpha*gamma)/(ro*ro)

B(s)=2(eds-1)/[(alpha-¶+d)*(eds-1)+2d]

d=[(alpha-¶)2+2*ro2]1/2

A e B sono due funzioni non lineari del solo parametro pi-greco. Infatti, gli altri parametri sono noti grazie alla procedura regressiva (lineare) effettuata nella fase N.1, di cui s'è detto in precedenza.

Il software TSP (ma anche il RATS e il GAUSS) è molto utile per elaborare una regressione non lineare. Introducendo per le scadenze a 6 e 12 mesi i relativi valori di h() (rendimenti dei Bot a 6 e 12 mesi), e per r() i rendimenti dei Bot a 3 mesi, questo programma statistico realizza, fissando inizialmente un valore per pi-greco, una stima del parametro mediante un procedimento iterativo. Tutti i risultati della fase N.1 e N.2 sono contenuti in appendice (B).

III.2.2 un procedimento alternativo alla fase N.2 di regressione non lineare

Una regressione lineare può essere eseguita con semplicità mediante un software facilmente reperibile In questo paragrafo si tenterà un approccio alternativo al precendete che consenta di stimare pi-greco, avendo a disposizione solo software molto commercializzato tipo spreadsheet (qualsiasi foglio elettronico in commercio: LOTUS, EXCEL,...).

Il modello prevede una funzione h() non lineare nel parametro. Il parametro (da stimare) è pi-greco. Fissiamo t=0 e s=1. Dunque, il tempo iniziale (t) è zero e la scadenza (s) è un anno. La funzione è: h=r*B(¶)-logA(¶). Questa relazione è analoga a una funzione lineare del tipo: y=x*b+c, dove: b=B(¶) e c=-log(A(¶)) Si esegua una regressione lineare di h(), dove a r() corrispondono i rendimenti dei Bot a 3 mesi, e a h() [h=ln(i+1)] i rendimenti dei Bot a 12 mesi. Così facendo si ottengono i valori del coefficente angolare (b) e dell'intercetta (c) della funzione h().

Il nostro problema però resta ancora irrisolto: il parametro pi-greco è tuttora senza soluzione. In ogni caso, adesso, si hanno a disposizione le necessarie conoscenze per desumere tale valore. Infatti, poiché:

b=b(¶)

c=-log[A(¶)]

è vero pure che b/c=-b(¶)/log[A(¶)], quindi: b(¶)*(c/b)=-log[A(¶)] che rappresenta una equazione non lineare in pi-greco.

La risoluzione di questa equazione offre il valore del parametro. Come risolvere questa equazione? Si potrebbe procedere allo studio di due funzioni: una espressa dal membro di sinistra e l'altra da quello di destra; Poi derivare graficamente il punto di intersezione.

Lo studio manuale di queste equazioni è piuttosto complicato ed è manifesta l'elevata approssimazione del risultato. Una esemplificazione del lavoro può essere data da un software matematico specifico (ad esempio: LAM). Questo consente di definire le funzioni e di cacolare i punti di intersezione. La questione però riguarderebbe la reperibilità di un software del genere. Seppur più diffuso del TSP, potremmo non averne comunque la disponibilità.

Un'altra alternativa è offerta dai molti procedimenti iterativi per tentativi (metodo di bisezione o altro). A tal scopo ci potrebbe essere utile il foglio di calcolo. Si potrebbero cioè inserire le due funzioni e cercare dove il valore dell'una coincide (approssimativamente) con il valore dell'altra. In appendice (C) è riportato il calcolo del parametro pi-greco (¶) mediante lo studio di funzioni con il software LAM, e per tentativi con il software LOTUS.

IV. CONCLUSIONI

E' evidente che ogni modello matematico che venga adattato alle esigenze dell'analista finanziario sia assoggettabile fortemente a critiche sulle ipotesi. Ne discutiamo brevemente alcune:

1) Tutta la costruzione logica del modello fa riferimento a un mercato idealizzato, non frizionale e competitivo. Secondo alcuni questa ipotesi sembra non essere sufficientemente coerente con la realtà, e così è tra le prime a essere oggetto di critiche.

2) Il tasso locale di rendimento è l'unica fonte di incertezza da cui trae origine lo studio. In verità, la struttura del mercato si dovrebbe caratterizzare su modelli multivariati, con più variabili base aleatorie.

3) Il tasso locale segue un processo di Markov diffusivo. Sarebbe però maggiormente realistico utilizzare un processo di Markov con traiettoirie a salti.

4) La regressione lineare si elaborata sulla base dei rendimenti dei Bot a 3 mesi. La misura della loro rappresentatività nel comparto dei titoli a più breve termine non è stata minimamente analizzata. Questi rendimenti sono veramente rappresentativi?

Si sono qui elencate soltanto alcune delle ipotesi contestabili, ma il margine lasciato aperto alla discussione è ancora piuttosto ampio. Sono di fatto criticabili pure i metodi di stima (es. il metodo a due stadi) e gli strumenti statistici utilizzati (es. la regressione). Oltretutto, l'analisi proposta non gode di quella massima rigorosità che un matematico si aspetterebbe, e che se da un lato non ne garantirebbe con certezza la validità, dall'altro ne assicurerebbe almeno la esattezza. Come si è detto, infatti, anche il risultato è piuttosto approssimativo rispetto alle ipotesi. I risultati ottenuti quindi avrebbero scarso valore scientifico alla luce soprattutto della complessa realtà dei mercati finanziari e delle variabili caratteristiche direttamente osservabili su di essi. In ogni caso, tutto questo corpo di informazioni rappresenta una ulteriore conoscenza che si aggiunge e nulla toglie (sic), all'insieme di strumenti disponibili all'operatore finanziario.

Questa ricerca rappresenta solo un possibile approccio allo studio della dinamica dei tassi d'interesse e lascia largo spazio a ulteriori approfondimenti:

- la coerenza dell'evoluzione delle curve dei rendimenti stimate e i fatti avvenuti nel periodo preso in esame;

- il confronto tra i risultati qui ottenuti e quelli ricavabili da procedimenti alternativi (ad esempio: metodo di interpolazione dei cubic splines (Questo studio è proposto da Barone, Cuoco, Zautzik, "La Struttura dei Rendimenti per Scadenza secondo il Modello Cox, Ingersoll e Ross", Temi di discussione del servizio studi della Banca d'Italia, 1989, N.128);

- la possibilità di determinare in base al modello i prezzi teorici per titoli a tasso fisso di qualsiasi scadenza consente di valutare l'efficienza del mercato secondario e di verificare la coerenza tra questo e il mercato primario;

- si potrebbe proseguire questo lavoro per compiere uno studio sull'immunizzazione stocastica dei portafogli obbligazionari.

Mi preme di chiudere questa ricerca con una lista di testi, non indicati in bibliografia, utili ad ampliare le conoscenze in materia:

"Contributi alla Ricerca Economica", Banca d'Italia, N.73, 1986

Kellinson S.G., The Theory of Interest.

Castellani e Moriconi [1987]

I testi di - per brevità cito solo l'autore: Malkiel B.G., Meiselman D., Nelson C.R., Roll R., e il volume I Tassi d'Interesse di Peviani.

BIBLIOGRAFIA

Barone, Cuoco, Zautzik, "La Struttura dei Rendimenti per Scadenza secondo il Modello Cox, Ingersoll e Ross", Temi di discussione del servizio studi della Banca d'Italia, 1989, N.128

Bortot Paolo, Magnani Umberto, Olivieri Gennaro, Torrigiani Marcello, Matematica Finanziaria, Monduzzi Editore, Bologna, 1993

Cox John C., Ingersoll Jonathan E.e Ross Stephen A.,"A Theory of Term structure of interest rates", Econometrica, Vol.53, N.2, 1985

De Felice Massimo e Moriconi Franco, La Teoria dell'Immunizzazione Finanziaria, Il Mulino, Bologna, 1991

Monti Ernesto e Onado Marco, Il Mercato Monetario e Finanziario in Italia, Il Mulino, Bologna, 1982

Moriconi, Franco, Matematica Finanziaria, Il Mulino, Bologna, 1994

Parisi, Mario, "Dispense di Teoria e Matematica per le Scelte di Portafoglio", Macerata, Anno Accademico 1996/97

Wonnacott R.J., Wonnacott Th. H., Econometrics, John Wiley & Sons, Inc., Toronto, 1970

SOFTWARE UTILIZZATO

TSP, versione 6.53

LOTUS, versione 6.0

LAM2, versione 1990

APPENDICE A) Rendimenti dei Bot a 3,6,12 mesi

RENDIMENTI MENSILI DEI BOT A 3,6,12 MESI (IN %)

FONTE: Banca d'Italia

1992

Bot 3 mesi 12.19 12.73 13.05 13.49 13.45 14.42 15.56 15.43 18.05 15.52 15.37 14.45

Bot 6 mesi 12.21 12.17 12.82 13.43 13.21 13.85 15.32 15.24 18.52 16.15 15.23 14.35

Bot 12 mesi 12.15 12.09 12.62 13.06 13.00 13.59 14.69 14.62 17.02 15.92 15.40 14.10

1993

Bot 3 mesi 12.52 12.08 12.51 12.30 11.51 10.62 9.88 9.18 8.86 9.11 8.90 8.18

Bot 6 mesi 11.98 12.08 12.37 12.54 11.36 10.23 9.95 9.84 9.03 8.95 9.46 8.40

Bot 12 mesi 12.59 11.97 12.62 12.48 11.64 10.51 10.37 10.03 9.40 9.11 9.59 8.54

1994

Bot 3 mesi 8.26 8.66 8.91 8.60 8.08 8.67 8.61 9.19 9.16 9.48 9.20 9.28

Bot 6 mesi 8.70 8.83 8.96 8.75 8.04 8.56 8.94 9.77 9.74 9.89 9.60 9.72

Bot 12 mesi 8.69 8.81 9.00 8.75 8.15 9.12 9.37 10.40 10.29 10.68 10.25 10.44

1995

Bot 3 mesi 9.44 9.67 11.62 11.37 10.63 11.14 10.99 10.57

Bot 6 mesi 9.90 10.07 11.95 11.59 10.77 11.08 11.06 10.69

Bot 12 mesi 10.55 10.61 12.07 11.81 10.76 11.16 11.06 10.61

APPENDICE B) Una verifica empirica del modello CIR mediante TSP

```
ASE N°1 (v. JIII.2.1)
------------------------------------------------------------------------
EGRESSIONE LINEARE DELLA FUNZIONE RADICE_R(T)
------------------------------------------------------------------------


                    NLS // Dependent Variable is SQBOT3
Date: 7-01-1996 / Time: 17:34
SMPL range:    1  -    43
Number of observations: 43
SQBOT3=C(1)+C(2)*SQBOT3_T
Equation is linear - 1 iteration
                COEFFICIENT    STD. ERROR      T-STAT.    2-TAIL SIG.
      C(1)       0.0170009      0.0163850     1.0375866      0.306
      C(2)       0.9471470      0.0490248     19.319757      0.000

R-squared                 0.901027    Mean of dependent var   0.331676
Adjusted R-squared        0.898613    S.D. of dependent var   0.036713
S.E. of regression        0.011690    Sum of squared resid    0.005603
Durbin-Watson stat        1.911154    F-statistic             373.2530
Log likelihood            131.3184


ALORI DELLA FUNZIONE RAD_R(T) (v. RELAZIONE N.4 PAR. III.2.1)
------------------------------------------------------------------
eta(0)=C(1)=0.0170009
eta(1)=C(2)=0.9471470
mega_quadro=0.000136656
edia_rad_r(t)=0.331676

ALCOLO DEI PARAMETRI (v. RELAZIONI N.1,2,3 PAR. III.2.1)
------------------------------------------------------------------
lfa=0.024294488
amma=0.103562655
o_quadro=0.000250519
```

FASE N°2 (v. jIII.2.1)

REGRESSIONE NON LINEARE NEL PARAMETRO PI-GRECO DELLA FUNZIONE H()

```
                    NLS // Dependent Variable is LBOT12
Date: 7-02-1996 / Time: 11:07
SMPL range:     1  -    44
Number of observations: 44
 BOT12=2*BOT3*(EXP(((0.02429-C(1))^2+0.0005)^0.5)-1)/( (0.02429-C(1)
+((0.02429-C(1))^2+0.0005)^0.5)*(EXP(0-((0.02429-C(1))^2+0.0005)^0.5
)-1)+2*((0.02429-C(1))^2+0.0005)^0.5)-20.08*(LOG( ((2*((0.02429-C(1)
)^2+0.0005)^0.5)*(EXP((0.02429-C(1)+((0.02429-C(1))^2+0.0005)^0.5)*0
.5)))/(((0.02429-C(1)+((0.02429-C(1))^2+0.0005)^0.5))*(EXP(((0.02429
-C(1))^2+0.005)^0.5)-1)+2*((0.02429-C(1))^2+0.0005)^0.5))/LOG(EXP(1)
))
Failure to improve SSR achieved after 0 iterations
                    COEFFICIENT   STD. ERROR      T-STAT.    2-TAIL SIG.
      C(1)          -0.3460910     0.5697827    -0.6074088      0.547

R-squared                 -134.2849    Mean of dependent var    0.107392
Adjusted R-squared        -134.2849    S.D. of dependent var    0.018896
S.E. of regression         0.219779    Sum of squared resid     2.077014
Durbin-Watson stat         0.001273    Log likelihood           4.738384
```

PARAMETRO STIMATO PI-GRECO

---

pi-greco=c(1)=-0.3460910

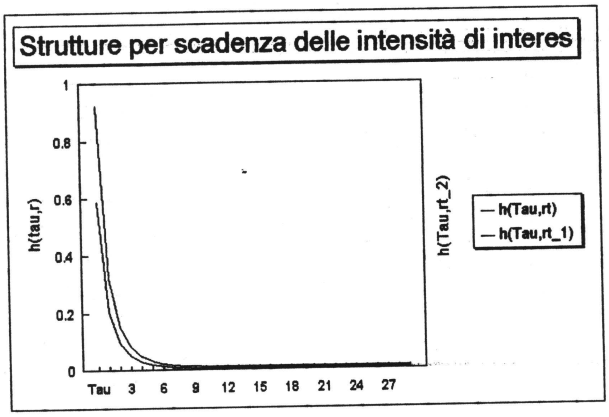
SULLA BASE DEI VALORI STIMATI SI HA (v. RELAZIONE N.3 PARAGRAFO II.4.4)

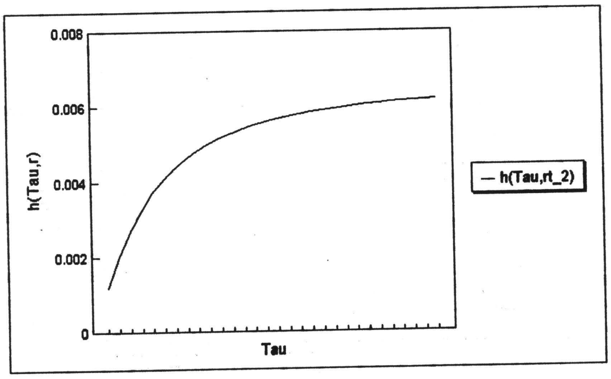
---

tendenza di lungo periodo di h():
H0=0.006786736
ovvero, tendenza di lungo periodo di i():
I0=0.6%

apd	0.741447
dued	0.742122
agr	20.0863
d	0.371061
rt	0.7
rt_1	0.4
rt_2	0.0001

Tau	h(Tau,rt)	h(Tau,rt_1)	h(Tau,rt_2)
1	0.586087	0.335385	0.0012
2	0.203849	0.11734	0.002023
3	0.095558	0.055758	0.002705
4	0.051312	0.030714	0.003256
5	0.030232	0.018861	0.003704
6	0.019323	0.012785	0.004069
7	0.013391	0.009524	0.004369
8	0.010065	0.00773	0.004618
9	0.008168	0.006735	0.004826
10	0.007077	0.006188	0.005002
11	0.006453	0.005895	0.005152
12	0.006103	0.00575	0.00528
13	0.005915	0.00569	0.005391
14	0.005823	0.005679	0.005487
15	0.005788	0.005695	0.005572
16	0.005786	0.005726	0.005646
17	0.005803	0.005765	0.005713
18	0.005831	0.005806	0.005772
19	0.005863	0.005847	0.005825
20	0.005898	0.005887	0.005873
21	0.005933	0.005926	0.005916
22	0.005966	0.005962	0.005956
23	0.005999	0.005996	0.005992
24	0.006029	0.006027	0.006025
25	0.006058	0.006057	0.006055
26	0.006085	0.006084	0.006083
27	0.006111	0.00611	0.006109
28	0.006134	0.006134	0.006134
29	0.006157	0.006156	0.006156
30	0.006178	0.006177	0.006177





APPENDICE C) Una stima alternativa del parametro pi-greco

REGRESSIONE LINEARE DELLA FUNZIONE H() CON TSP (*)

(*) Si tratta di una semplice regressione lineare. A tale scopo avremmo potuto usare anche software del tipo LOTUS o EXCEL.

```
Date: 7-02-1996 / Time: 15:39
SMPL range:    1  -    44
Number of observations: 44
 BOT12=BOTE*C(1)+C(2)
Equation is linear - 1 iteration
                  COEFFICIENT    STD. ERROR      T-STAT.    2-TAIL SIG.
      C(1)         0.8922655      0.0015464     577.00753      0.000
      C(2)         0.0060613      0.0001786     33.942703      0.000

R-squared                 0.999874    Mean of dependent var    0.107392
Adjusted R-squared        0.999871    S.D. of dependent var    0.018896
S.E. of regression        0.000215    Sum of squared resid     1.94E-06
Durbin-Watson stat        0.543564    F-statistic              332937.7
Log likelihood            310.2205
```

PARAMETRI STIMATI (v. RELAZIONE N.2 PARAGRAFO III.2.2)

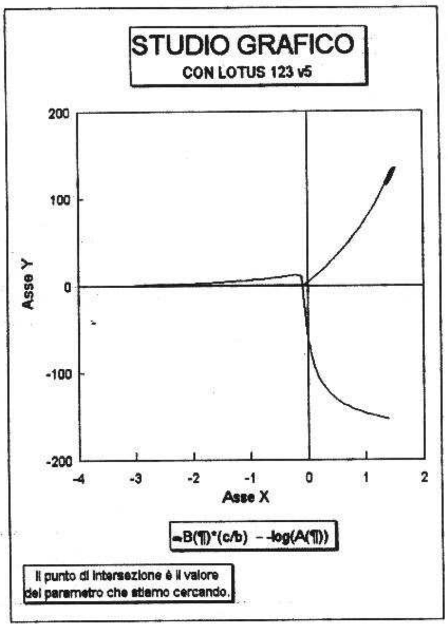
b=B(pi-greco)=C(1)=0.8922655
c=A(pi-greco)=C(2)=0.0060613

STIMA DI PI-GRECO

PARAMETRI:		
	a	0.024294
	agr	20.08631
	duero	0.000501
	cdivb	0.006793

d_1	PI-GRECO
3.024377	-3
2.92438	-2.9
2.824383	-2.8
2.724386	-2.7
2.62439	-2.6
2.524394	-2.5
2.424398	-2.4
2.324402	-2.3
2.224407	-2.2
2.124412	-2.1
2.024418	-2
1.924425	-1.9
1.824432	-1.8
1.72444	-1.7
1.624449	-1.6
1.524459	-1.5
1.42447	-1.4
1.324484	-1.3
1.224499	-1.2
1.124517	-1.1
1.024539	-1
0.924565	-0.9
0.824598	-0.8
0.72464	-0.7
0.624696	-0.6
0.524772	-0.5
0.424885	-0.4
0.325066	-0.3
0.225409	-0.2
0.126294	-0.1
0.033034	-5.6E-19
0.078945	0.1
0.177126	0.2
0.276613	0.3
0.376372	0.4
0.476232	0.5
0.57614	0.6
0.676076	0.7
0.776028	0.8
0.875992	0.9
0.975962	1
1.075938	1.1
1.175919	1.2
1.275902	1.3
1.375888	1.4
1.475875	1.5

B(¶)*(c/b)	-LOG(A(¶))
-0.04623	0.95362
-0.04326	1.051286
-0.04053	1.158672
-0.03802	1.276687
-0.03572	1.406311
-0.0336	1.548601
-0.03165	1.70469
-0.02987	1.875794
-0.02825	2.063211
-0.02676	2.268323
-0.02541	2.492594
-0.02419	2.73757
-0.02309	3.004875
-0.0221	3.296209
-0.02123	3.613335
-0.02047	3.958076
-0.01982	4.332304
-0.01929	4.73792
-0.01888	5.176844
-0.01861	5.650992
-0.01848	6.162252
-0.01853	6.712463
-0.0188	7.303371
-0.01937	7.936592
-0.02033	8.613536
-0.02191	9.335268
-0.02451	10.10215
-0.02904	10.91263
-0.03806	11.75768
-0.06257	12.57366
-0.33507	10.91762
4.374844	-61.9254
9.731976	-92.101
15.36199	-107.643
21.2571	-117.791
27.47697	-125.154
34.08851	-130.827
41.16096	-135.369
48.76593	-139.101
56.97838	-142.226
65.87764	-144.877
75.54851	-147.148
86.08231	-149.106
97.57795	-150.801
110.143	-152.27
123.8949	-153.544



OSSERVAZIONE:

Il valore di ¶ può così essere ricavato dal grafico.
Se si desiderasse una stima più corretta del parametro, sarebbe necessario elaborare i valori delle funzioni per intervalli di ¶ progressivamente ridotti.